ВоГУ

Лекция 26 (8)

Магнитное поле

Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент

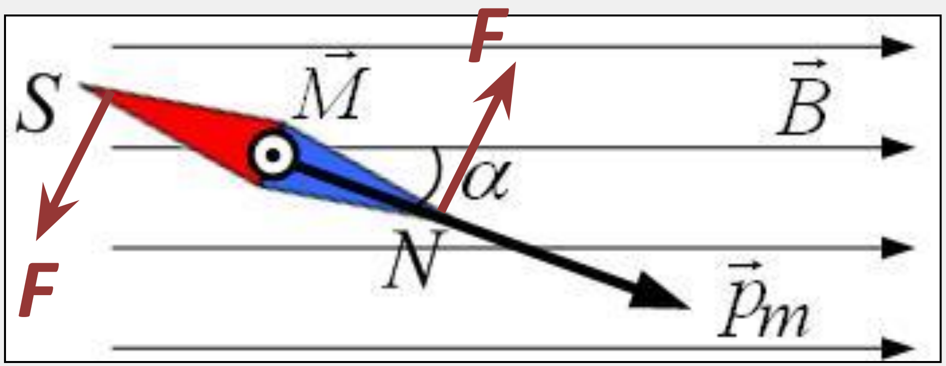
2017 г.

План

1. Магнитное поле и его характеристики: магнитная индукция и напряжённость поля
2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции
3. Применение закона Био-Савара-Лапласа для расчёта индукции магнитного поля
   3.1. Индукция поля прямого бесконечного проводника с током
   3.2. Индукция в центре кругового тока
   3.3. Индукция на оси кругового тока
   3.4. Поле соленоида
   3. 5. Поле движущегося заряда
4. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Непотенциальность магнитного поля. Применение закона полного тока для расчёта поля прямого тока и длинного соленоида

Магнитное поле. Индукция поля *B*

Магнитное поле создаётся токами
Взаимодействие токов происходит посредством магнитного поля
<u>На токи, помещённые в магнитное поле, действует сила:</u>
<u>Магнитное поле поворачивает магнитную стрелку</u> (компаса):



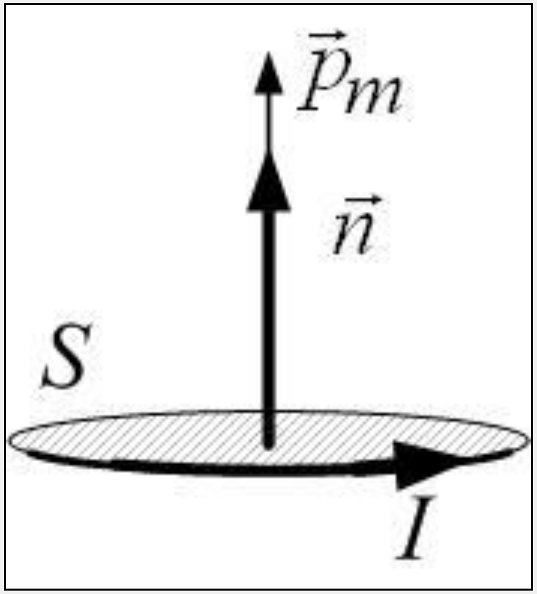
$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right]$$

$$M = p_m B \sin\alpha$$

$\vec{B}$ **<u>– силовая характеристика поля – магнитная индукция</u>**

$\vec{p}_m$ **– магнитный момент стрелки (или контура с током)**

Магнитный момент $\vec{p}_m$



$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$$

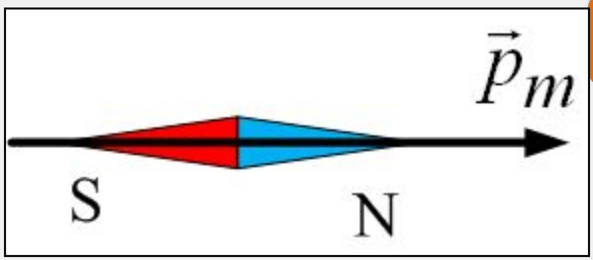
$$p_m = I \cdot S$$

или

(если в контуре N витков):

$$\vec{p}_m = N \cdot I \cdot S \cdot \vec{n}$$

$$p_m = N \cdot I \cdot S$$



Размерность: $[p_m] = [I] \cdot [S] = A \cdot м^2$

Магнитный момент стрелки компаса направлен от южного конца к северному

Индукция магнитного поля *B*

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$$

Величина магнитной индукции $\vec{B}$ в данной точке поля численно равна максимальному вращающему моменту силы, действующему на виток (или магнитную стрелку) с единичным магнитным моментом:

$$M = p_m B \sin\alpha$$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right]$$

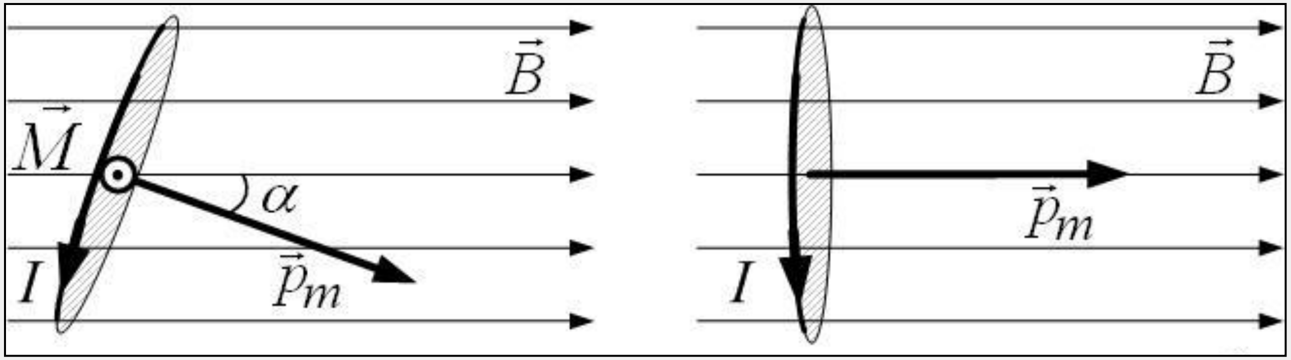
B **– силовая векторная характеристика поля**

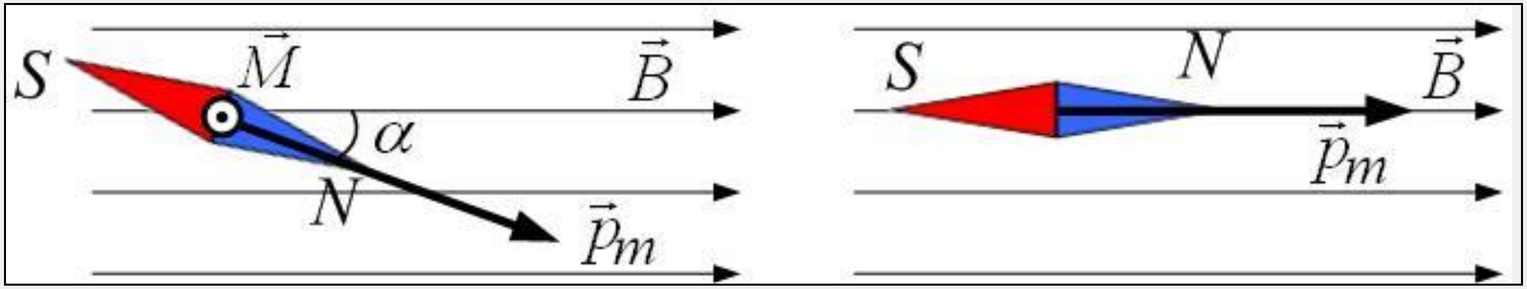
$$[B] = \frac{[M]}{[p_m]} = \frac{[F \cdot l]}{[p_m]} = \frac{Н \cdot м}{А \cdot м^2} = \frac{Н}{А \cdot м} = Тл$$

Магнитный момент в магнитном поле ориентируется по полю:

$$M = p_m B \sin\alpha$$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right]$$





Напряжённость магнитного поля $\vec{H}$

Ещё одна характеристика поля – <u>напряжённость поля $\vec{H}$</u>

<u>**Напряжённость поля *H* описывает только поле макротоков (токов проводимости)**</u>
Напряжённость поля одинакова в вакууме и в веществе

Аналогия характеристик электростатического поля и магнитного полей:

Индукция магнитного поля описывает суммарное поле токов проводимости и микротоков вещества

$\vec{B}$ **аналогично** $\vec{E}$

Напряжённость электрического поля описывает суммарное поле свободных и связанных зарядов

Напряжённость магнитного поля описывает только поле макротоков (токов проводимости) и одинакова в вакууме и в веществе

$\vec{H}$ **аналогично** $\vec{D}$

Вектор электрического смещения описывает только поле свободных зарядов и одинаков в вакууме и в веществе

Связь между характеристиками полей:

$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$ **аналогично** $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$ **– магнитная постоянная**

μ **– <u>магнитная проницаемость вещества</u>**

Физический смысл магнитной проницаемости μ:

Магнитная проницаемость μ показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе *B* больше, чем в вакууме $B_0 = \mu_0 H$:

$$\boxed{\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}}$$

$$\boxed{[\mu] = 1}$$

<u>Задача электродинамики</u> –
вычисление полей, созданных зарядами и токами

решается с помощью

- **Закона Био-Савара-Лапласа**

и

- **принципа суперпозиции:**

$$\boxed{\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i}$$

Индукция поля, созданного в данной точке несколькими токами, равна векторной сумме индукций полей, созданных в данной точке каждым током в отдельности

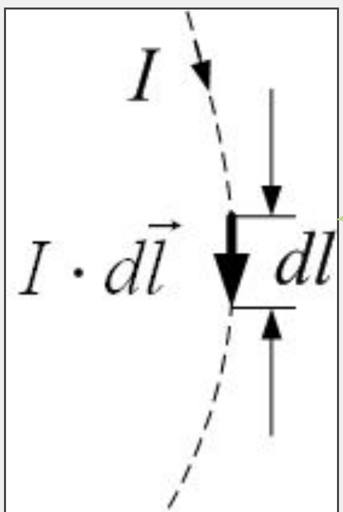
Принцип суперпозиции
(в случае непрерывных проводников)

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$

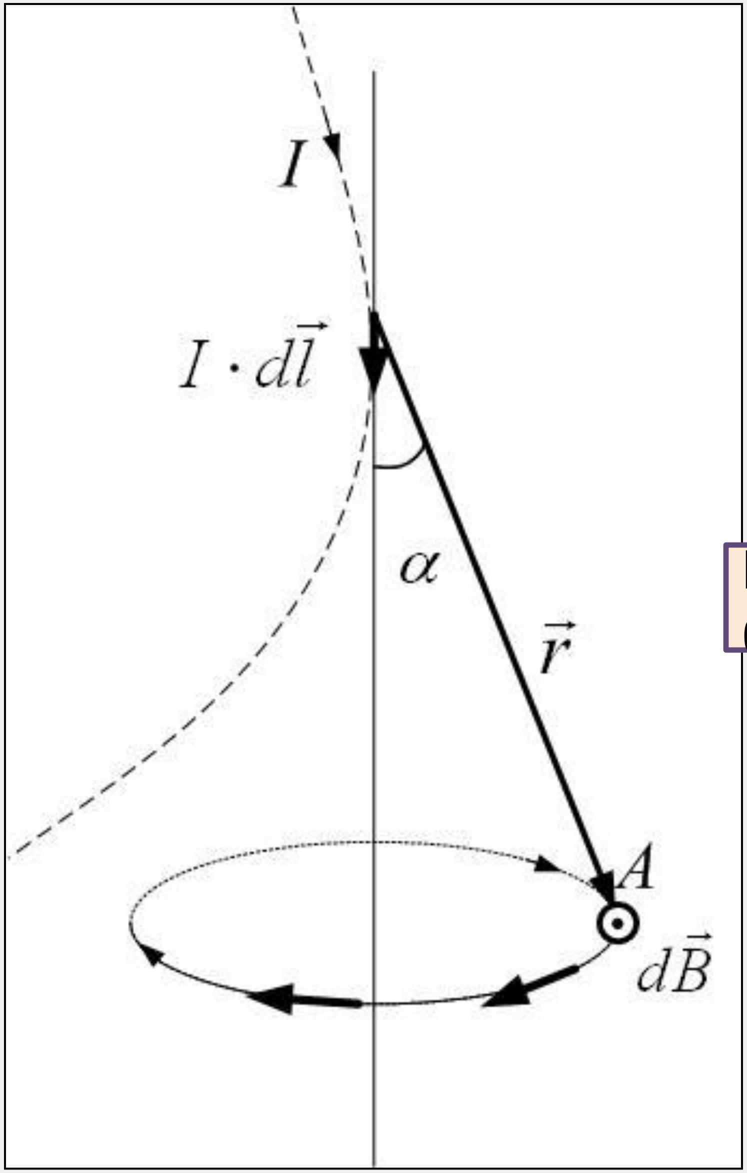
Индукция, созданная проводником с током, равна интегралу от элементарных индукций полей, созданных каждым элементом тока в отдельности

проводник непрерывный;
интеграл по всему проводнику

создано элементом тока
$\boldsymbol{I \cdot dl}$



Элемент тока : $I \cdot d\vec{l}$



Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]}{r^3}$$

Вектор ***dB*** направлен по правилу буравчика

$$d\vec{B} \perp \vec{r}$$

$$d\vec{B} \perp I \cdot d\vec{l}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

Индукция поля прямого бесконечного проводника с током

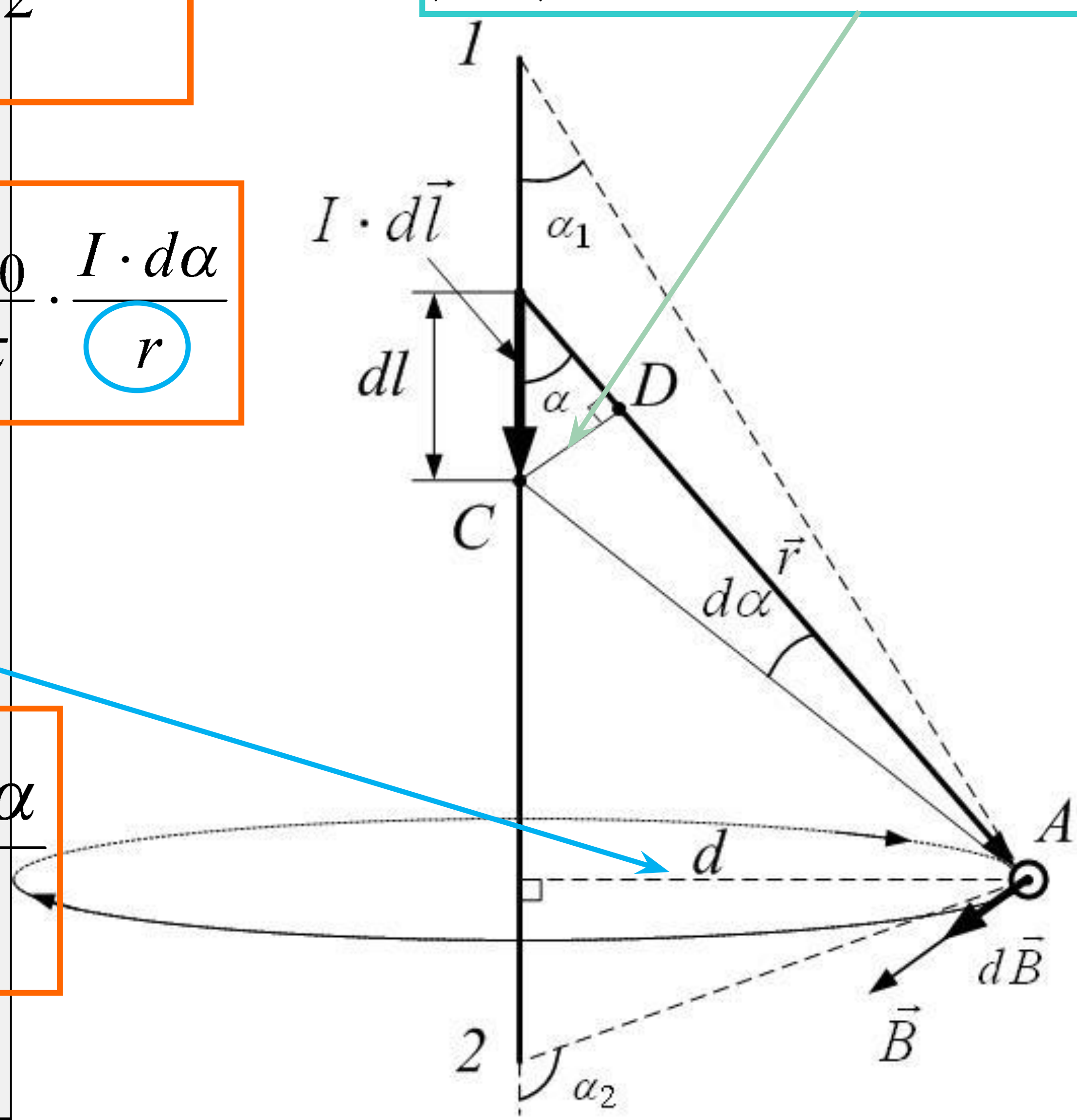
$$B=\int_1^2 dB=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl\cdot\sin\alpha}{r^2}$$

$$|CD|=dl\cdot\sin\alpha=r\cdot d\alpha$$

$$B=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot r\cdot d\alpha}{r^2}=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot d\alpha}{r}$$

$$\boxed{d=r\cdot\sin\alpha}\qquad\boxed{r=\frac{d}{\sin\alpha}}$$

$$B=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot\sin\alpha\cdot d\alpha}{d}$$



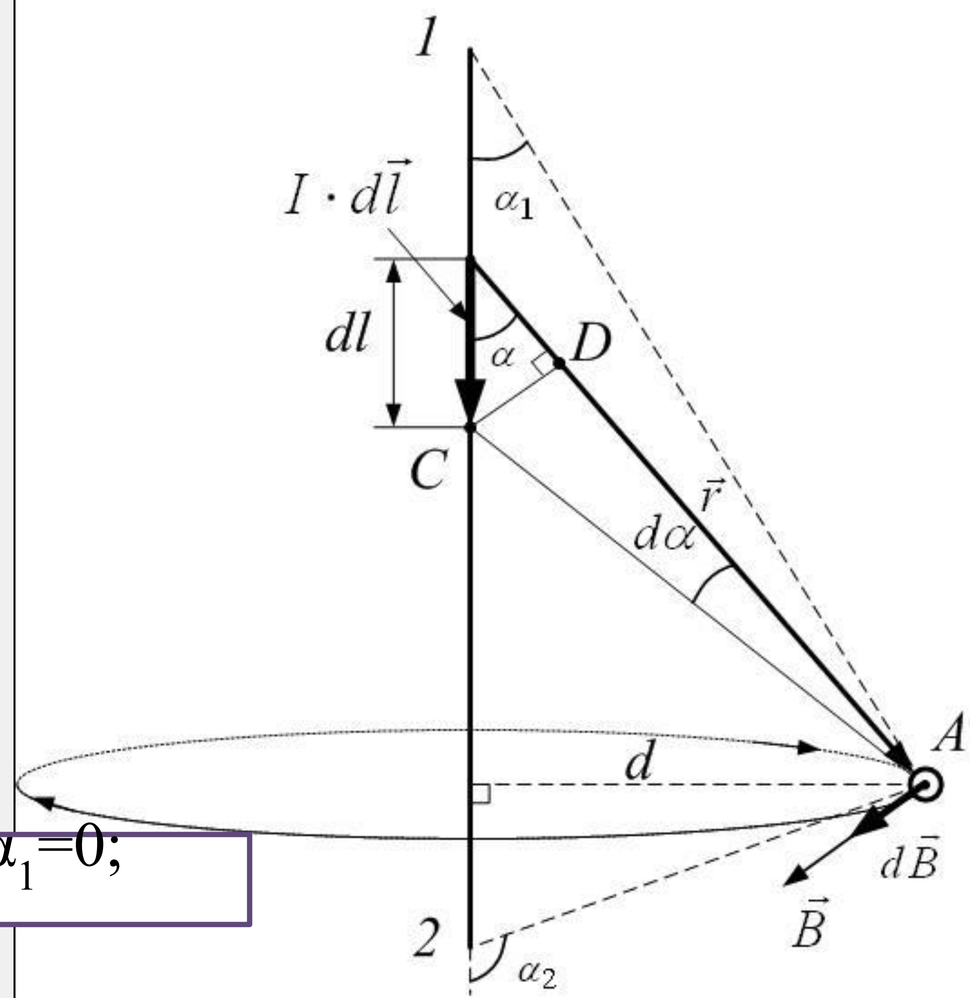
$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha}{d}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot \left(-\cos\alpha\right)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

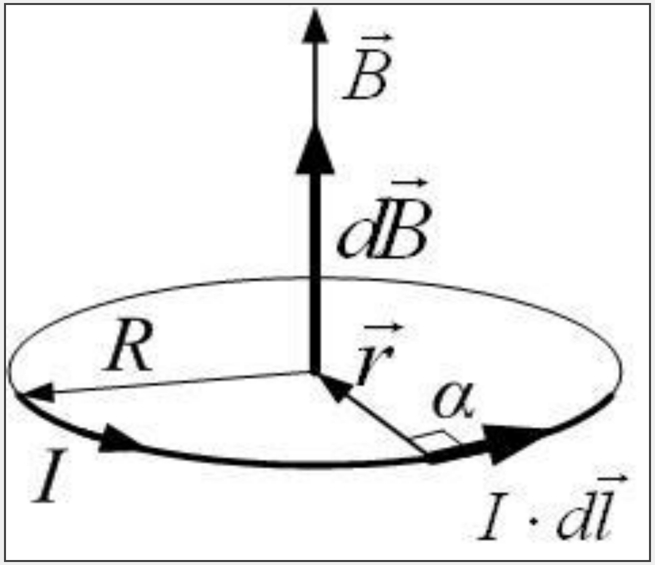


Если проводник бесконечен, $\alpha_1=0$; $\alpha_2=\pi$

$$\Downarrow$$

$$B_\infty = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d}\left(\cos 0 - \cos\pi\right) = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d}\left(1-(-1)\right) = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}$$

Индукция в центре кругового тока



$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^0}{R^2}$$

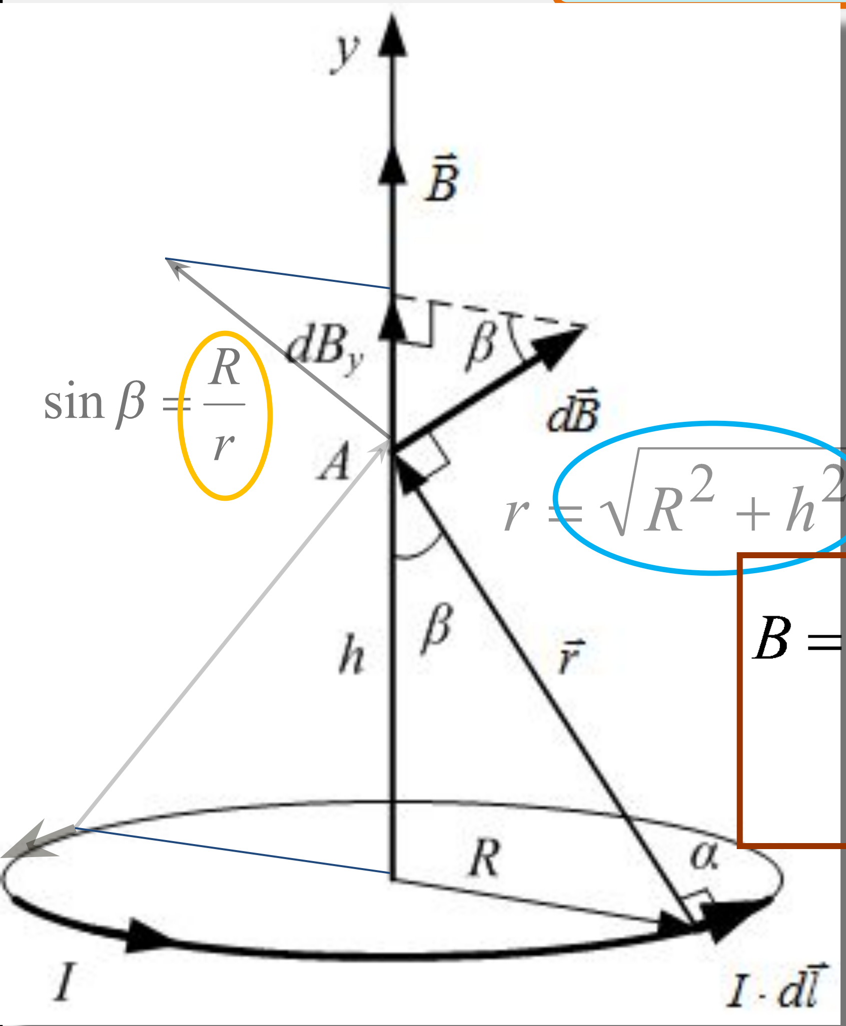
$$B = \oint_L dB$$

$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \oint_L dl$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2R}$$

Индукция на оси кругового тока

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$



$$B = B_y = \oint_L dB_y = \oint_L \sin\beta \cdot dB$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^0}{r^2}$$

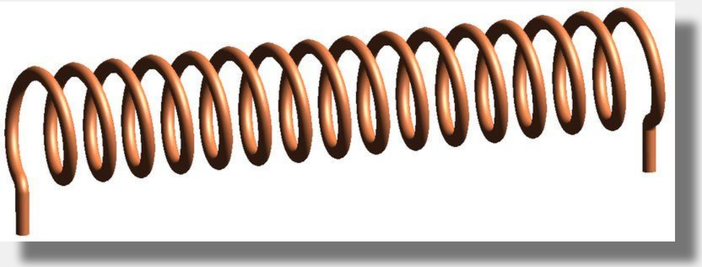
$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \sin\beta = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \sin\beta \cdot \oint_{\substack{\text{по}\\\text{окруж–}\\\text{ности}}} dl$$

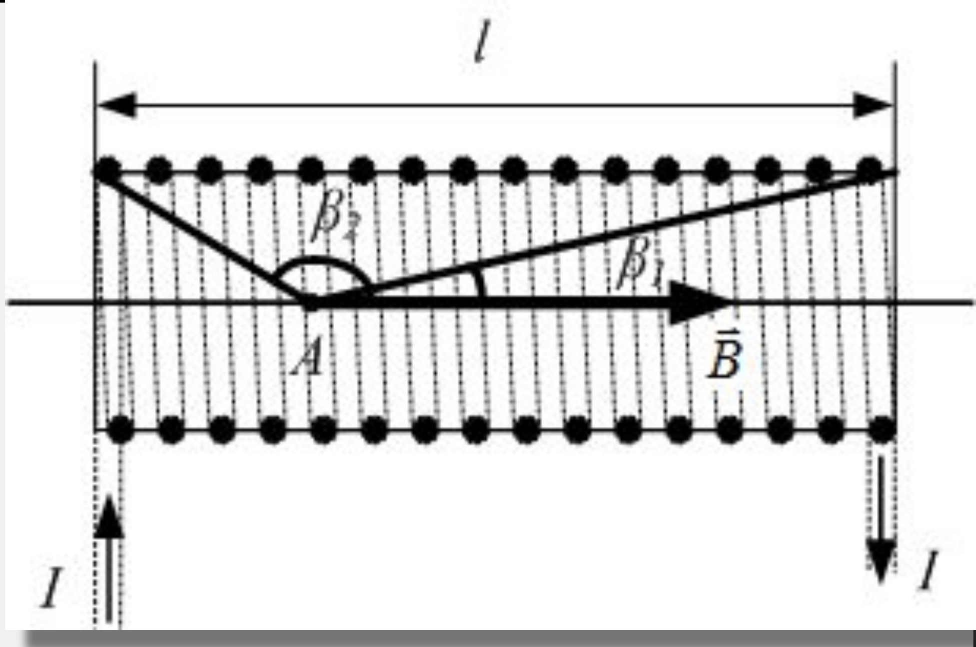
$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{R}{r} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot r^3}$$

$$B_{\substack{\text{на}\\\text{оси}}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \sqrt{\left(R^2 + h^2\right)^3}}$$

$$B_{\substack{\text{на}\\\text{оси}}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} \sin^3\beta$$

Поле соленоида





$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right)$$

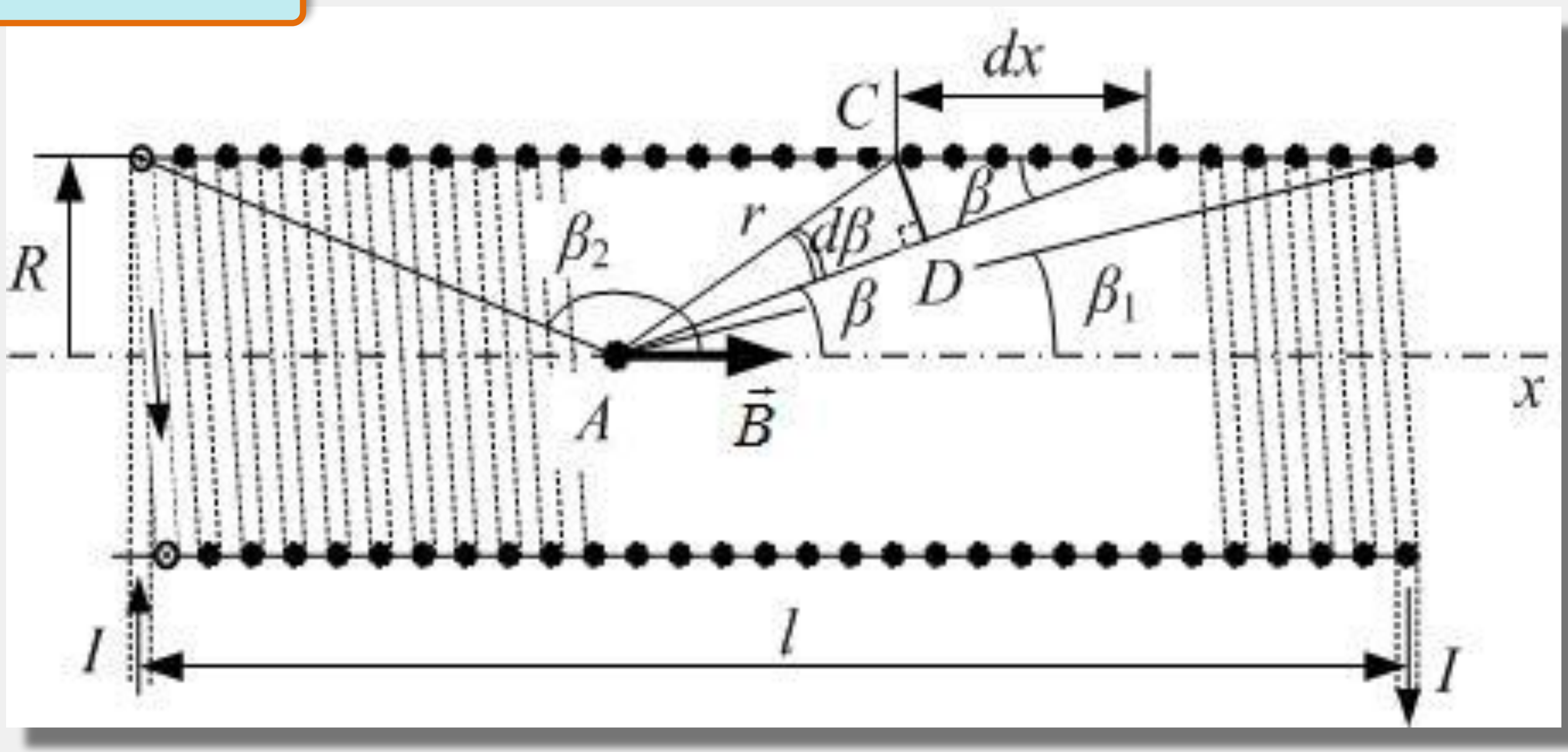
$$n = \frac{N}{l}$$

Для длинного соленоида:

$\beta_1 = 0 \qquad \beta_2 = \pi$

$$B_{\substack{\infty\\ \text{солен.}}} = \frac{\mu\mu_0 I n}{2}\left(1 - (-1)\right) \Longrightarrow B_{\substack{\infty\\ \text{солен.}}} = \mu\mu_0 I n$$

Поле соленоида

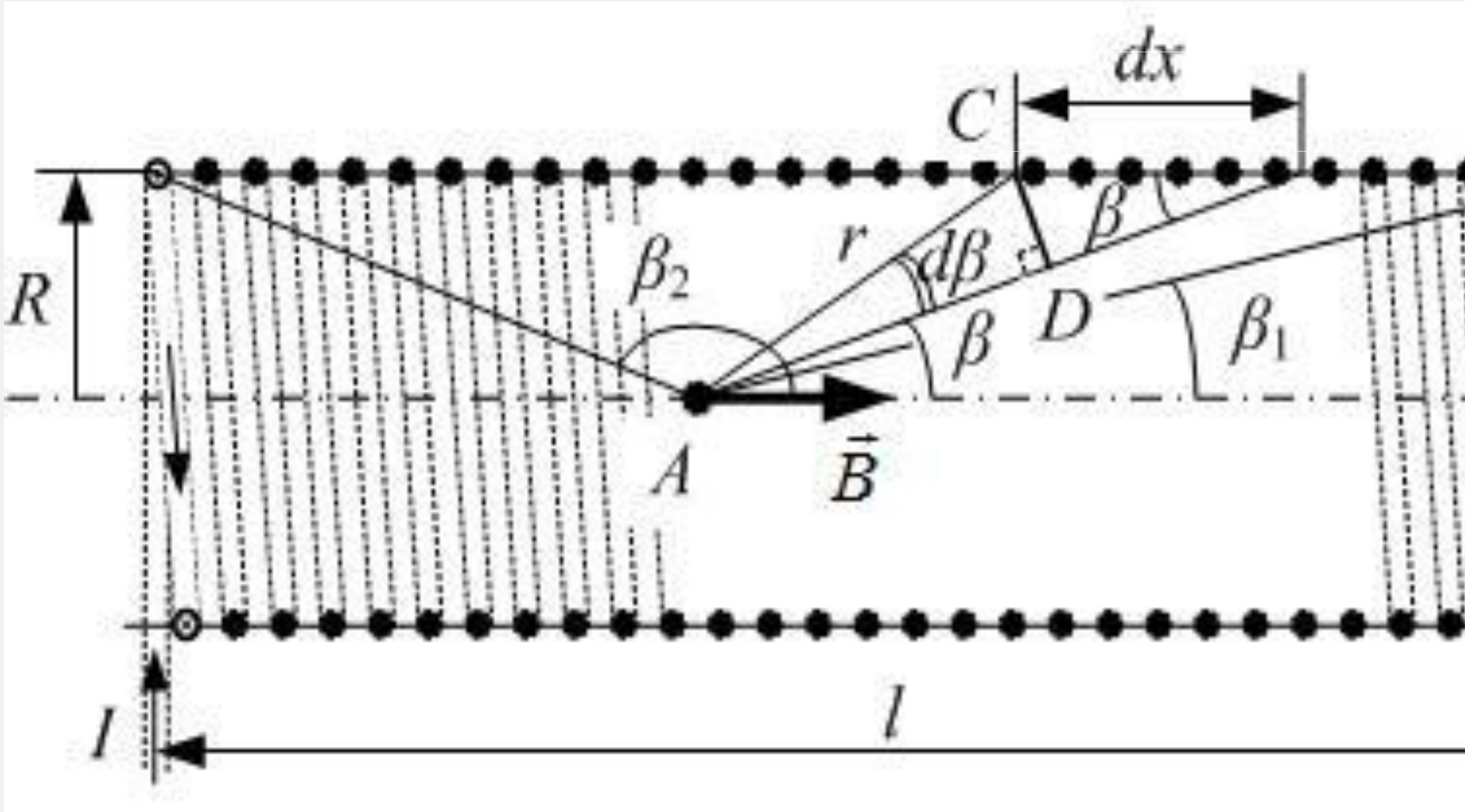


$dN = (n \cdot dx)$ - **число витков на длине** dx

$dI = I \cdot dN = I \cdot n \cdot dx$ - **суммарный ток этих витков**

$\boxed{dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot dx}{2 \cdot R}\sin^3\beta}$ - **индукция поля, созданного током этих витков**

Поле соленоида



$$\sin\beta = \frac{R}{r}$$

$$|CD| = dx \cdot \sin\beta = r \cdot d\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{r \cdot d\beta}{\sin\beta}}$$

Поле соленоида

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot dx}{2 \cdot R}\sin^3\beta$$

$$dx = \frac{r \cdot d\beta}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \quad dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot r \cdot \sin^2\beta \cdot d\beta}{2 \cdot R}$$

$$\sin\beta = \frac{R}{r}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \sin\beta \cdot d\beta}{2}$$

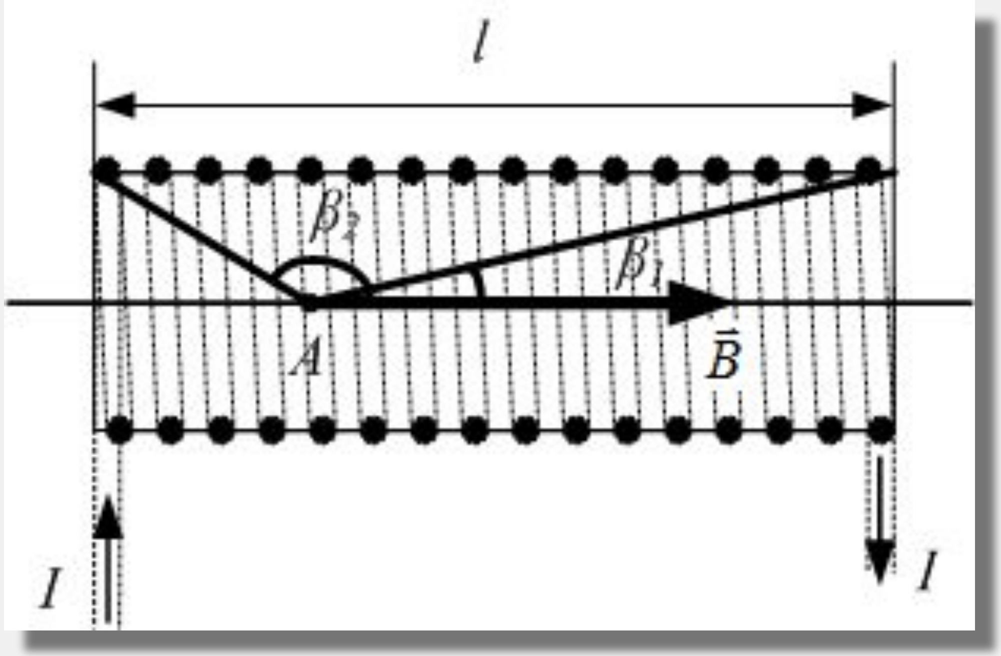
$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dB = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \sin\beta \cdot d\beta}{2}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta \cdot d\beta$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2}\left(-\cos\beta\right)\Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$

Поле соленоида

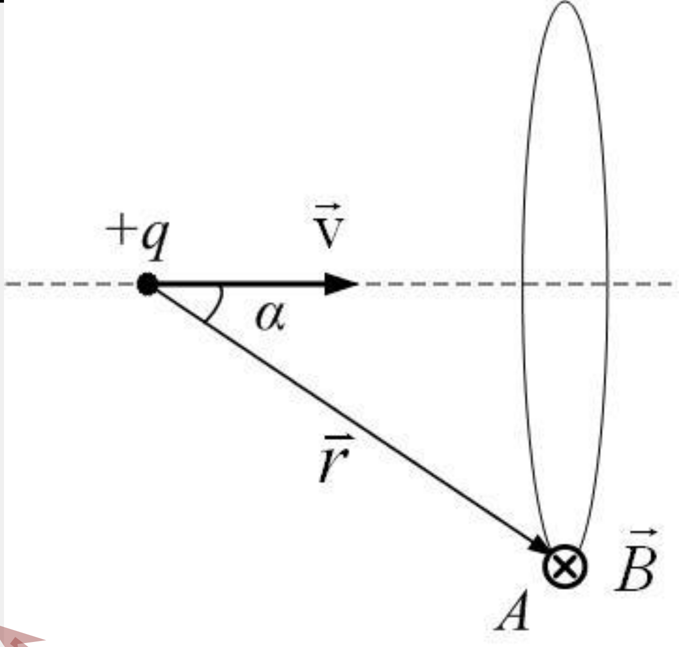
$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2}\left(-\cos\beta\right)\Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$



$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right)$$

Поле движущегося заряда

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}\times\vec{r}\right]}{r^3}$$



Замена:

$$I\cdot d\vec{l} \rightarrow q\cdot\vec{\mathrm{v}}$$

$$d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$$

$$\left[I\cdot dl\right] = A\cdot м$$

$$\left[q\cdot \mathrm{v}\right] = Кл\cdot\frac{м}{с} = \frac{Кл}{с}\cdot м = A\cdot м$$

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{q\left[\vec{\mathrm{v}}\times\vec{r}\right]}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q\cdot \mathrm{v}\cdot\sin\alpha}{r^2}$$

$$j = \frac{I}{S}$$

$$j = q \cdot n \cdot \mathrm{v}$$

$$dV = S \cdot dl$$

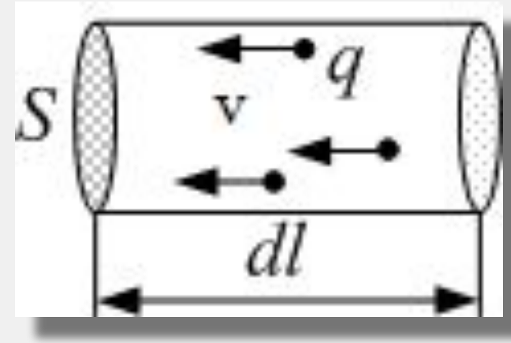
$$dN = n \cdot dV$$

$$I \cdot dl = jS \cdot dl$$

$$I \cdot dl = q \cdot n \cdot \mathrm{v} \cdot S \cdot dl$$

$$I \cdot dl = q \cdot \mathrm{v} \cdot n \cdot dV$$

$$I \cdot dl = q \cdot \mathrm{v} \cdot dN$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]}{r^3}$$

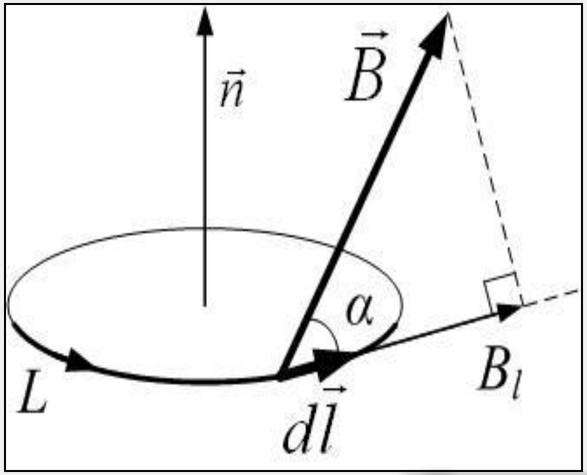
$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot dN\left[\vec{\mathrm{v}} \times \vec{r}\right]}{r^3}$$

$$\vec{B}_q = \frac{d\vec{B}}{dN}$$

$$\vec{B}_q = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q\left[\vec{\mathrm{v}} \times \vec{r}\right]}{r^3}$$

Закон полного тока (теорема о циркуляции) для магнитного поля в вакууме

Циркуляция вектора:



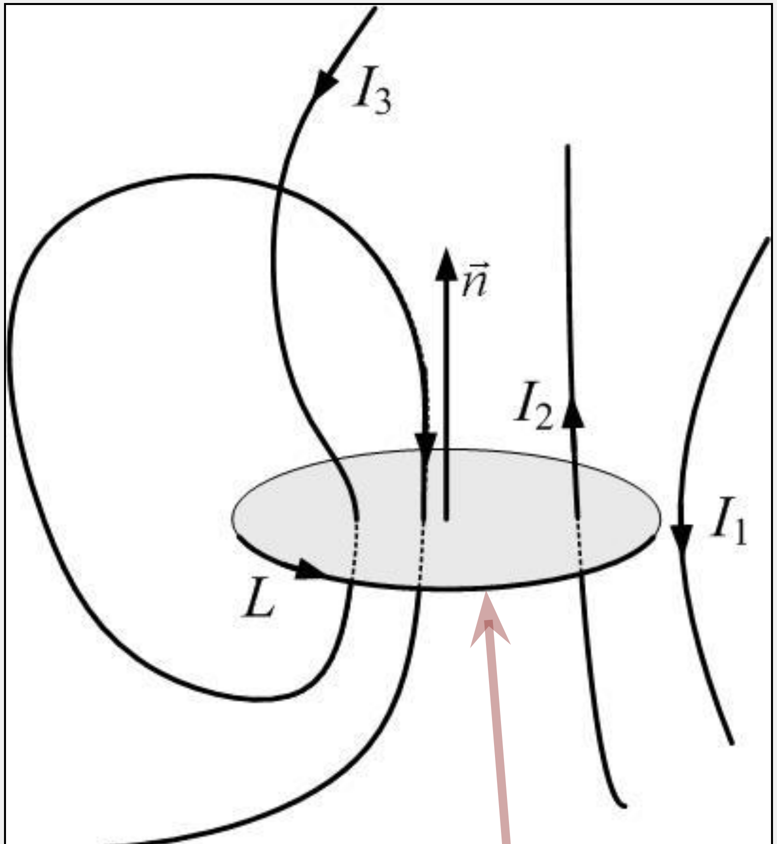
$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B\cos\alpha \cdot dl = \oint_L B_l \cdot dl$$

Теорема о циркуляции:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Циркуляция вектора магнитной индукции для поля в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на магнитную постоянную

<u>Пример</u> применения теоремы о циркуляции (закона полного тока)



$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - 2I_3)$$

Теорема о циркуляции, если заданы не токи, а плотность тока:

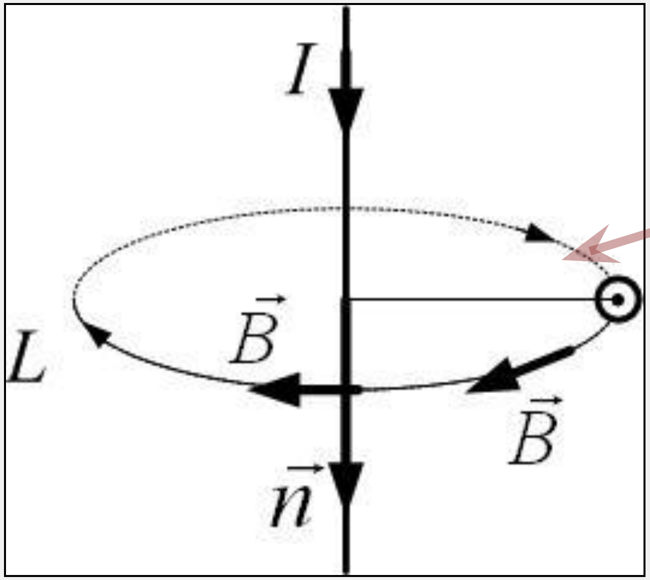
$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Интеграл берётся по поверхности, натянутой на контур

Применение закона полного тока

Поле прямого бесконечного провода

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



В любой точке контура вектор $\vec{B}$ одинаков и направлен по касательной к нему

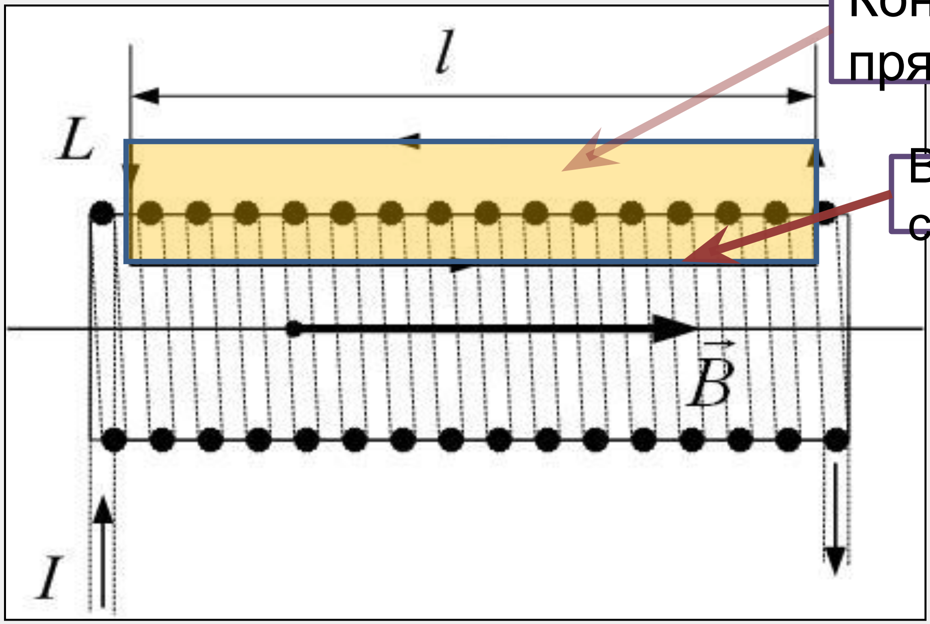
$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B \cdot \int_L dl = B \cdot 2\pi R$$

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R}$$

Поле длинного (бесконечного) соленоида

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



Контур – узкий длинный прямоугольник

В интеграл даёт вклад только эта сторона

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B \cdot \int_L dl = B \cdot l$$

Ток ***I*** пронизывает контур ***N*** раз:

$$\sum_i I_i = I \cdot N$$

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I \cdot N$$

$$\Downarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{l} = \mu_0 \cdot I \cdot n$$

<u>Непотенциальность магнитного поля</u>

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\oint_L \vec{B}d\vec{l} \neq 0}$$

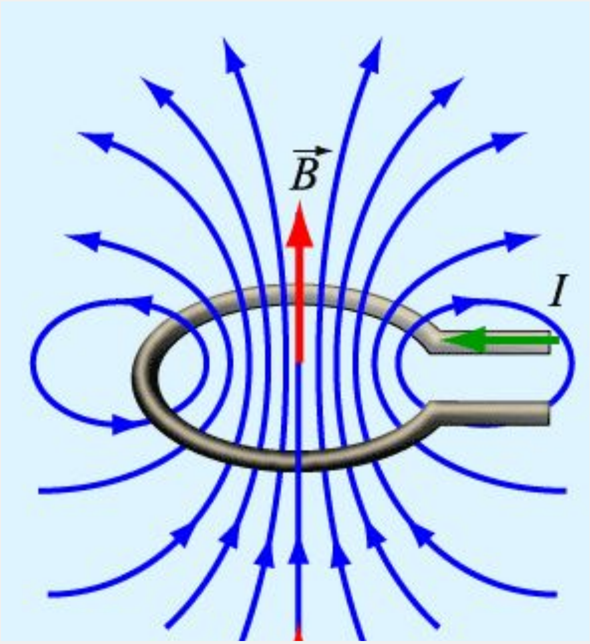
Магнитное поле непотенциально

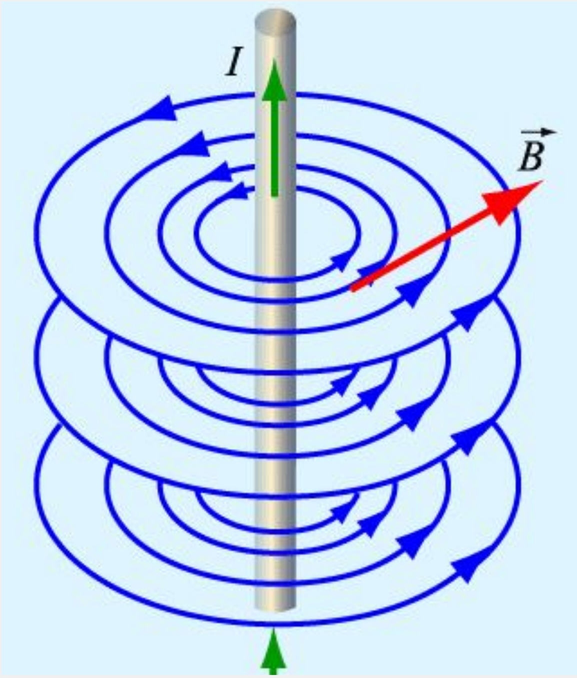
Магнитное поле носит вихревой характер

Линии магнитной индукции <u>замкнуты</u>

Непотенциальность магнитного поля

Линии магнитной индукции замкнуты



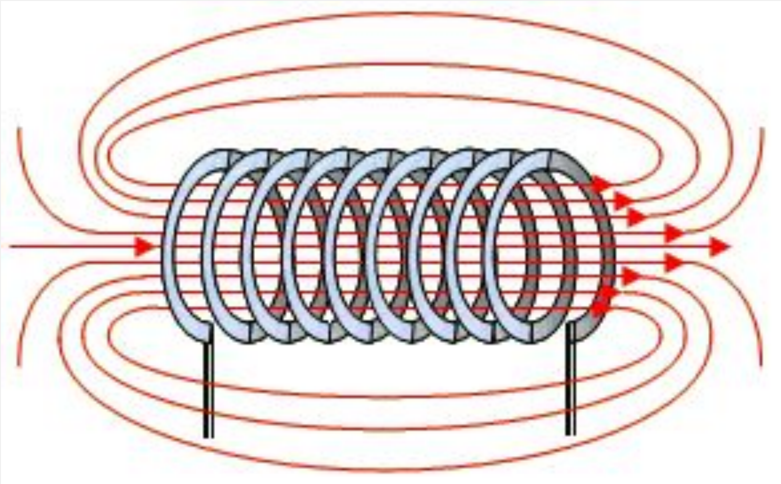


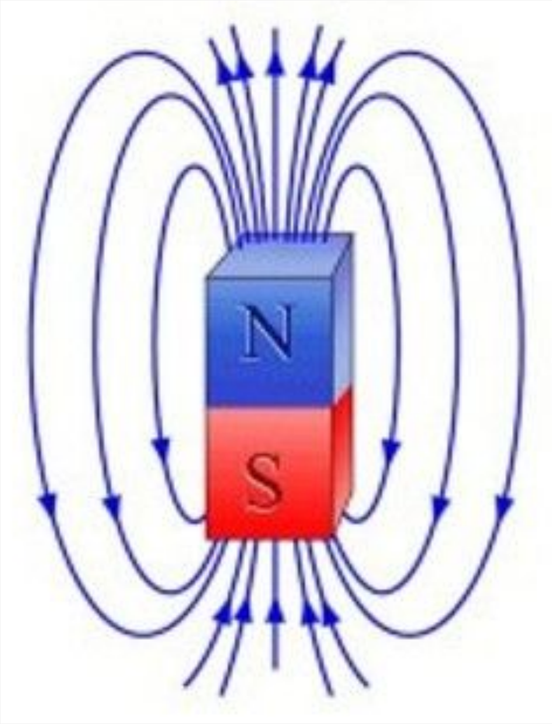
Поле кругового тока

Поле прямого провода

Непотенциальность магнитного поля

Линии магнитной индукции замкнуты





Поле соленоида

Поле полосового магнита