ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ

Лекция
по учебной дисциплине «Цифровая схемотехника и обработка сигналов»
(Д-0205-1)
Тема № 11: «Фильтры с бесконечной импульсной характеристикой»
Занятие № 45: «Построение структурных схем БИХ-фильтров»

Руководитель занятия – доцент кафедры, к.т.н., доцент, полковник Филимонов Василий Александрович

г. Санкт-Петербург
2018

Учебные цели:

1. Научиться синтезировать БИХ-фильтры методом билинейного Z-преобразования с использованием пакета программ FD3.
2. Подготовить курсантов к лабораторной работе.

Учебные вопросы:

1. Пример синтеза фильтра по заданным требованиям.
2. Расчёт добротностей полюсов.
3. Конструирование каскадной (последовательной) схемы.
4. Система разностных уравнений.

Первый учебный вопрос

Пример синтеза фильтра по заданным требованиям

Первый учебный вопрос

1. Задание требований:
частота дискретизации $f_д$ = 2000 Гц;
граничные частоты: f_{-k} = 200 Гц; $f_{-х}$ = 350 Гц; $f_х$ = 600 Гц; f_k = 750 Гц;
допустимые отклонения: в полосе пропускания a_{max} = 1 дБ ($δ_1$ = 0,108749), в полосе задерживания a_0 = –30 дБ ($δ_2$ = 0,0316228);
аппроксимация АЧХ – Золотарёва-Кауэра.
2. Расчёт заданного фильтра.
Рассмотреть содержание всех окон и возможности их управления:
фильтр рассчитывается автоматически (в данном случае он равен 6) и не может быть изменён;
сколько звеньев 2-го порядка (биквадратных звеньев) содержит фильтр 6 порядка;
обратить внимание на принципиальную нелинейность ФЧХ БИХ-фильтров и наличие скачков на π рад в полосах задерживания на тех частотах, где $A(f) = 0$. Пояснить связь между АЧХ и картой нулей и полюсов;
убедиться в бесконечности импульсной характеристики БИХ-фильтра.

Второй учебный вопрос

Расчёт добротностей полюсов

Второй учебный вопрос

Добротность Q_k *k*-го нуля или полюса определяется по формуле: $Q_k = \frac{r_k \hat{\omega}_k}{1 - r_k^2}$

$\hat{\omega}_k$

$$z_{*1,2} = r_{*1} e^{\pm j\hat{\omega}_*} = \xi_{*1} \pm j\eta_{*1} = 0,0699405 \pm j0,80144,$$

$$r_{*1} = \sqrt{0,0699405^2 + 0,80144^2} = 0,804486,$$

$$\hat{\omega}_{*1} = \operatorname{arctg}\frac{0,80144}{0,0699405} = \operatorname{arctg}11,458882 = 1,4837482 \text{ [рад]},$$

$$Q_{*1} = \frac{0,804486 \cdot 1,4837482}{1 - 0,804486^2} = \frac{0,804486 \cdot 1,4837482}{1 - 0,647198} = 3,3833552.$$

Второй учебный вопрос

Добротность Q_k *k*-го нуля или полюса определяется по формуле: $Q_k = \frac{r_k \hat{\omega}_k}{1 - r_k^2}$

$\hat{\omega}_k$

$$z_{*1,2} = r_{*1} e^{\pm j\hat{\omega}_*} = \xi_{*1} \pm j\eta_{*1} = 0,0699405 \pm j0,80144,$$

$$r_{*1} = \sqrt{0,0699405^2 + 0,80144^2} = 0,804486,$$

$$\hat{\omega}_{*1} = \text{arctg}\frac{0,80144}{0,0699405} = \text{arctg}11,458882 = 1,4837482 \text{ [рад]},$$

$$Q_{*1} = \frac{0,804486 \cdot 1,4837482}{1 - 0,804486^2} = \frac{0,804486 \cdot 1,4837482}{1 - 0,647198} = 3,3833552.$$

Аналогично для второй пары полюсов:

$$z_{*3,4} = r_{*3} e^{\pm j\hat{\omega}_*} = \xi_{*3} \pm j\eta_{*3} = 0,414262 \pm j0,825008,$$

$$r_{*3} = \sqrt{0,414262^2 + 0,825008^2} = 0,923174,$$

$$\hat{\omega}_{*3} = \text{arctg}\frac{0,825008}{0,414262} = \text{arctg}1,9915126 = 1,1054454 \text{ [рад]},$$

$$Q_{*3} = \frac{0,923174 \cdot 1,1054454}{1 - 0,923174^2} = \frac{0,923174 \cdot 1,1054454}{1 - 0,852251} = 6,9;$$

Второй учебный вопрос

Добротность Q_k k-го нуля или полюса определяется по формуле: $Q_k = \frac{r_k \hat{\omega}_k}{1 - r_k^2}$

$\hat{\omega}_k$

$$z_{*1,2} = r_{*1} e^{\pm j\hat{\omega}_*} = \xi_{*1} \pm j\eta_{*1} = 0,0699405 \pm j0,80144,$$

$$r_{*1} = \sqrt{0,0699405^2 + 0,80144^2} = 0,804486,$$

$$\hat{\omega}_{*1}, \text{рад} = \operatorname{arctg} \frac{0,80144}{0,0699405} = \operatorname{arctg} 11,458882 = 1,4837482 \text{ [}$$

$$Q_{*1} = \frac{0,804486 \cdot 1,4837482}{1 - 0,804486^2} = \frac{0,804486 \cdot 1,4837482}{1 - 0,647198} = 3,3833552.$$

Аналогично для второй пары полюсов:

$$z_{*3,4} = r_{*3} e^{\pm j\hat{\omega}_*} = \xi_{*3} \pm j\eta_{*3} = 0,414262 \pm j0,825008,$$

$$r_{*3} = \sqrt{0,414262^2 + 0,825008^2} = 0,923174,$$

$$\hat{\omega}_{*3}, \text{рад} = \operatorname{arctg} \frac{0,825008}{0,414262} = \operatorname{arctg} 1,9915126 = 1,1054454 \text{ [}$$

$$Q_{*3} = \frac{0,923174 \cdot 1,1054454}{1 - 0,923174^2} = \frac{0,923174 \cdot 1,1054454}{1 - 0,852251} = 6,9;$$

$$z_{*5,6} = r_{*5} e^{\pm j\hat{\omega}_*} = \xi_{*5} \pm j\eta_{*5} = -0,277788 \pm j0,875263,$$

$$r_{*5} = \sqrt{(-0,277788)^2 + 0,875263^2} = 0,918287,$$

$$\hat{\omega}_{*5}, \text{рад} = \operatorname{arctg} \frac{0,875263}{-0,277788} = \operatorname{arctg}(-3,15083) = 1,877118 \text{ [}$$

$$Q_{*5} = \frac{0,918287 \cdot 1,877118}{1 - 0,918287^2} = \frac{0,918287 \cdot 1,877118}{1 - 0,843251} = 10,996.$$

Третий учебный вопрос

Конструирование каскадной (последовательной) схемы

Третий учебный вопрос

1. Формирование биквадратных звеньев и расположение их в каскадной структуре.

Вследствие полученных результатов имеет место следующее соотношение добротностей полюсов:

$$Q_{*1,2} < Q_{*3,4} < Q_{*5,6}$$

поэтому в таком порядке (слева направо) в каскадной структуре и должны располагаться соответствующие биквадратные звенья, которые формируются из полюсов и нулей, наиболее близко расположенных друг к другу, т. е. имеющих близкие добротности. Поскольку в исследуемом случае все нули лежат на единичной окружности, то их радиусы равны единице, и выбор нулей в пары с полюсами целесообразно производить только по принципу близкого расположения, начиная с полюса максимальной добротности. Тогда для формирования биквадратных звеньев получим следующие пары полюсов и нулей:

Третий учебный вопрос

1. Формирование биквадратных звеньев и расположение их в каскадной структуре.

Вследствие полученных результатов имеет место следующее соотношение добротностей полюсов:

$$Q_{*1,2} < Q_{*3,4} < Q_{*5,6}$$

поэтому в таком порядке (слева направо) в каскадной структуре и должны располагаться соответствующие биквадратные звенья, которые формируются из полюсов и нулей, наиболее близко расположенных друг к другу, т. е. имеющих близкие добротности. Поскольку в исследуемом случае все нули лежат на единичной окружности, то их радиусы равны единице, и выбор нулей в пары с полюсами целесообразно производить только по принципу близкого расположения, начиная с полюса максимальной добротности. Тогда для формирования биквадратных звеньев получим следующие пары полюсов и нулей:

$$\left\{z_{*5,6};\ z_{\mathbb{N}5,6}\right\} \Rightarrow H_3(z) = \frac{0{,}329611 + 0{,}497897z^{-1} + 0{,}329611z^{-2}}{1 + 0{,}555577z^{-1} + 0{,}843251z^{-2}},$$

Третий учебный вопрос

1. Формирование биквадратных звеньев и расположение их в каскадной структуре.
Вследствие полученных результатов имеет место следующее соотношение добротностей полюсов:

$$Q_{*1,2} < Q_{*3,4} < Q_{*5,6}$$

поэтому в таком порядке (слева направо) в каскадной структуре и должны располагаться соответствующие биквадратные звенья, которые формируются из полюсов и нулей, наиболее близко расположенных друг к другу, т. е. имеющих близкие добротности. Поскольку в исследуемом случае все нули лежат на единичной окружности, то их радиусы равны единице, и выбор нулей в пары с полюсами целесообразно производить только по принципу близкого расположения, начиная с полюса максимальной добротности. Тогда для формирования биквадратных звеньев получим следующие пары полюсов и нулей:

$$\left\{z_{*5,6};\ z_{\mathbb{0}5,6}\right\} \Rightarrow H_3(z) = \frac{0,329611 + 0,497897z^{-1} + 0,329611z^{-2}}{1 + 0,555577z^{-1} + 0,843251z^{-2}},$$

$$\left\{z_{*3,4};\ z_{\mathbb{0}3,4}\right\} \Rightarrow H_2(z) = \frac{0,329611 - 0,540254z^{-1} + 0,329611z^{-2}}{1 - 0,828525z^{-1} + 0,852251z^{-2}},$$

Третий учебный вопрос

1. Формирование биквадратных звеньев и расположение их в каскадной структуре.
Вследствие полученных результатов имеет место следующее соотношение добротностей полюсов:

$$Q_{*1,2} < Q_{*3,4} < Q_{*5,6}$$

поэтому в таком порядке (слева направо) в каскадной структуре и должны располагаться соответствующие биквадратные звенья, которые формируются из полюсов и нулей, наиболее близко расположенных друг к другу, т. е. имеющих близкие добротности. Поскольку в исследуемом случае все нули лежат на единичной окружности, то их радиусы равны единице, и выбор нулей в пары с полюсами целесообразно производить только по принципу близкого расположения, начиная с полюса максимальной добротности. Тогда для формирования биквадратных звеньев получим следующие пары полюсов и нулей:

$$\left\{z_{*5,6};\ z_{\mathbb{0}5,6}\right\} \Rightarrow H_3(z) = \frac{0,329611 + 0,497897z^{-1} + 0,329611z^{-2}}{1 + 0,555577z^{-1} + 0,843251z^{-2}},$$

$$\left\{z_{*3,4};\ z_{\mathbb{0}3,4}\right\} \Rightarrow H_2(z) = \frac{0,329611 - 0,540254z^{-1} + 0,329611z^{-2}}{1 - 0,828525z^{-1} + 0,852251z^{-2}},$$

$$\left\{z_{*1,2};\ z_{\mathbb{0}1,2}\right\} \Rightarrow H_1(z) = \frac{0,329611 - 0,329611z^{-2}}{1 - 0,139881z^{-1} + 0,64714z^{-2}}$$

Третий учебный вопрос

1. Формирование биквадратных звеньев и расположение их в каскадной структуре.
Вследствие полученных результатов имеет место следующее соотношение добротностей полюсов:

$$Q_{*1,2} < Q_{*3,4} < Q_{*5,6}$$

поэтому в таком порядке (слева направо) в каскадной структуре и должны располагаться соответствующие биквадратные звенья, которые формируются из полюсов и нулей, наиболее близко расположенных друг к другу, т. е. имеющих близкие добротности. Поскольку в исследуемом случае все нули лежат на единичной окружности, то их радиусы равны единице, и выбор нулей в пары с полюсами целесообразно производить только по принципу близкого расположения, начиная с полюса максимальной добротности. Тогда для формирования биквадратных звеньев получим следующие пары полюсов и нулей:

$$\left\{z_{*5,6};\ z_{\mathbb{0}5,6}\right\} \Rightarrow H_3(z) = \frac{0,329611 + 0,497897z^{-1} + 0,329611z^{-2}}{1 + 0,555577z^{-1} + 0,843251z^{-2}},$$

$$\left\{z_{*3,4};\ z_{\mathbb{0}3,4}\right\} \Rightarrow H_2(z) = \frac{0,329611 - 0,540254z^{-1} + 0,329611z^{-2}}{1 - 0,828525z^{-1} + 0,852251z^{-2}},$$

$$\left\{z_{*1,2};\ z_{\mathbb{0}1,2}\right\} \Rightarrow H_1(z) = \frac{0,329611 - 0,329611z^{-2}}{1 - 0,139881z^{-1} + 0,64714z^{-2}}$$

Передаточная функция фильтра с учётом коэффициентов масштабирования имеет вид:

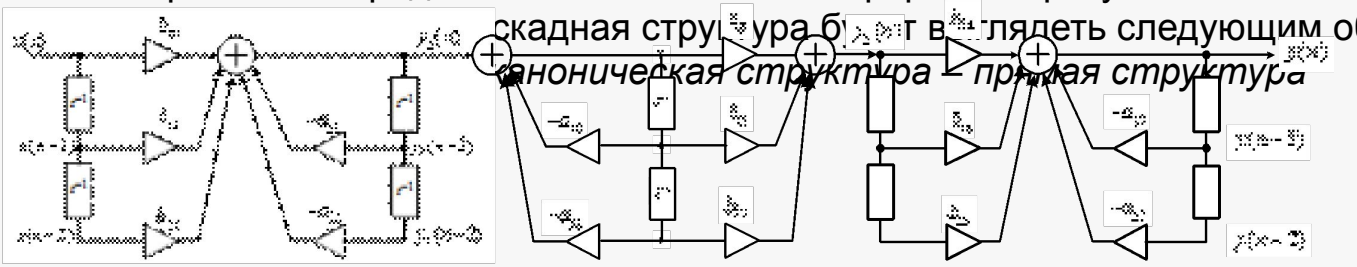
$$H(z) = m_1 \cdot H_1(z) \cdot m_2 \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)$$

Третий учебный вопрос

2. Оптимизация структуры звеньев с целью достижения минимума собственного шума, приведённого к выходу.

Замечаем, что при неканонической структуре всех звеньев собственный шум фильтра составляет ≈ –103,75 дБ. Путём простого перебора вариантов получаем, что меньший шум (≈ –104,2 дБ) достигается, если второе звено представить в канонической форме – в результате имеем экономию двух регистров

скадная стру ура б т в глядеть следующим образом (рис. 1):



канонической структура – прямая структура

Третий учебный вопрос

3. Запись передаточной функции с учётом коэффициентов масштабирования.

С целью уменьшения числа умножителей и, как следствие, уменьшения собственного шума фильтра коэффициенты масштабирования учитываются в предыдущем звена путём умножения коэффициентов его числителя этого звена на этот коэффициент масштабирования. Это означает, что коэффициенты числителя первого звена должны быть умножены на произведение коэффициентов масштабирования первого и второго звеньев:

$m = m_1 \cdot m_2 = 0{,}513342 \cdot 0{,}66342 = 0{,}34056134964 \approx 0{,}340562.$

Поэтому передаточная функция первого звена получает вид:

$$\hat{H}_1(z) = \frac{\left(0{,}329611 - 0{,}329611 z^{-2}\right) 0{,}340562}{1 - 0{,}139881 z^{-1} + 0{,}64714 z^{-2}} = \frac{0{,}1119122 - 0{,}111912 z^{-2}}{1 - 0{,}139881 z^{-1} + 0{,}64714 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{0{,}1119122 - 0{,}111912 z^{-2}}{1 - 0{,}139881 z^{-1} + 0{,}64714 z^{-2}} \times \frac{0{,}329611 - 0{,}540254 z^{-1} + 0{,}329611 z^{-2}}{1 - 0{,}828525 z^{-1} + 0{,}852251 z^{-2}} \times$$
$$\times \frac{0{,}329611 + 0{,}497897 z^{-1} + 0{,}329611 z^{-2}}{1 + 0{,}555577 z^{-1} + 0{,}843251 z^{-2}}.$$

Четвертый учебный вопрос

Система разностных уравнений

Четвертый учебный вопрос

Запись разностного уравнения фильтра с учётом канонической схемы второго звена:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} y_1(n) &= 0{,}1119122x(n) - 0{,}111912x(n-2) + 0{,}139881y_1(n-1) - 0{,}64714y_1(n-2); \\ v(n) &= y_1(n) + 0{,}828525v(n-1) - 0{,}852251v(n-2); \\ y_2(n) &= 0{,}329611v(n) - 0{,}540254v(n-1) + 0{,}329611v(n-2); \end{aligned}\right\} \text{уравнения 2-го звена} \\ y(n) = 0{,}329611y_2(n) + 0{,}497897y_2(n-1) + 0{,}329611y_2(n-2) + 0{,}555577y(n-1) + 0{,}843251y(n-2). \end{cases}$$