

Показательные уравнения



Показательное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное содержится в **показателе** степени.

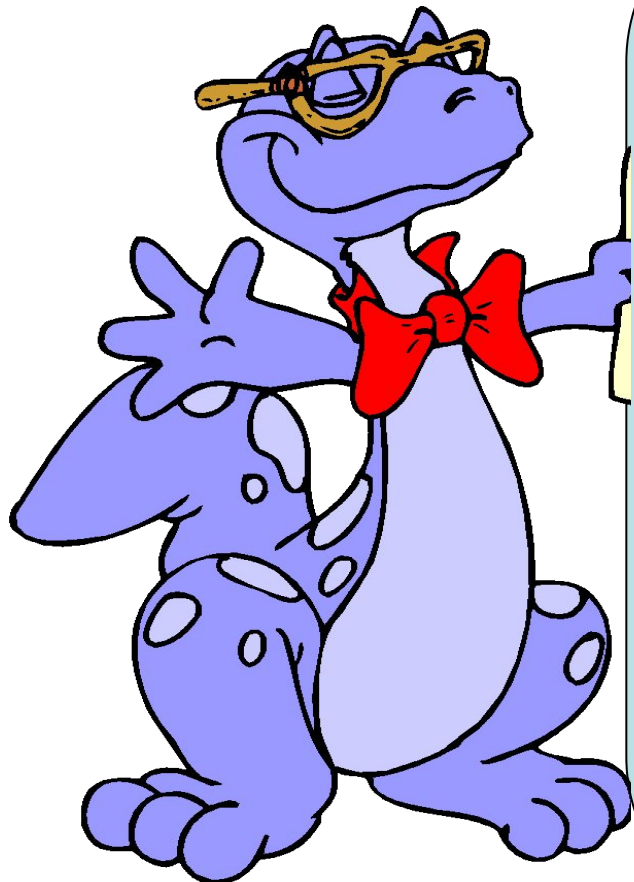
1. Показательное уравнение сводится к виду

$$a^x = a^b, a > 0, a \neq 1$$

Такое уравнение имеет **единственный** корень

$$x = b$$

Пример 1.



$$4^{x-1} = 4^2$$

$$x - 1 = 2$$

$$x = 3$$

2. Чтобы привести уравнение к виду (1) необходимо в левой части уравнения **вынести** за скобки **общий множитель**

$$a^{x+1} - a^{x-1} = b$$

$$a^{x-1} (a^2 - 1) = b$$

Пример 2.



$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$$

$$3^{x-2} (3^3 - 2) = 25$$

$$3^{x-2} \cdot 25 = 25$$

$$3^{x-2} = 1$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

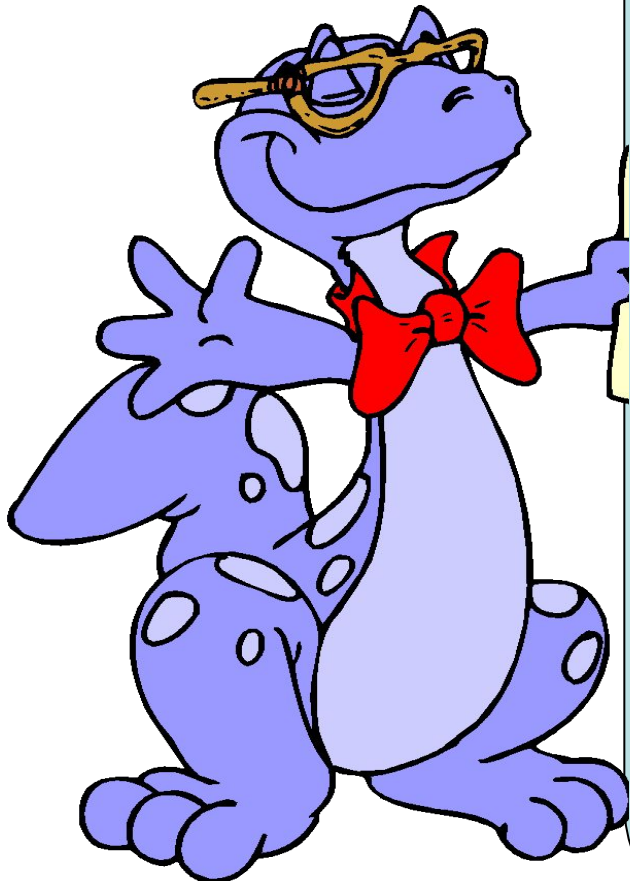
3. Можно **разделить обе части** уравнения на выражение, не равное нулю

$$a^x = b^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = 1$$

Пример 3.



$$3^x = 7^x$$

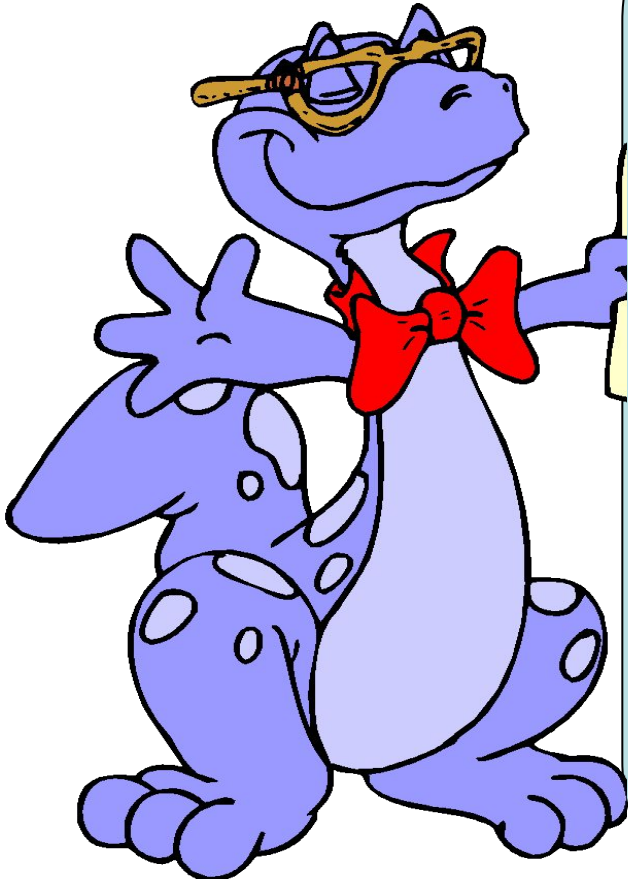
$$\frac{3^x}{7^x} = 1$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$$

$$x = 0$$

4. Некоторые показательные уравнения заменой $a^x = t$ сводятся к квадратным. Надо помнить, что $t > 0$, так как показательная функция не может принимать значения отрицательные и равные нулю.

Пример 4.



$$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$3^x = t, t > 0$$

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -5$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Алгоритм решения показательных уравнений

1. **Уравниваем основания** степеней во всех слагаемых, содержащих неизвестное в показателе степени.
2. а) Если **показатели** степеней **отличаются** только **постоянным слагаемым**, то выносим за скобки общий множитель.
б) Если **показатель** одной из степеней по модулю **в 2 раза больше показателя** другой, то вводим новую переменную.

Графическое решение уравнения сводится к построению графиков функций **левой** и **правой** частей уравнения, нахождению по рисунку примерного значения **абсциссы точки пересечения** графиков. Если возможно, с помощью проверки уточняется корень уравнения.

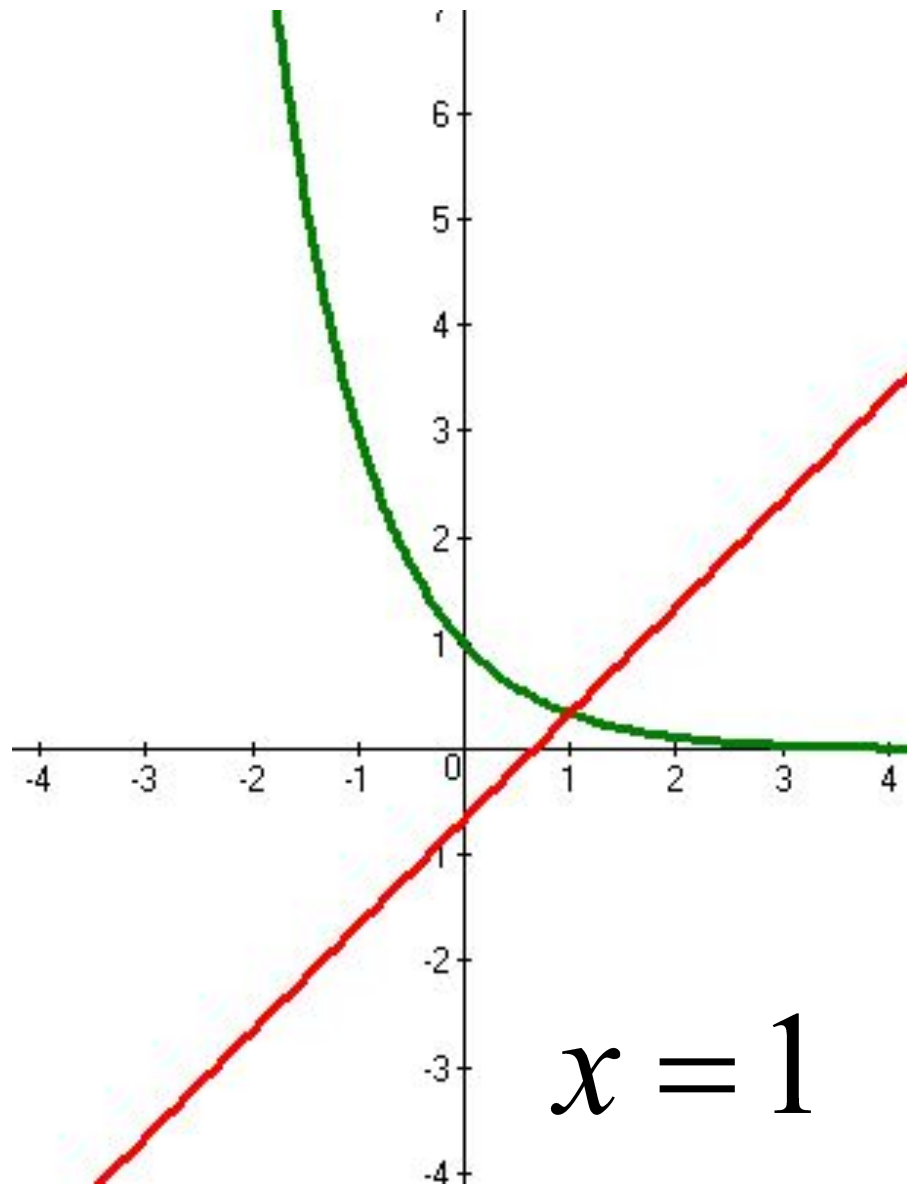
Пример 5.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$$

$$x \approx 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}; \quad 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



$$x = 1$$