Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на множестве X , содержащем точку x_0. Приращению аргумента Δx соответствует приращение функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которое по определению дифференцируемой функции равно:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x).$$

Главная, линейная относительно Δx, часть приращения $\Delta f(x_0)$ называется ***дифференциалом***, обозначается

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx,$$

где $dx = \Delta x$ – дифференциал независимой переменной при $\Delta x \to 0$.

Если x_0 – произвольная точка множества X, то, определяя дифференциал в каждой точке, найдем общий вид дифференциала функции:

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Дифференциалы явно заданных функций

Пример. Найти дифференциал функции $f(x)$ в общем виде.

А) $f(x) = \frac{e^3}{\sqrt{x}}$.

$$df(x) = d\frac{e^3}{\sqrt{x}} = \left(\frac{e^3}{\sqrt{x}}\right)' dx = e^3 \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' dx = e^3 \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = -\frac{e^3}{2\sqrt{x^3}} dx.$$

Б) $f(x) = x^x$

$$df(x) = dx^x = (x^x)' dx = x^x (\ln x^x)' dx = x^x (x \ln x)' dx = x^x (\ln x + 1)\, dx.$$

Дифференциал функции, заданной неявно

Пример. Найти дифференциал функции $y\,(x)$, заданной неявно уравнением $y = \cos(x - y)$.

Р е ше н и е. Найдем дифференциал равенства:

$$dy = d\cos(x - y)$$

$$dy = -\sin(x - y)d\,(x - y)$$

$$dy = -\sin(x - y)\,(dx - dy).$$

Из полученного равенства выразим dy :

$$dy + \sin(x - y)dy = -\sin(x - y)dx$$

$$dy\,(1 + \sin(x - y)) = -\sin(x - y)dx$$

$$dy = -\frac{\sin(x-y)}{1+\sin(x-y)}dx.$$

Дифференциал в точке

Пример. Найти дифференциал функции $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0,01$.

Р е ш е н и е. Дифференциал в общем виде

$$df(x) = d\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

При $dx = \Delta x = 0,01$ и $x = 1$:

$$df(1) = \left.\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=1;\ \Delta x=0,01} = \frac{0,01}{\sqrt{1+1}} = \frac{0,01}{\sqrt{2}}.$$

Приближенные вычисления

Так как приращение дифференцируемой функции равно:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x),$$

то при достаточно малых Δx верно приближенное равенство

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x,$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Обозначив $x_0 + \Delta x = x$, приращение определим как разность $\Delta x = x - x_0$ и запишем формулу для приближенного вычисления значения функции в точке x:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Важно! При вычислении значения функции с помощью полученного равенства x_0 выбирают так, чтобы значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ легко вычислялись, а приращение $\Delta x = x - x_0$ было достаточно мало по абсолютной величине, т.е. $|\Delta x| \ll 1$.

Пример приближенного вычисления

Пример. Вычислим приближенно $\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Так как известно значение $\sqrt{2,25} = 1,5$, и разность $2,25 - 2 = 0,25$ достаточно мала, то, полагая $f(x) = \sqrt{x},\ \ x = 2,\ \ x_0 = 2,25$, применим формулу приближенного вычисления:

$$f(2,25) = \sqrt{2,25} = 1,5.$$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(2,25) = \frac{1}{2\sqrt{2,25}} = \frac{1}{3}.$$

Подставим в формулу

$$\sqrt{2} \approx f(2,25) + f'(2,25)(2 - 2,25) = 1,5 - \frac{1}{3}0,25 = \frac{4,25}{3} = 1,41(6).$$

Найти дифференциал в общем виде для функции

$$f(x) = e^{\cos^2 x}$$

- [x] $df = -e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$
- [ ] $df = e^{\cos^2 x} \sin x dx$
- [ ] $df = e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$
- [ ] $df = e^{-\sin 2x} dx$

Вычислить дифференциал функции $y = x^2 - x$ в точке $x = 10$ при $\Delta x = 0,1$

- ○ $dy\,(10) = 2$
- ○ $dy\,(10) = 9$
- ○ $dy\,(10) = 1,91$
- ◉ $dy\,(10) = 1,9$

Найти дифференциал функции $y\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $x-y=\arcsin x-\arcsin y$

- [ ] $dy=\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)dx$

- [ ] $dy=\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

- [ ] $dy=\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\,dx$

- [x] $dy=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-y^2}-1}\cdot\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\,dx$

Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}\,t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ в точке, соответствующей значению $t = \frac{\pi}{4}$.

- $dy(2) = 2dx$
- $dy(2) = \frac{dx}{2}$
- $dy(2) = \cos^2 2\,(\sin 4 + \cos 4)\,dx$
- $dy(2) = (\sin 4 + \cos 4)\,dx$

Указать приближенное значение $\lg 11$, найденное с помощью дифференциала

- 1,042
- 1,043
- 1,041
- 1,040

Указать приближенное значение $\sqrt[3]{9}$, найденное с помощью дифференциала

- 2,08
- 2,082
- 2,081
- 2,083

Указать приближенное значение $\arcsin 0,49$, найденное с помощью дифференциала

- 0,535
- 0,512
- 0,51
- 0,53

?