Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на множестве X, содержащем точку x_0. Приращению аргумента Δx соответствует приращение функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которое по определению дифференцируемой функции равно:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x).$$

Главная, линейная относительно Δx, часть приращения $\Delta f(x_0)$ называется ***дифференциалом***, обозначается

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx,$$

где $dx = \Delta x$ – дифференциал независимой переменной при $\Delta x \to 0$.

Если x_0 – произвольная точка множества X, то, определяя дифференциал в каждой точке, найдем общий вид дифференциала функции:

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Дифференциалы явно заданных функций

Пример. Найти дифференциал функции $f(x)$ в общем виде.

А) $f(x) = \frac{e^3}{\sqrt{x}}$.

$$df(x) = d\frac{e^3}{\sqrt{x}} = \left(\frac{e^3}{\sqrt{x}}\right)' dx = e^3\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' dx = e^3\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = -\frac{e^3}{2\sqrt{x^3}}dx.$$

Б) $f(x) = x^x$

$$df(x) = dx^x = (x^x)'dx = x^x(\ln x^x)'dx = x^x(x\ln x)'dx = x^x(\ln x + 1)\,dx.$$

Дифференциал функции, заданной неявно

Пример. Найти дифференциал функции $y\left(x\right)$, заданной неявно уравнением$y=\cos(x-y)$.

Р е ше н и е. Найдем дифференциал равенства:

$$dy=d\cos(x-y)$$
$$dy=-\sin(x-y)d\left(x-y\right)$$
$$dy=-\sin(x-y)\left(dx-dy\right).$$

Из полученного равенства выразим dy :

$$dy+\sin(x-y)dy=-\sin(x-y)dx$$
$$dy\left(1+\sin(x-y)\right)=-\sin(x-y)dx$$
$$dy=-\tfrac{\sin(x-y)}{1+\sin(x-y)}dx.$$

Дифференциал в точке

Пример. Найти дифференциал функции $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ в точке $x=1$ при $\Delta x=0,01$.

Р е ш е н и е. Дифференциал в общем виде

$$df(x)=d\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

При $dx=\Delta x=0,01$ и $x=1$:

$$df(1)=\left.\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=1;\ \Delta x=0{,}01}=\frac{0{,}01}{\sqrt{1+1}}=\frac{0{,}01}{\sqrt{2}}.$$

Приближенные вычисления

Так как приращение дифференцируемой функции равно:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x),$$

то при достаточно малых Δx верно приближенное равенство

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x,$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Обозначив $x_0 + \Delta x = x$, приращение определим как разность $\Delta x = x - x_0$ и запишем формулу для приближенного вычисления значения функции в точке x:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Важно! При вычислении значения функции с помощью полученного равенства x_0 выбирают так, чтобы значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ легко вычислялись, а приращение $\Delta x = x - x_0$ было достаточно мало по абсолютной величине, т.е. $|\Delta x| \ll 1$.

Пример приближенного вычисления

Пример. Вычислим приближенно $\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Так как известно значение $\sqrt{2,25} = 1,5$, и разность $2,25 - 2 = 0,25$ достаточно мала, то, полагая $f\left(x\right) = \sqrt{x},\;\; x = 2,\;\; x_0 = 2,25$, применим формулу приближенного вычисления:

$$f\left(2,25\right) = \sqrt{2,25} = 1,5.$$

$$f'\left(x\right) = \left(\sqrt{x}\right)' = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'\left(2,25\right) = \tfrac{1}{2\sqrt{2,25}} = \tfrac{1}{3}.$$

Подставим в формулу

$$\sqrt{2} \approx f\left(2,25\right) + f'\left(2,25\right)\left(2 - 2,25\right) = 1,5 - \tfrac{1}{3}0,25 = \tfrac{4,25}{3} = 1,41\left(6\right).$$

Найти дифференциал в общем виде для функции

$$f(x) = e^{\cos^2 x}$$

- [x] $df = -e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$
- [ ] $df = e^{\cos^2 x} \sin x dx$
- [ ] $df = e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$
- [ ] $df = e^{-\sin 2x} dx$

Вычислить дифференциал функции $y = x^2 - x$ в точке $x = 10$ при $\Delta x = 0,1$

- ( ) $dy\left(10\right) = 2$
- ( ) $dy\left(10\right) = 9$
- ( ) $dy\left(10\right) = 1,91$
- (•) $dy\left(10\right) = 1,9$

Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

- [ ] $dy = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dx$

- [ ] $dy = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

- [ ] $dy = \frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-x^2}-1} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\, dx$

- [x] $dy = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-y^2}-1} \cdot \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\, dx$

Найти дифференциал функции $y\left(x\right)$, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ в точке, соответствующей значению $t = \frac{\pi}{4}$.

- [ ] $dy\left(2\right) = 2dx$
- [x] $dy\left(2\right) = \frac{dx}{2}$
- [ ] $dy\left(2\right) = \cos^2 2\left(\sin 4 + \cos 4\right)dx$
- [ ] $dy\left(2\right) = \left(\sin 4 + \cos 4\right)dx$

Указать приближенное значение $\lg 11$, найденное с помощью дифференциала

- [ ] 1,042
- [x] 1,043
- [ ] 1,041
- [ ] 1,040

Указать приближенное значение $\sqrt[3]{9}$, найденное с помощью дифференциала

- ○ 2,08
- ○ 2,082
- ○ 2,081
- ● 2,083

Указать приближенное значение $\arcsin 0,49$, найденное с помощью дифференциала

- 0,535
- 0,512
- 0,51
- 0,53

?