

ВоГУ

Лекция 26 (8)

Магнитное поле

*Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент*

2017 г.

План

1. Магнитное поле и его характеристики: магнитная индукция и напряжённость поля
2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции
3. Применение закона Био-Савара-Лапласа для расчёта индукции магнитного поля
 - 3.1. Индукция поля прямого бесконечного проводника с током
 - 3.2. Индукция в центре кругового тока
 - 3.3. Индукция на оси кругового тока
 - 3.4. Поле соленоида
 - 3.5. Поле движущегося заряда
4. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Непотенциальность магнитного поля. Применение закона полного тока для расчёта поля прямого тока и длинного соленоида

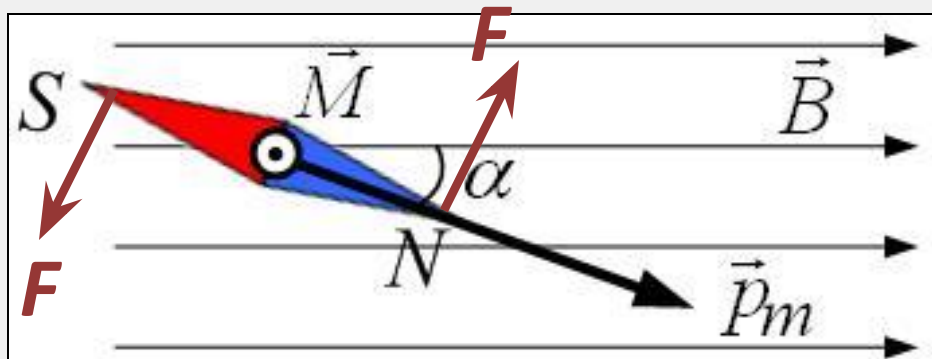
Магнитное поле. Индукция поля B

Магнитное поле создаётся токами

Взаимодействие токов происходит посредством магнитного поля

На токи, помещённые в магнитное поле, действует сила:

Магнитное поле поворачивает магнитную стрелку (компаса):



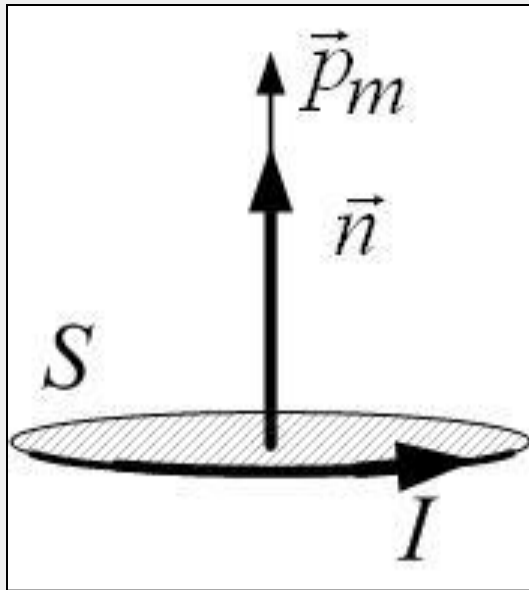
$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

$$M = p_m B \sin \alpha$$

B – силовая характеристика поля – магнитная индукция

p_m – магнитный момент стрелки (или контура с током)

Магнитный момент \vec{p}_m



$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$$

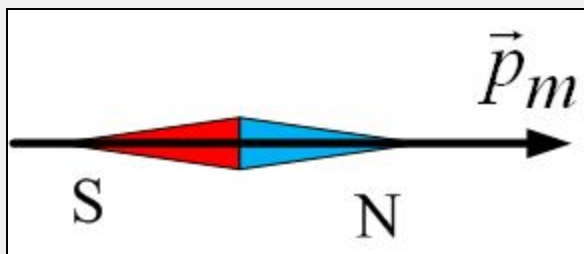
$$p_m = I \cdot S$$

или

(если в контуре N витков):

$$\vec{p}_m = N \cdot I \cdot S \cdot \vec{n}$$

$$p_m = N \cdot I \cdot S$$



Размерность:

$$[p_m] = [I] \cdot [S] = A \cdot m^2$$

Магнитный момент стрелки компаса
направлен от южного конца к северному

Индукция магнитного поля B

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$$

Величина магнитной индукции B в данной точке поля численно равна максимальному вращающему моменту силы, действующему на виток (или магнитную стрелку) с единичным магнитным моментом:

$$M = p_m B \sin \alpha$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

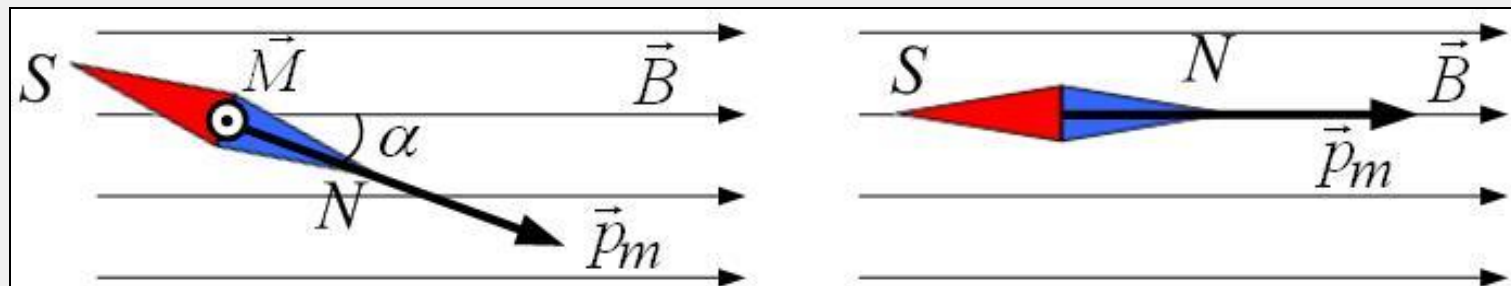
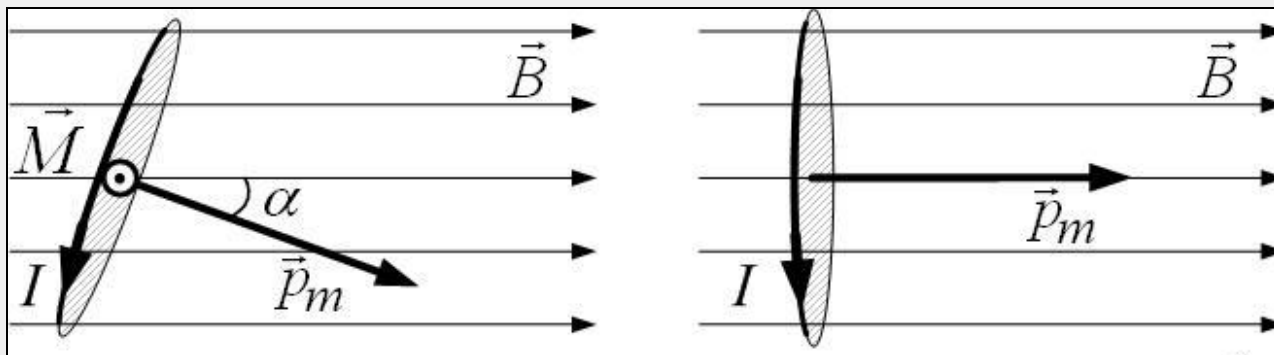
B – силовая векторная характеристика поля

$$[B] = \frac{[M]}{[p_m]} = \frac{[F \cdot l]}{[p_m]} = \frac{H \cdot m}{A \cdot m^2} = \frac{H}{A \cdot m} = Tл$$

Магнитный момент в магнитном поле ориентируется по полю:

$$M = p_m B \sin \alpha$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$



Напряжённость магнитного поля H

Ещё одна характеристика поля – напряжённость H

Напряжённость поля H описывает только поле макротоков (токов проводимости)

Напряжённость поля одинакова в вакууме и в веществе

Аналогия характеристик электростатического поля и магнитного полей:

Индукция

магнитного поля описывает суммарное поле токов проводимости и микротоков вещества

B аналогично E

Напряжённость электрического поля описывает суммарное поле свободных и связанных зарядов

Напряжённость магнитного поля описывает только поле **макротоков** (токов проводимости) и одинакова в вакууме и в веществе

H аналогично D

Вектор

электрического смещения описывает только поле **свободных зарядов** и одинаков в вакууме и в веществе

Связь между характеристиками полей:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \text{аналогично} \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

μ – магнитная
проницаемость
вещества

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная
постоянная

Физический смысл магнитной проницаемости μ :

Магнитная проницаемость μ показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе B больше, чем в

вакууме $B_0 = \mu_0 H$:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}$$

$$[\mu] = 1$$

**Задача электродинамики –
вычисление полей, созданных зарядами и
токами**

решается с помощью

□ **Закона Био-Савара-Лапласа**

и

□ **Принципа суперпозиции**

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

Индукция поля, созданного в данной точке несколькими токами, равна векторной сумме индукций полей, созданных в данной точке каждым током в отдельности

Принцип суперпозиции

(в случае непрерывных проводников)

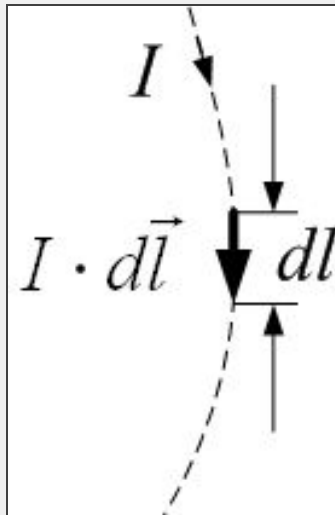
$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$

Индукция, созданная проводником с током, равна интегралу от элементарных индукций полей, созданных каждым элементом тока в отдельности

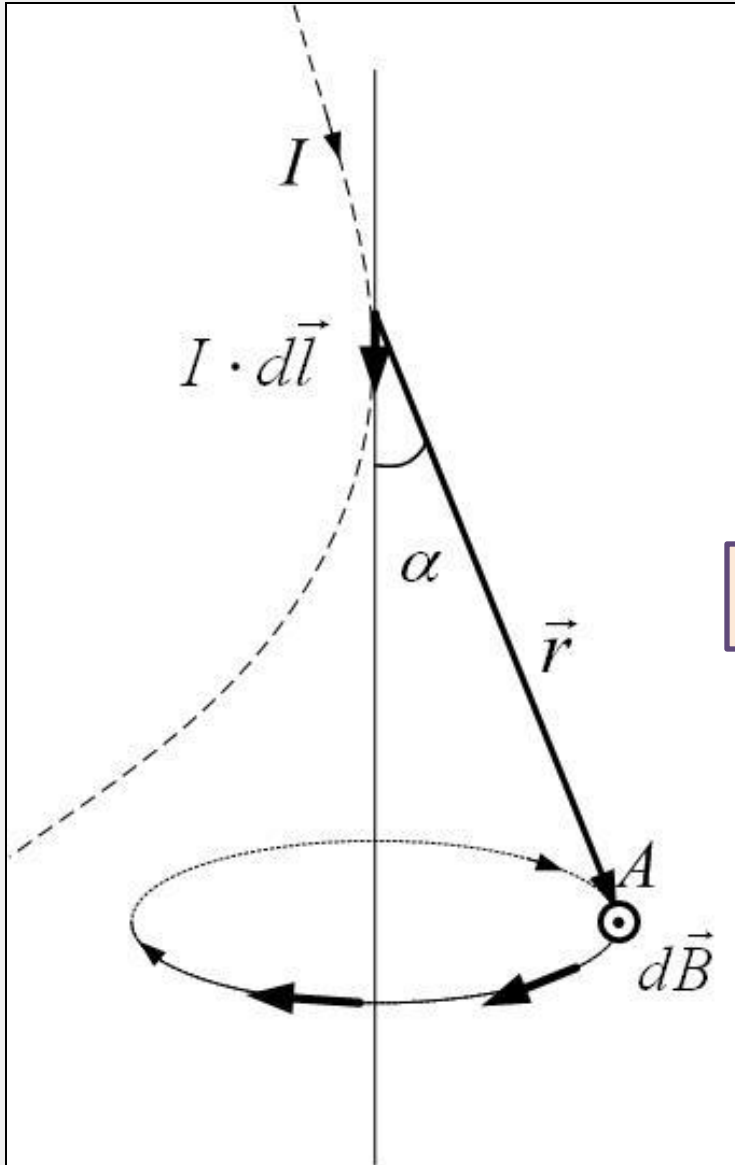
проводник непрерывный;
интеграл по всему проводнику

создано элементом тока

$$I \cdot dl$$



Элемент тока: $I \cdot dl$



$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

Вектор $d\vec{B}$ направлен по правилу буравчика

$$d\vec{B} \perp \vec{r}$$

$$d\vec{B} \perp I \cdot d\vec{l}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

Индукция поля прямого бесконечного проводника с током

$$B = \int_1^2 dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

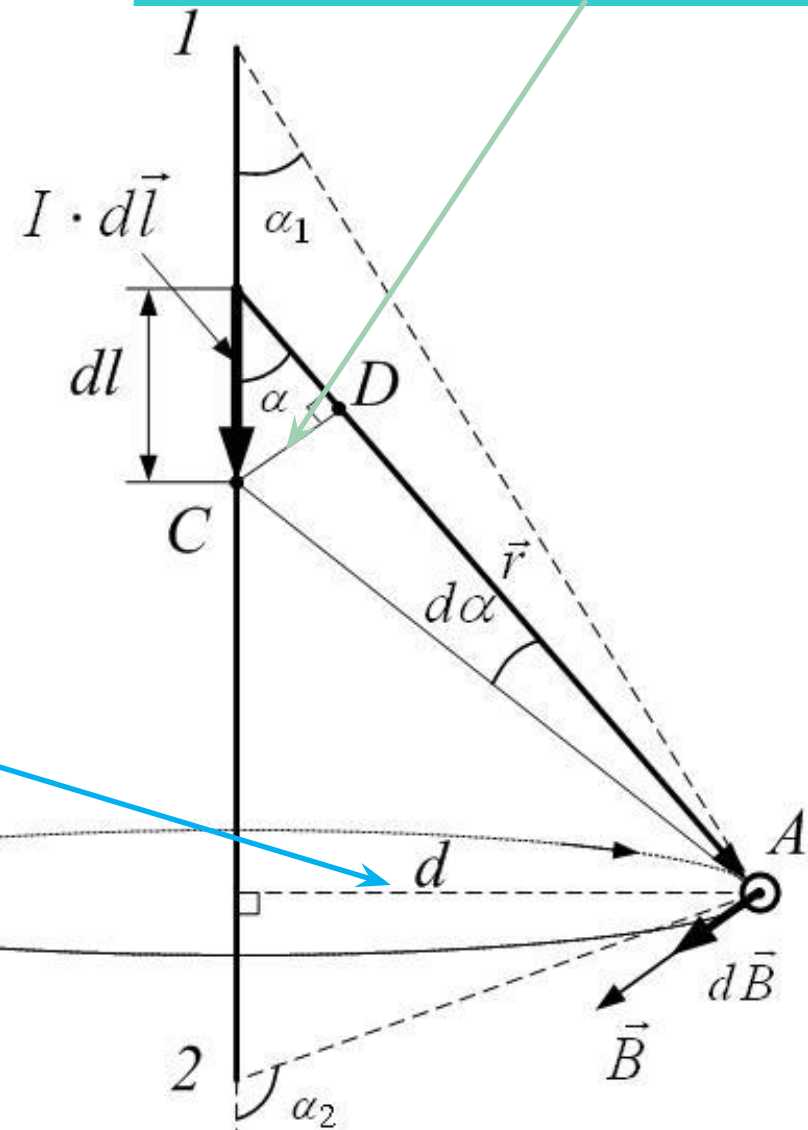
$$|CD| = dl \cdot \sin \alpha = r \cdot d\alpha$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot r \cdot d\alpha}{r^2} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\alpha}{r}$$

$$d = r \cdot \sin \alpha$$

$$r = \frac{d}{\sin \alpha}$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{d}$$



$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{d}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot (-\cos \alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

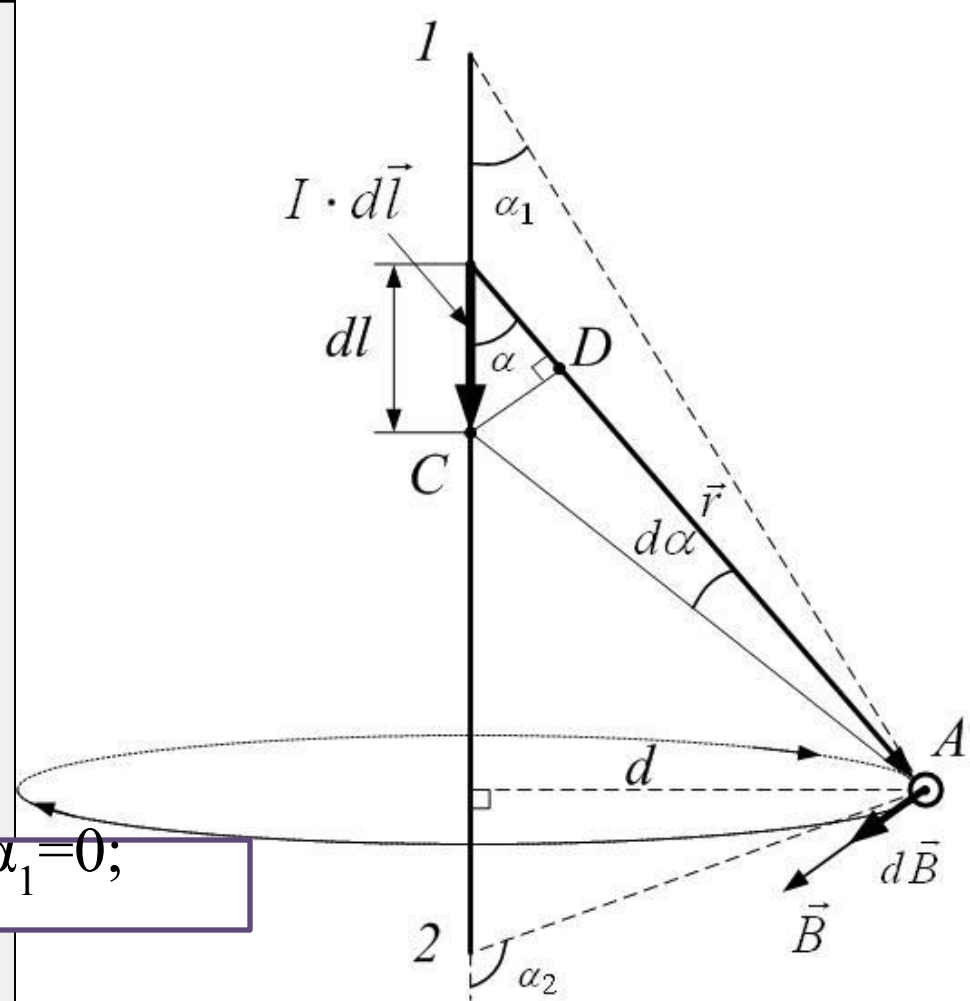
$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

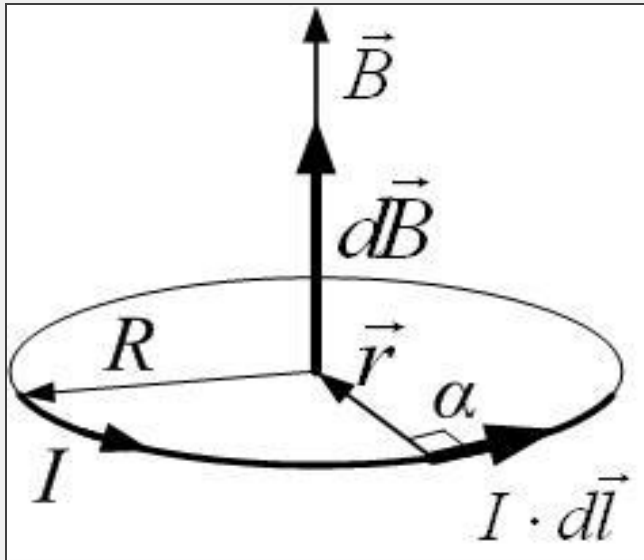
Если проводник бесконечен, $\alpha_1 = 0$;
 $\alpha_2 = \pi$



$$B_\infty = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (1 - (-1)) = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}$$



Индукция в центре кругового тока



$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^\circ}{R^2}$$

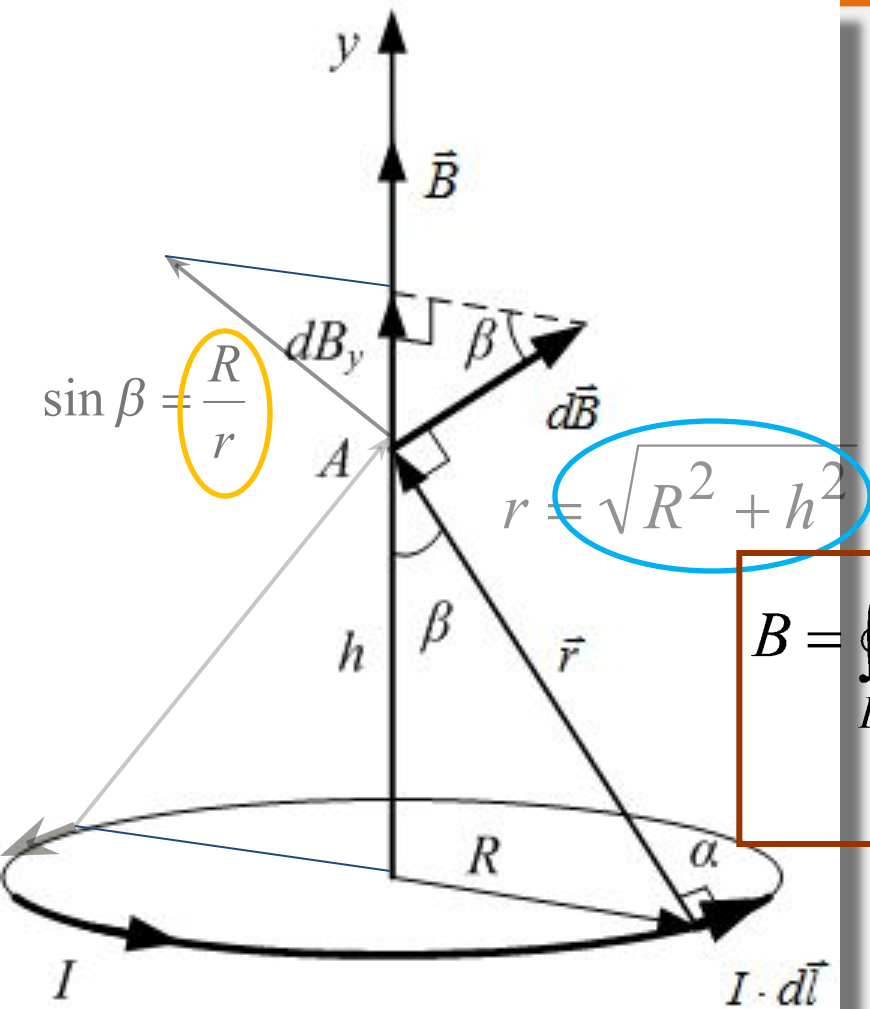
$$B = \oint_L dB$$

$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \oint_L dl$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2R}$$

Индукция на оси кругового тока

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$



$$B = B_y = \oint_L dB_y = \oint_L \sin \beta \cdot dB$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^\circ}{r^2}$$

$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \sin \beta = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \sin \beta \cdot \oint_L dl$$

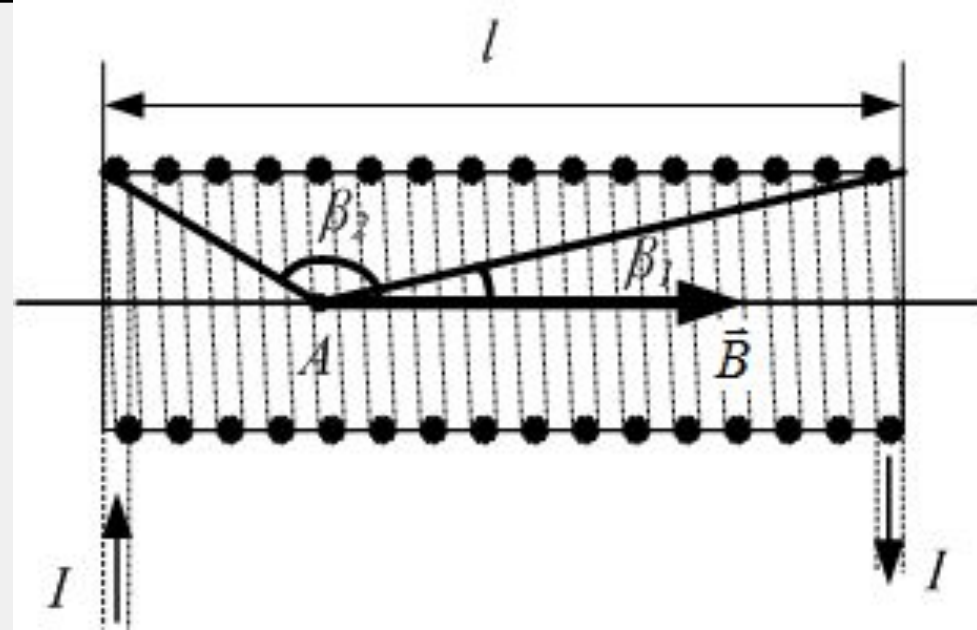
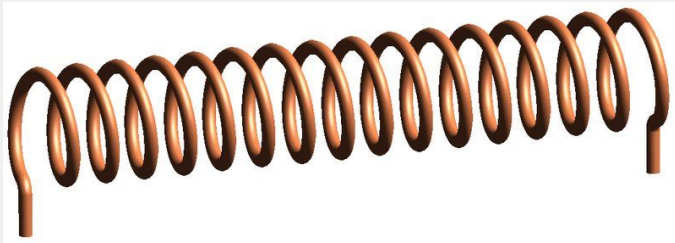
по окружности

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{R}{r} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot r^3}$$

$$B_{\text{на оси}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \sqrt{(R^2 + h^2)^3}}$$

$$B_{\text{на оси}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} \sin^3 \beta$$

Поле соленоида



$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

$$n = \frac{N}{l}$$

Для длинного
соленоида:

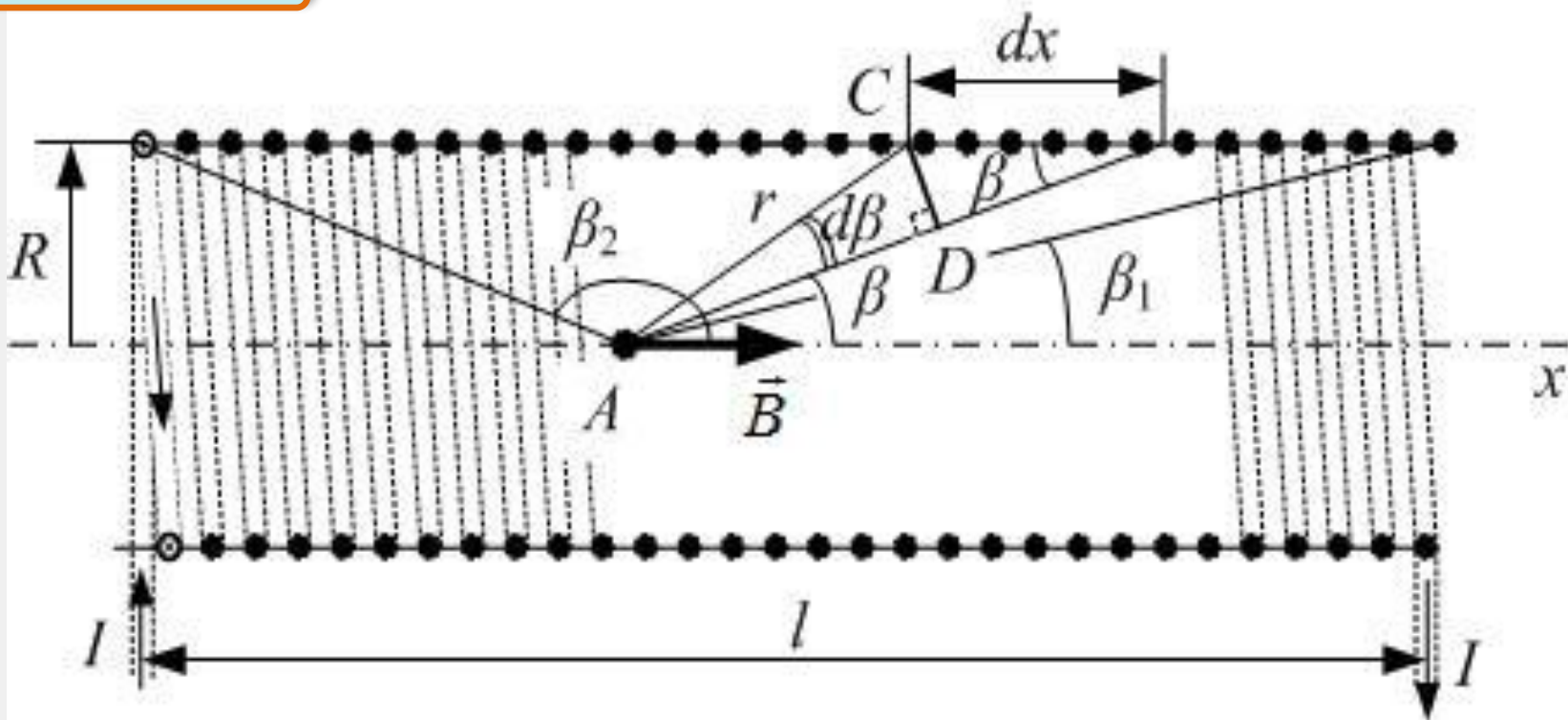
$$\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = \pi$$

$$B_{\infty \text{ солен.}} = \frac{\mu\mu_0 I n}{2} (1 - (-1))$$

\Rightarrow

$$B_{\infty \text{ солен.}} = \mu\mu_0 I n$$

Поле соленоида

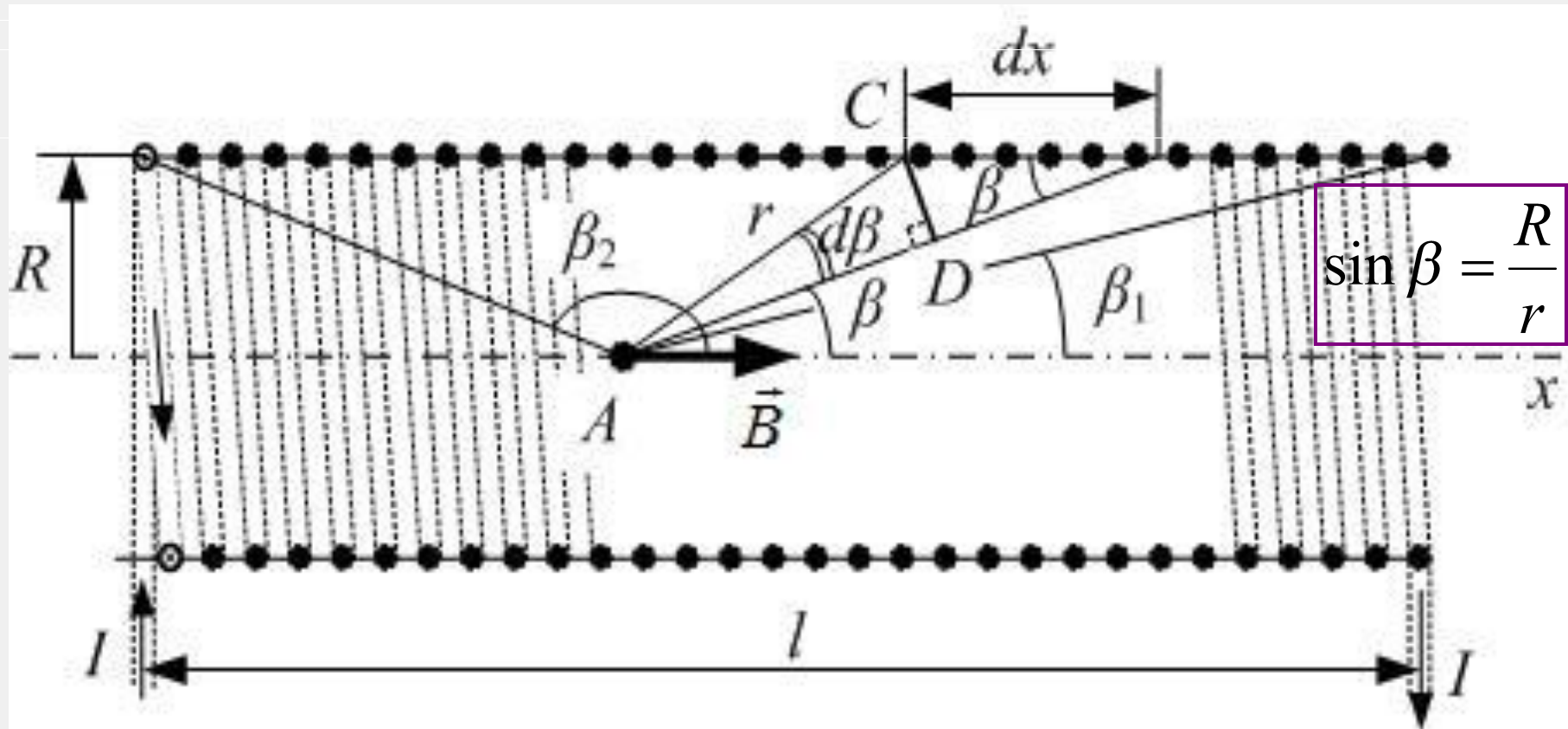


$dN = (n \cdot dx)$ - число витков на длине dx

$dI = I \cdot dN = I \cdot n \cdot dx$ - суммарный ток этих витков

$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot dx}{2 \cdot R} \sin^3 \beta$ - индукция поля, созданного током этих
ВИТКОВ

Поле соленоида



$$\sin \beta = \frac{R}{r}$$

$$|CD| = dx \cdot \sin \beta = r \cdot d\beta$$

\Rightarrow

$$dx = \frac{r \cdot d\beta}{\sin \beta}$$

Поле соленоида

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot dx}{2 \cdot R} \sin^3 \beta$$

$$dx = \frac{r \cdot d\beta}{\sin \beta}$$

\Rightarrow

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot r \cdot \sin^2 \beta \cdot d\beta}{2 \cdot R}$$

$$\sin \beta = \frac{R}{r}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \sin \beta \cdot d\beta}{2}$$

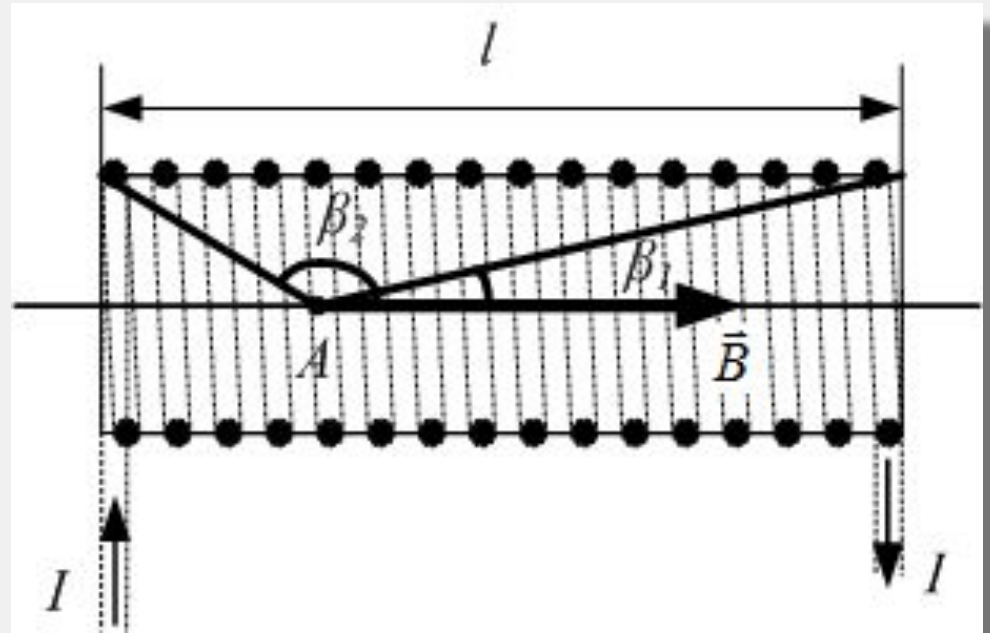
$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dB = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \sin \beta \cdot d\beta}{2}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \cdot d\beta$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (-\cos \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$

Поле соленоида

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (-\cos \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$



$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

Поле движущегося заряда

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

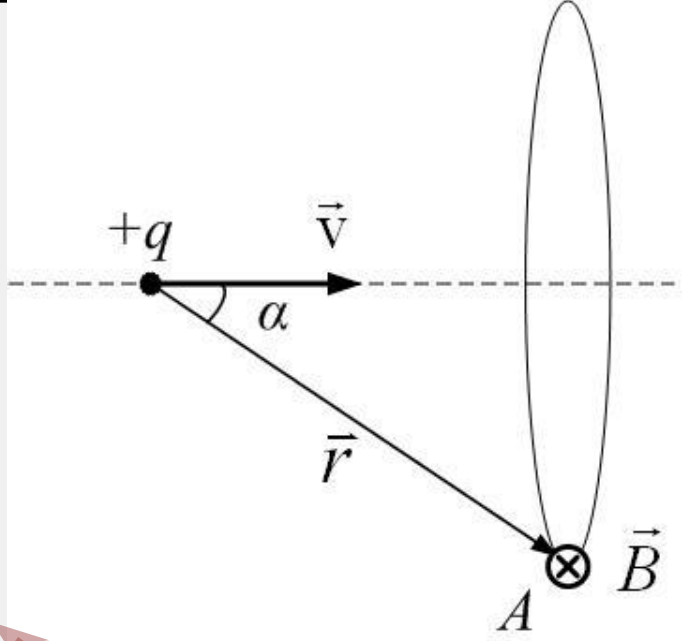
Замена:

$$I \cdot d\vec{l} \rightarrow q \cdot \vec{v}$$

$$d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot v \cdot \sin \alpha}{r^2}$$



$[I \cdot dl] = A \cdot m$
 $[q \cdot v] = K_{\text{Л}} \cdot \frac{m}{c} = \frac{K_{\text{Л}}}{c} \cdot m = A \cdot m$

$$j = \frac{I}{S}$$

$$j = q \cdot n \cdot v$$

$$dV = S \cdot dl$$

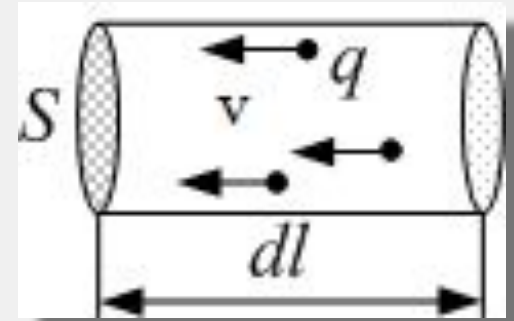
$$dN = n \cdot dV$$

$$I \cdot dl = jS \cdot dl$$

$$I \cdot dl = q \cdot n \cdot v \cdot S \cdot dl$$

$$I \cdot dl = q \cdot v \cdot n \cdot dV$$

$$I \cdot dl = q \cdot v \cdot dN$$



$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl \times r]}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot dN [v \times r]}{r^3}$$

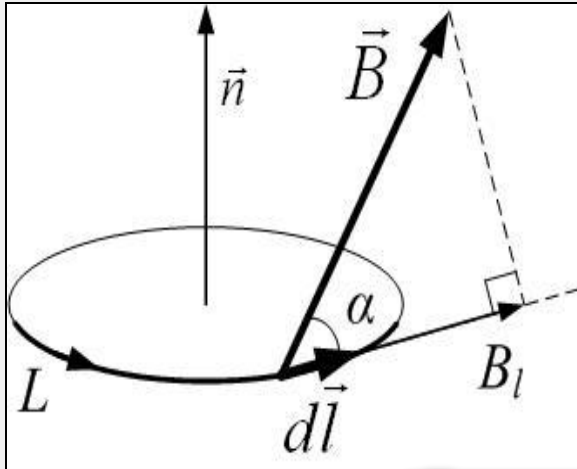
$$B_q = \frac{dB}{dN}$$

$$B_q = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q [v \times r]}{r^3}$$

Закон полного тока (теорема о циркуляции)

для магнитного поля в вакууме

Циркуляция
вектора:



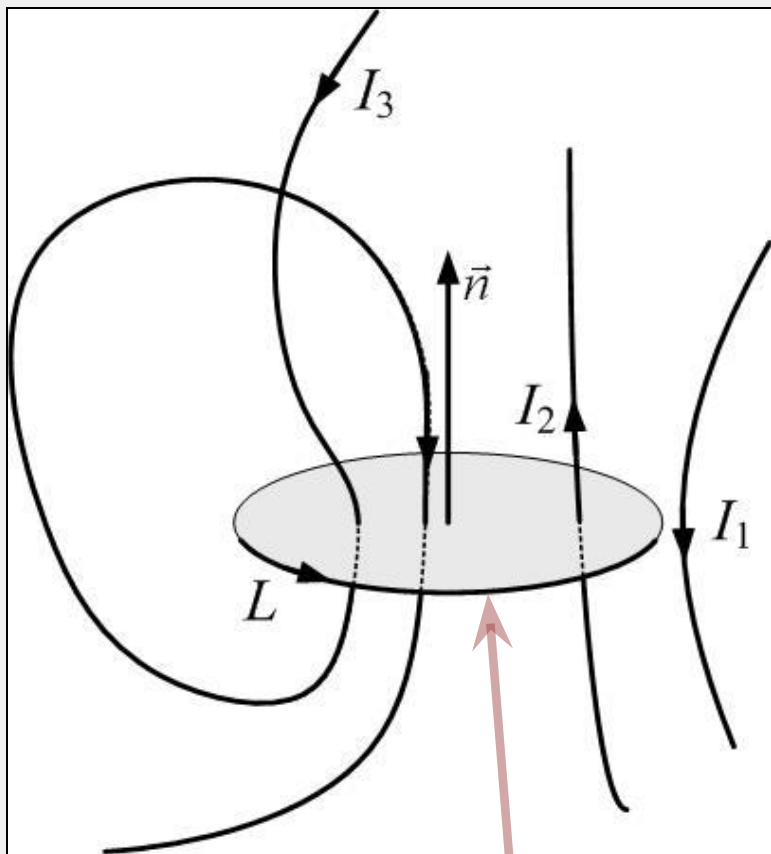
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B \cos \alpha \cdot dl = \oint_L B_l \cdot dl$$

Теорема о
циркуляции:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Циркуляция вектора магнитной индукции для поля в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на магнитную постоянную

Пример применения теоремы о циркуляции (закона полного тока)



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

⇓

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - 2I_3)$$

Теорема о циркуляции, если заданы не токи, а плотность тока:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

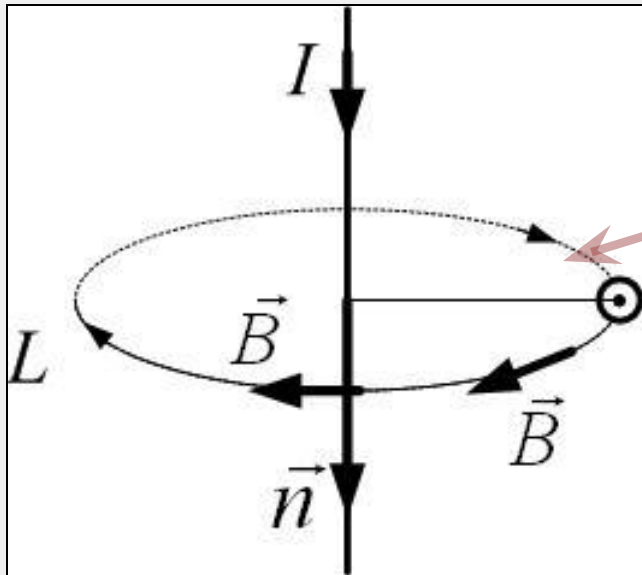
Интеграл берётся по поверхности, натянутой на контур

Применение закона полного

тока

Поле прямого бесконечного
провода

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



В любой точке контура вектор \vec{B} одинаков и направлен по касательной к нему

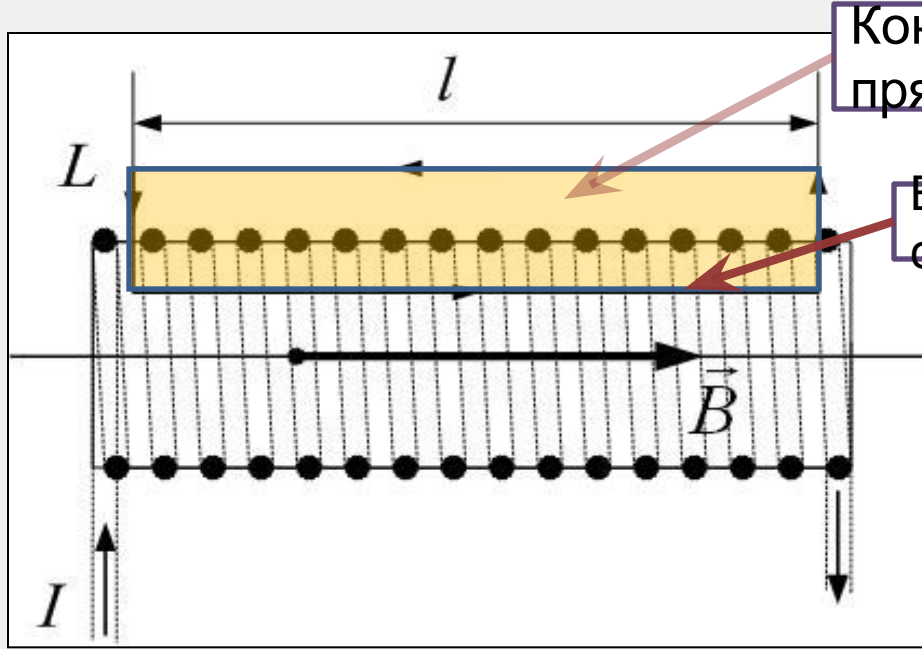
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \cdot \int_L dl = B \cdot 2\pi R$$

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R}$$

Поле длинного (бесконечного) соленоида

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



Контур – узкий длинный прямоугольник

В интеграл даёт вклад только эта сторона

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \cdot \int_L dl = B \cdot l$$

Ток I пронизывает контур N раз:

$$\sum_i I_i = I \cdot N$$

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I \cdot N$$

\Downarrow

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{l} = \mu_0 \cdot I \cdot n$$

Непотенциальность магнитного поля

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

\Rightarrow

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} \neq 0$$

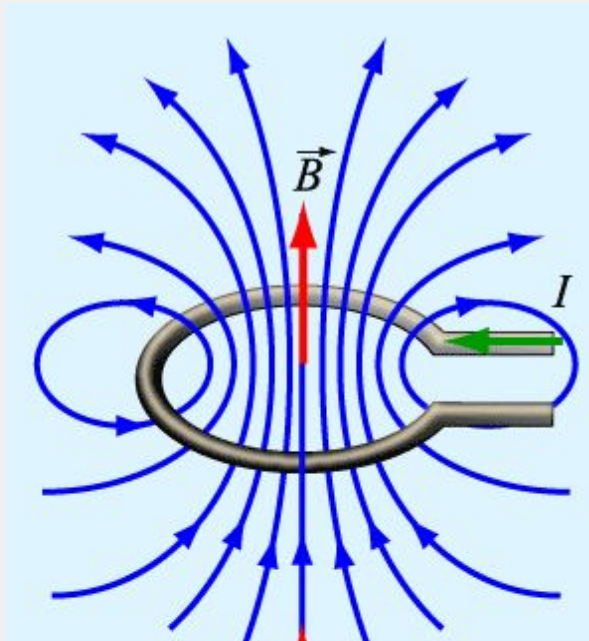
Магнитное поле непотенциально

Магнитное поле носит вихревой характер

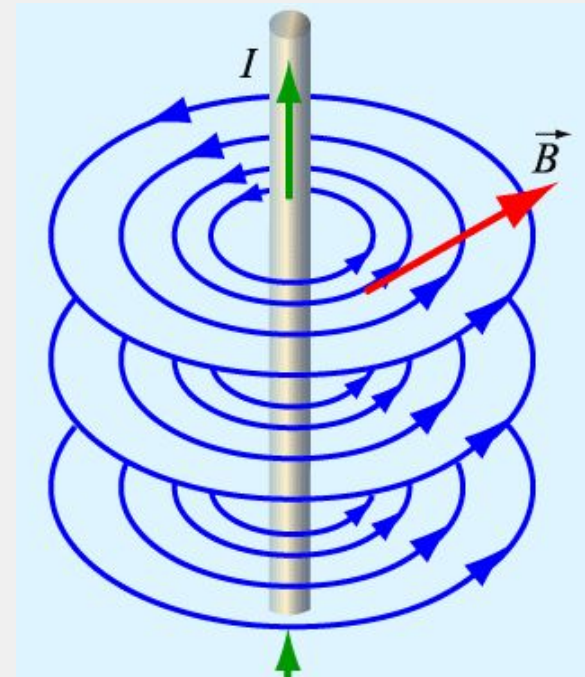
Линии магнитной индукции замкнуты

Непотенциальность магнитного поля

Линии магнитной индукции замкнуты



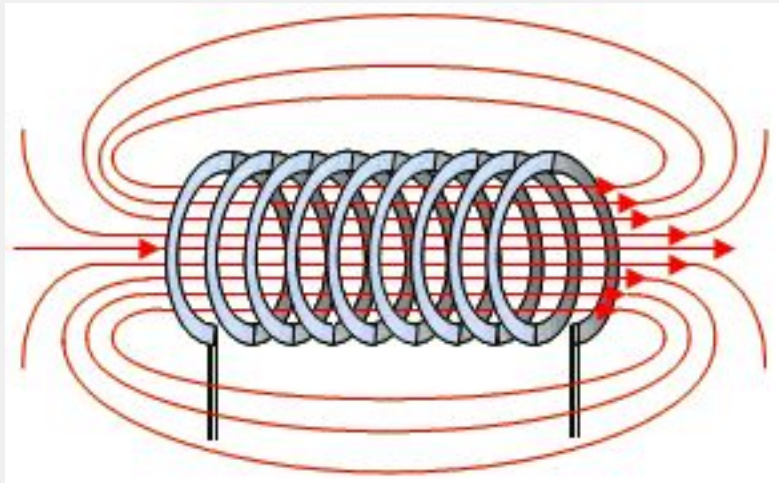
Поле кругового тока



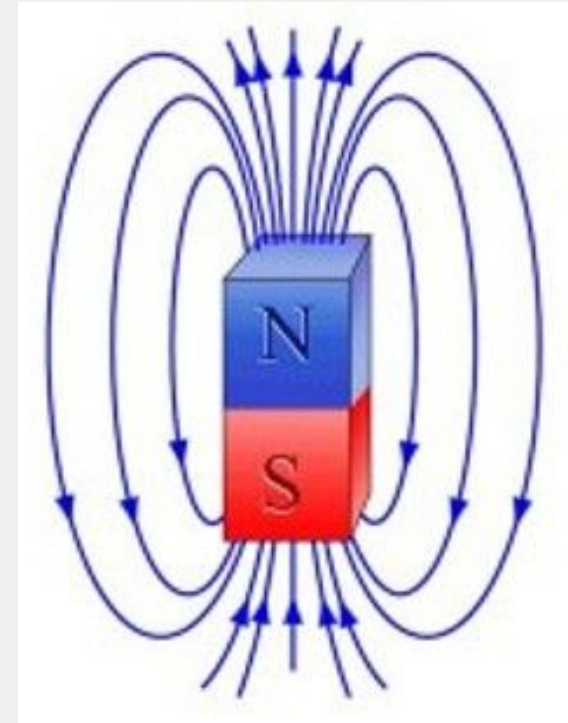
Поле прямого провода

Непотенциальность магнитного поля

Линии магнитной индукции замкнуты



Поле соленоида



Поле полосового магнита