Лекция 5

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

▼ *Линейным уравнением* относительно n неизвестных x_1, x_2, …, x_n называется выражение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, где a_1, a_2, …, a_n, b — числа. ▲

▼ Совокупность n чисел C_1, C_2, C_3, …, C_n называется решением линейного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, если при подстановке $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = C_3$, …, $x_n = C_n$ в данное уравнение оно дает верное числовое равенство. ▲

Система m линейных алгебраических уравнений с n переменными (СЛАУ) имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$ или в краткой форме $$\sum_{\substack{j=1; \\ i=1,\ldots,m}}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i ,$$

где a_{ij} — коэффициенты при переменных, b_i — свободные члены уравнений (a_{ij}, b_i произвольные числа; $i = \overline{1;m}$; $j = \overline{1;n}$), x_j — переменные (неизвестные).

Коэффициенты при неизвестных занумерованы двумя индексами: первый индекс i указывает номер уравнения, а второй j — номер переменной

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать

- *в матричной виде*

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — основная матрица системы (составлена из коэффициентов при переменных),

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица неизвестных x_{ij}, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ — матрица свободных членов уравнений

Представить систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8; \\ 5x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

► Исходя из условия имеем: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ — основная матрица; $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ — матрица свободных коэффициентов; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — матрица неизвестных.

Исходную систему уравнений запишем *в матричном виде*:

$A \cdot X = B$, т.е. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$;

▼ *Решением системы уравнений* называется упорядоченная совокупность n чисел C_1, C_2, C_3, …, C_n, подстановка которых вместо x_1, x_2, x_3, …, x_n соответственно, т.е. $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = C_3$, …, $x_n = C_n$ обращает в тождество каждое из уравнений этой системы. ▲

▼ Система линейных алгебраических уравнений называется

- *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение;
- *несовместной*, если она не имеет решений. ▲

▼ Система линейных алгебраических уравнений называется

- *определённой*, если она совместна и имеет единственное решение;
- *неопределённой*, если она совместна и имеет более одного решения. ▲

Решить систему уравнений матричным методом $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -6; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

► Запишем систему в матричном виде $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу к матрице A методом союзной матрицы:

$\Delta A = -5 \neq 0$;

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 18;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 10 \\ -8 & -7 & 18 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 10 \\ -8 & -7 & 18 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$