Информатика

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРЕ

10 класс

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Ключевые слова

- позиционные системы счисления
- арифметические операции в системе счисления с основанием *q*
- таблица сложения
- таблица умножения

Таблицы сложения в двоичной, троичной и восьмеричной системах счисления

Заполните пропуски в таблицах:

Двоичная система счисления

+	0	1
0	0	1
1	1	

Троичная система счисления

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	
2	2		

Восьмеричная система счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	
2	2	3	4	5	6	7		
3	3	4	5	6	7			
4	4	5	6	7				
5	5	6	7					
6	6	7						
7	7							16

Таблица сложения в шестнадцатеричной системе счисления

Шестнадцатеричная система счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Сложение чисел в системе счисления с основанием *q*

Чтобы в системе счисления с основанием *q* получить сумму *S* двух чисел *A* и *B*, надо просуммировать образующие их цифры по разрядам *i* справа налево:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} A_q \\ B_q \end{array} \\
\hline
S_q
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllllll}
 & & \overset{1}{} & & & & \\
+ & a_n & \ldots & a_{i+1} & a_i & \ldots a_1 & {a_0}_q \\
 & b_n & \ldots & b_{i+1} & b_i & \ldots b_1 & {b_0}_q \\
\hline
 & s_n & \ldots & s_{i+1} & s_i & \ldots s_1 & {s_0}_q
\end{array}
$$

$a_i + b_i \geq q$

$s_i = a_i + b_i - q$

$a_i + b_i < q$

$s_i = a_i + b_i$

- если $a_i + b_i < q$, то $s_i = a_i + b_i$, старший (i + 1)-й разряд не изменяется
- если $a_i + b_i \geq q$, то $s_i = a_i + b_i - q$, старший (*i* + *1*)-й разряд увеличивается на *1*

Сложение чисел в системе счисления с основанием *q*

№ 1.

a)
$$\begin{array}{r} \overset{}{1}\,2\,\overset{1}{1}\,\overset{1}{1}\,\overset{1}{0}\,1_3 \\ +\quad 2\,2\,2_3 \\ \hline 1\,2\,2\,1\,0\,0_3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,\overset{1}{4}\,\overset{1}{5}\,6_8 \\ +\quad 1\,2\,3\,4_8 \\ \hline 1\,2\,4\,7\,1\,2_8 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} D\,2\,\overset{1}{1}\,B\,1_{16} \\ +\quad C\,A\,F\,E_{16} \\ \hline D\,E\,C\,A\,F_{16} \end{array}$$

1 + 2 = 3 ≥ 3
записываем *3 - 3 = 0* под 1-м разрядом,
а 2-й разряд увеличиваем на *1*

$$\begin{array}{rcccccc} & a_n & \ldots & \overset{1}{a_{i+1}} & a_i & \ldots a_1 & a_{0\,q} \\ + & b_n & \ldots & b_{i+1} & b_i & \ldots b_1 & b_{0\,q} \\ \hline & s_n & \ldots & s_{i+1} & s_i & \ldots s_1 & s_{0\,q} \end{array}$$

$a_i + b_i \geq q$

$s_i = a_i + b_i - q$

$a_i + b_i < q$

$s_i = a_i + b_i$

Реши сам

Решите самостоятельно

№ 2.

a) $$\begin{array}{r} +\ 112221_3 \\ 10221_3 \\ \hline 200212_3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} +\ 555555_8 \\ 12345_8 \\ \hline 570122_8 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} +\ 38CB6_{16} \\ A20A_{16} \\ \hline 42EC0_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ a_n \ \ldots\ a_{i+1}\ a_i\ \ldots a_1\ a_{0\ q} \\ b_n \ \ldots\ b_{i+1}\ b_i\ \ldots b_1\ b_{0\ q} \\ \hline s_n \ \ldots\ s_{i+1}\ s_i\ \ldots s_1\ s_{0\ q} \end{array}$$

$a_i + b_i \geq q$

$s_i = a_i + b_i - q$

$a_i + b_i < q$

$s_i = a_i + b_i$

ОТВЕТ

Вычитание чисел в системе счисления с основанием *q*

Чтобы в системе счисления с основанием *q* получить разность *R* двух чисел *A* и *B*, надо вычислить разности образующих их цифр по разрядам *i* справа налево:

$$\begin{array}{r} A_q \\ -\ B_q \\ \hline R_q \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccl} - & a_n & \ldots & a_{i+1} & a_i & \ldots a_1 & a_{0\,q} \\ & b_n & \ldots & b_{i+1} & b_i & \ldots b_1 & b_{0\,q} \\ \hline & r_n & \ldots & r_{i+1} & r_i & \ldots r_1 & r_{0\,q} \end{array}$$

$a_i < b_i$

$r_i = q + a_i - b_i$

$a_i \geq b_i$

$r_i = a_i - b_i$

- если $a_i \geq b_i$, то $r_i = a_i - b_i$,
  старший (i + 1)-й разряд не изменяется
- если $a_i < b_i$, то $r_i = q + a_i - b_i$,
  старший (*i* + *1*)-й разряд уменьшается на *1*

Вычитание чисел в системе счисления с основанием *q*

№ 3.

a) $\begin{array}{r} \_\ 1\dot{0}1\dot{1}\dot{1}01_3 \\ 10210_3 \\ \hline 20121_3 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} \_\ \dot{6}5\dot{4}3\dot{2}1_8 \\ 563412_8 \\ \hline 70707_8 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} \_\ DE\dot{C}AF_{16} \\ CAFE_{16} \\ \hline D21B1_{16} \end{array}$

0 < 1
записываем 3 + 0 - 1 = 2 под 5-м разрядом,
делая заем в 6-м разряде

$$\begin{array}{r} \_\ a_n \ldots \dot{a}_{i+1}\ a_i\ \ldots a_1\ a_{0\ q} \\ b_n \ldots b_{i+1}\ b_i\ \ldots b_1\ b_{0\ q} \\ \hline r_n \ldots r_{i+1}\ r_i\ \ldots r_1\ r_{0\ q} \end{array}$$

$a_i < b_i$

$r_i = q + a_i - b_i$

$a_i \geq b_i$

$r_i = a_i - b_i$

Реши сам

?

Решите самостоятельно

№ 4.

a) $$\begin{array}{r} -\;210201_3 \\ 120021_3 \\ \hline 20110_3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} -\;545454_8 \\ 54345_8 \\ \hline 471107_8 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} -\;F43E8_{16} \\ B8445_{16} \\ \hline 3BFA3_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\;a_n \;\ldots\; \dot{a}_{i+1}\; a_i \;\ldots a_1\; a_{0\,q} \\ b_n \;\ldots\; b_{i+1}\; b_i \;\ldots b_1\; b_{0\,q} \\ \hline r_n \;\ldots\; r_{i+1}\; r_i \;\ldots r_1\; r_{0\,q} \end{array}$$

$a_i < b_i$

$r_i = q + a_i - b_i$

$a_i \geq b_i$

$r_i = a_i - b_i$

ОТВЕТ

Таблицы умножения в двоичной, троичной и восьмеричной системах счисления

Двоичная
система счисления

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Троичная
система счисления

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Восьмеричная
система счисления

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Таблица умножения в шестнадцатеричной системе счисления

Шестнадцатеричная система счисления

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	5	6	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	D2
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	D2	D2	E1

Умножение многозначного числа на однозначное в системе счисления *q*

Чтобы в системе счисления *q* получить произведение *M* многозначного числа *A* и однозначного числа b, надо вычислить произведения *b* и цифр числа *A* по разрядам *i* :

$$\times \begin{array}{r} A_q \\ B_q \\ \hline M_q \end{array}$$

$a_i \cdot b \text{ div } q$

$$\times \begin{array}{r} a_n \ldots a_{i+1}\, a_i \ \ldots a_1\, a_{0\,q} \\ b_q \\ \hline m_n \ldots m_{i+1}\, m_i \ \ldots m_1 m_{0\,q} \end{array}$$

$a_i \cdot b \geq q$	$a_i \cdot b < q$
$m_i = a_i \cdot b \text{ mod } q$	$m_i = a_i \cdot b$

- если $a_i \cdot b < q$, то $m_i = a_i \cdot b$, старший (i + 1)-й разряд не изменяется
- если $a_i \cdot b \geq q$, то $m_i = a_i \cdot b \text{ mod } q$, старший ($i$ + 1)-й разряд увеличивается на $a_i \cdot b \text{ div } q$

Умножение чисел в системе счисления с основанием *q*

№ 5.

a)
$$
\begin{array}{r}
\scriptstyle 1\ 1\ 1\quad \\
\times\ 1212_3 \\
2_3 \\
\hline
10201_3
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{r}
\scriptstyle 2\ 1\quad \\
\times\ 1032_8 \\
7_8 \\
\hline
7266_8
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{r}
\scriptstyle 2\ 1\quad \\
\times\ 1234_{16} \\
A_{16} \\
\hline
B608_{16}
\end{array}
$$

$2 \cdot 2 = 4 \geq 3$
записываем $4 \bmod 3 = 1$ под 1-м разрядом,
2-й разряд увеличиваем на $4 \operatorname{div} 3 = 1$

$a_i \cdot b \operatorname{div} q$

$$
\begin{array}{r}
\times\ a_n \ldots a_{i+1}\, a_i \ldots a_1\, a_0\,{}_q \\
b_q \\
\hline
m_n \ldots m_{i+1}\, m_i \ldots m_1 m_0\,{}_q
\end{array}
$$

$a_i \cdot b \geq q$	$a_i \cdot b < q$
$m_i = a_i \cdot b \bmod q$	$m_i = a_i \cdot b$

Реши сам

Решите самостоятельно

№ 6.

a) $$\begin{array}{r} \times \; 2102_3 \\ 2_3 \\ \hline 11211_3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} \times \; 205_8 \\ 5_8 \\ \hline 1231_8 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} \times \; A1B2_{16} \\ 5_{16} \\ \hline 3287A_{16} \end{array}$$

$a_i \cdot b \text{ div } q$

$$\begin{array}{r} \times \; a_n \ldots a_{i+1}\, a_i \ldots a_1\, a_{0\,q} \\ b_q \\ \hline m_n \ldots m_{i+1}\, m_i \ldots m_1 m_{0\,q} \end{array}$$

$a_i \cdot b \ge q$

$m_i = a_i \cdot b \bmod q$

$a_i \cdot b < q$

$m_i = a_i \cdot b$

ОТВЕТ

Деление чисел в системе счисления с основанием *q*

Деление нельзя свести к поразрядным операциям над цифрами, составляющими число.

Деление чисел в системе счисления с произвольным основанием *q* выполняется так же, как и в десятичной системе счисления.

А значит нам понадобятся правила умножения и вычитания чисел в системе счисления с основанием *q*.

$$\begin{array}{r} a_i \cdot b \text{ div } q \qquad\qquad \\ \times\; a_n \ldots a_{i+1}\, a_i \ldots a_1\, a_{0\,q} \\ b_{\;q} \\ \hline m_n \ldots m_{i+1}\, m_i \ldots m_1\, m_{0\,q} \end{array}$$

$a_i \cdot b \geq q$: $m_i = a_i \cdot b \bmod q$

$a_i \cdot b < q$: $m_i = a_i \cdot b$

$$\begin{array}{r} -\; a_n \ldots a_{i+1}\, a_i \ldots a_1\, a_{0\,q} \\ b_n \ldots b_{i+1}\, b_i \ldots b_1\, b_{0\,q} \\ \hline r_n \ldots r_{i+1}\, r_i \ldots r_1\, r_{0\,q} \end{array}$$

$a_i < b_i$: $r_i = q + a_i - b_i$

$a_i \geq b_i$: $r_i = a_i - b_i$

Решите самостоятельно

№ 7.

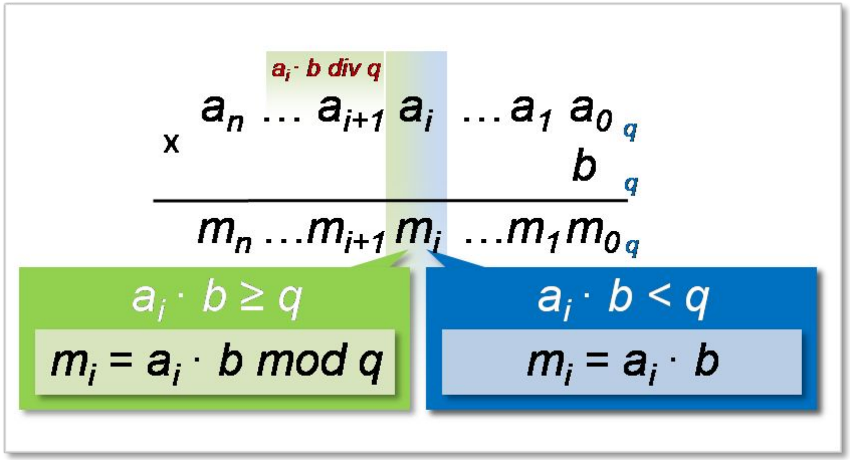
a) $2001_3 : 12_3 = 102_3$

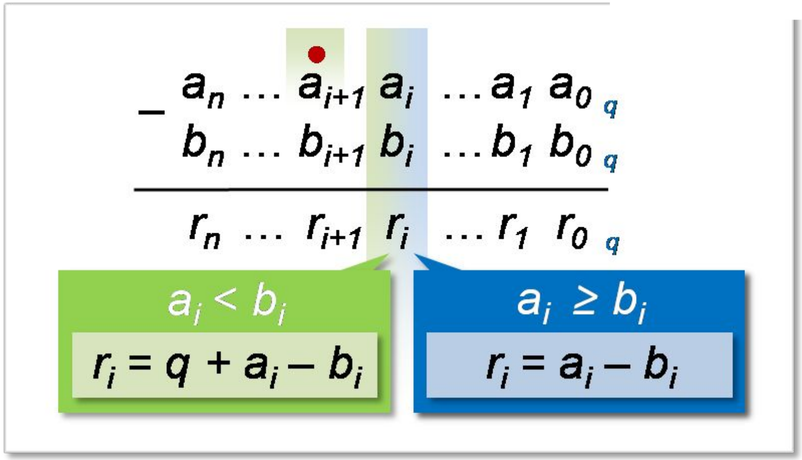
$$\begin{array}{r|l} 2001 & 12 \\ \underline{-12} & 102 \\ 101 & \\ \underline{-101} & \\ 0 & \end{array}$$

b) $4545_8 : 5_8 = 741_8$

c) $2B5C_{16} : A_{16} = 456_{16}$

ОТВЕТ





Двоичная арифметика

Таблица сложения

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Таблица вычитания

–	0	1
0	0	11
1	1	0

Таблица умножения

x	0	1
0	0	1
1	1	1

№ 8.

a)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1\,1\,1} \\ +\;111111_2 \\ 1_2 \\ \hline 1000000_2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2\,2} \\ -\;1000_2 \\ 1_2 \\ \hline 111_2 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 2\,0\,2} \\ -\;101010_2 \\ 111_2 \\ \hline 100011_2 \end{array}$$

Вопросы и задания

Задание 1. Найдём количество единиц в двоичной записи числа, являющегося результатом десятичного выражения

$$2^{4000} + 4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6.$$

Решение:

Представим все операнды исходного выражения в виде степеней двойки:

$$2^{4000} + 4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6$$

$$6 = 4 + 2 = 2^2 + 2^1$$

$$8^{600} = (2^3)^{600} = 2^{1800}$$

$$4^{2016} = (2^2)^{2016} = 2^{4032}$$

Исходное выражение $2^{4000} + 4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6$ примет вид $2^{4000} + 2^{4032} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1$

Перепишем выражение в порядке убывания степеней:

$$2^{4032} + 2^{4000} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1$$

Вопросы и задания

Решение: $2^{4032} + 2^{4000} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1$

Для работы с десятичными числами вида 2^n полезно иметь в виду следующие закономерности в их двоичной записи:

$$2^1 = 10 = 1 + 1; \quad 2^2 = 100 = 11 + 1; \quad 2^3 = 1000 = 111 + 1; \ \dots$$

В общем виде: $2^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1$

Для натуральных n и m таких, что n > m, получаем:

$$2^n + 2^m = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} + 1\underbrace{0\ldots0}_{m} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-m-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m},$$

$$2^n - 2^m = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1 - (\underbrace{1\ldots1}_{m} + 1) = \underbrace{1\ldots1}_{n} - \underbrace{1\ldots1}_{m} = \underbrace{1\ldots1}_{n-m}\underbrace{0\ldots0}_{m}$$

Эти соотношения позволят подсчитать количество «1» в выражении без вычислений. Двоичные представления чисел 2^{4032} и 2^{4000} внесут в двоичное представление суммы по одной «1». Разность $2^{2018} - 2^{1800}$ в двоичной записи представляет собой цепочку из 218 единиц и следующих за ними 1800 нулей. Слагаемые 2^2 и 2^1 дают ещё 2 единицы. **Итого: 1 + 1 + 218 + 1 + 1 = 222**.

Вопросы и задания

Задание 2. Найдём количество цифр в восьмеричной записи числа, являющегося результатом десятичного выражения:

$$2^{299} + 2^{298} + 2^{297} + 2^{296}.$$

Решение:

Двоичное представление исходного числа имеет вид:

$$1111\underbrace{0\ldots0}_{296}$$

Всего в этой записи 300 двоичных символов. При переводе двоичного числа в восьмеричную систему счисления каждая триада исходного числа заменяется восьмеричной цифрой.

Следовательно, восьмеричное представление исходного числа состоит из 100 цифр.

Ответ: 100 цифр

Самое главное

Арифметические операции в позиционных системах счисления с основанием *q* выполняются по правилам, аналогичным правилам, действующим в десятичной системе счисления.

Если необходимо вычислить значение арифметического выражения, операнды которого представлены в различных системах счисления, можно:

1) все операнды представить в привычной нам десятичной системе счисления;
2) вычислить результат выражения в десятичной системе счисления;
3) перевести результат в требуемую систему счисления.

Самое главное

Для работы с десятичными числами вида 2^n полезно иметь в виду следующие закономерности в их двоичной записи:

$$2^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1$$

Для натуральных n и m таких, что n > m, получаем:

$$2^n + 2^m = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} + 1\underbrace{0\ldots0}_{m} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-m-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m},$$

$$2^n - 2^m = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1 - (\underbrace{1\ldots1}_{m} + 1) = \underbrace{1\ldots1}_{n} - \underbrace{1\ldots1}_{m} = \underbrace{1\ldots1}_{n-m}\underbrace{0\ldots0}_{m}$$

Вопросы и задания

1. Выполните арифметические операции над двоичными числами. Для того чтобы убедиться в правильности полученных результатов, найдите десятичные эквиваленты операндов и результата.

Проверка:

а) $101111010_2 + 100111_2 = 110100001_2$ $378 + 39 = 417$

б) $10111{,}01_2 + 1{,}11_2 = 11001{,}00_2$ $23{,}25 + 1{,}75 = 25$

в) $10101101_2 - 11101_2 = 10010000_2$ $173 - 29 = 144$

г) $11011_2 \cdot 1101_2 = 101011111_2$ $27 \cdot 13 = 351$

д) $1011011_2 : 111_2 = 1101_2$ $91 : 7 = 13$

ОТВЕТ

Вопросы и задания

2. Какое число следует за каждым из данных. Ответ для каждого числа дайте в указанной системе счисления.

а) 10111_2 б) 344_5 в) 7677_8 г) EFF_{16}

11000_2 400_5 7700_8 $F00_{16}$

ОТВЕТ

Какое число предшествует каждому из данных. Ответ для каждого числа дайте в указанной системе счисления.

а) 10100_2 б) 320_4 в) 7010_8 г) $9D0_{16}$

10011_2 313_4 7007_8 $9CF_{16}$

ОТВЕТ

Вопросы и задания

3. Сумму восьмеричных чисел

$$17 + 1\,700 + 170\,000 + 17\,000\,000 + 1\,700\,000\,000$$

перевели в 16-теричную систему счисления. Найдите в 16-ной записи числа, равного этой сумме, 5-ю цифру слева.

Решение:

Найдем сумму данных чисел.

В полученной сумме

10 восьмеричных цифр или

10·3 - 2 = 28 двоичных цифры или

28 : 4 = 7 тетрад

Нас интересует 5-я слева (она же 3-я справа) тетрада: $0011_2=3_{16}$

Ответ: цифра 3

$$
\begin{array}{r}
1\ 700\ 000\ 000 \\
+\quad 17\ 000\ 000 \\
+\quad 170\ 000 \\
+\quad 1\ 700 \\
+\quad 17 \\
\hline
1\ 717\ 171\ 717
\end{array}
$$

1	111	001	111	001	111	001	111	001	111

$0011_2=3_{16}$

Вопросы и задания

4. Какая первая цифра в шестнадцатеричной записи числа:

$$2^{378} + 2^{377} + 2^{376}?$$

Ответ: 7

Комментарий.

В двоичной записи числа 379 цифр, первые три из которых «1», остальные – «0», т.е. начало двоичного числа 1110000…

Для перевода в шестнадцатеричную систему счисления двоичное число разделим на тетрады, для этого двоичное число слева дополним одним нулем (01110000…), чтобы получилось ровное число тетрад 380 : 4 = 95.

Первая тетрада (0111) и будет искомой цифрой: $0111_2=7$

ОТВЕТ