

**ВоГУ**

*Лекция 26 (8)*

# **Магнитное поле**

*Кузина Л.А.,  
к.ф.-м.н.,  
доцент*

**2017 г.**

# План

1. Магнитное поле и его характеристики: магнитная индукция и напряжённость поля
2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции
3. Применение закона Био-Савара-Лапласа для расчёта индукции магнитного поля
  - 3.1. Индукция поля прямого бесконечного проводника с током
  - 3.2. Индукция в центре кругового тока
  - 3.3. Индукция на оси кругового тока
  - 3.4. Поле соленоида
  - 3.5. Поле движущегося заряда
4. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Непотенциальность магнитного поля. Применение закона полного тока для расчёта поля прямого тока и длинного соленоида

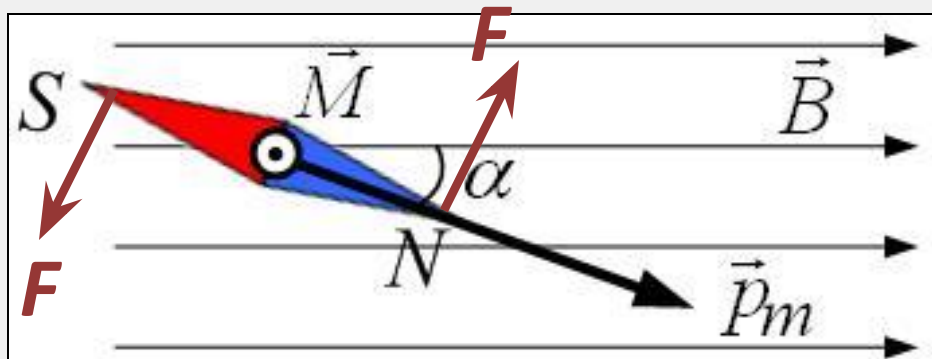
# Магнитное поле. Индукция поля $B$

Магнитное поле создаётся токами

Взаимодействие токов происходит посредством магнитного поля

На токи, помещённые в магнитное поле, действует сила:

Магнитное поле поворачивает магнитную стрелку (компаса):



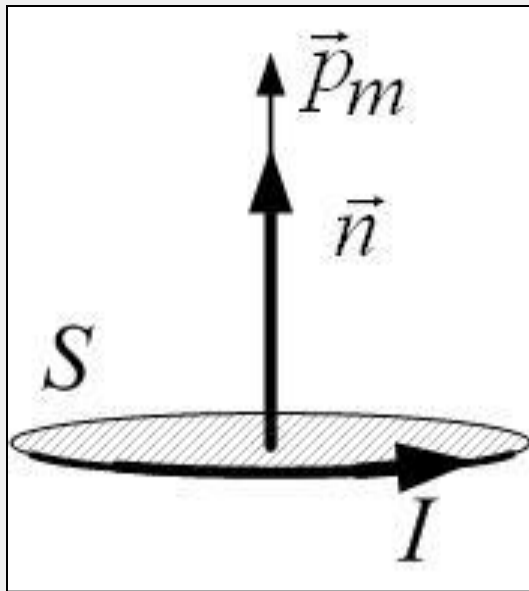
$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

$$M = p_m B \sin \alpha$$

$B$  – силовая характеристика поля – магнитная индукция

$p_m$  – магнитный момент стрелки (или контура с током)

# Магнитный момент $\vec{p}_m$



$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$$

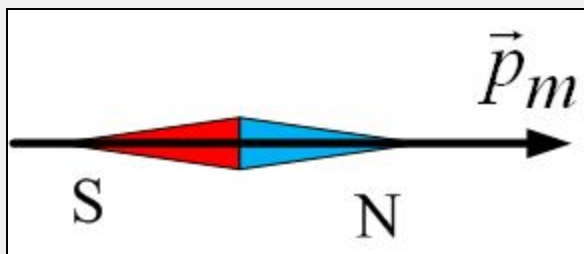
$$p_m = I \cdot S$$

или

(если в контуре  $N$  витков):

$$\vec{p}_m = N \cdot I \cdot S \cdot \vec{n}$$

$$p_m = N \cdot I \cdot S$$



Размерность:

$$[p_m] = [I] \cdot [S] = A \cdot m^2$$

Магнитный момент стрелки компаса  
направлен от южного конца к северному

## Индукция магнитного поля $B$

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$$

Величина магнитной индукции  $B$  в данной точке поля численно равна максимальному вращающему моменту силы, действующему на виток (или магнитную стрелку) с единичным магнитным моментом:

$$M = p_m B \sin \alpha$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

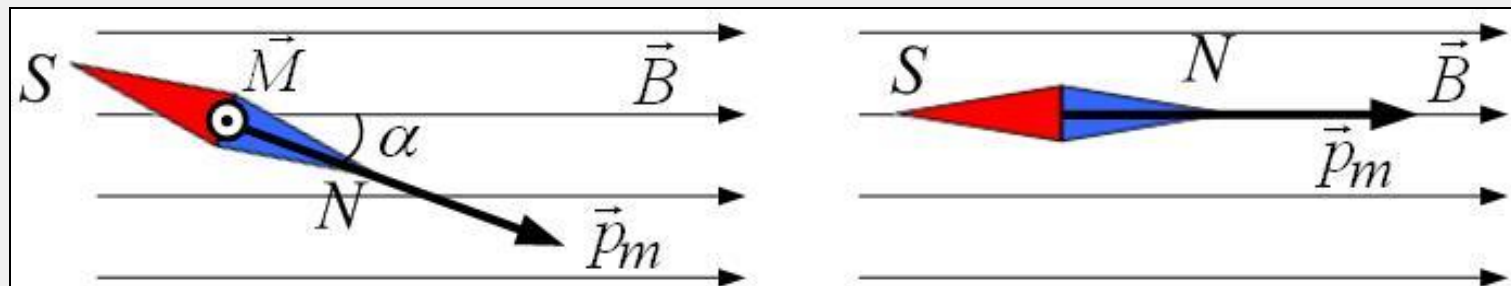
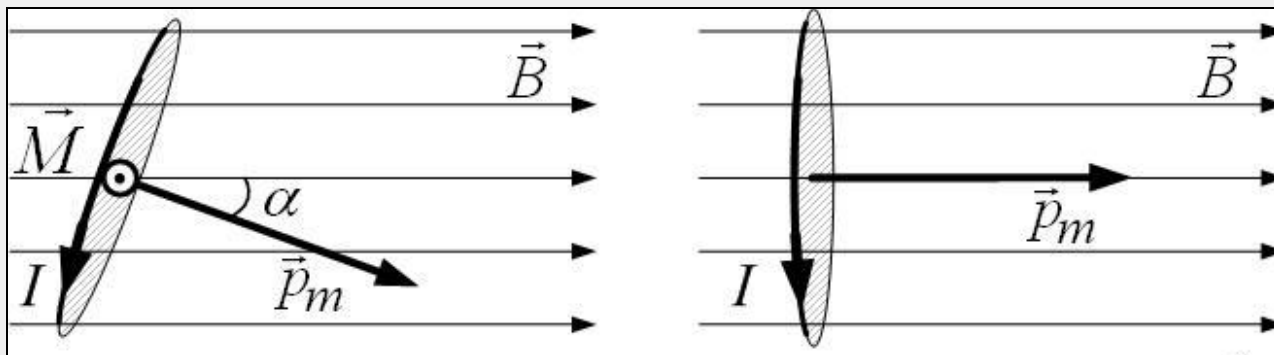
$B$  – силовая векторная характеристика поля

$$[B] = \frac{[M]}{[p_m]} = \frac{[F \cdot l]}{[p_m]} = \frac{H \cdot m}{A \cdot m^2} = \frac{H}{A \cdot m} = Tл$$

**Магнитный момент в магнитном поле ориентируется по полю:**

$$M = p_m B \sin \alpha$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$



# Напряжённость магнитного поля $H$

Ещё одна характеристика поля – напряжённость  $H$

Напряжённость поля  $H$  описывает только поле макротоков (токов проводимости)

Напряжённость поля одинакова в вакууме и в веществе

# Аналогия характеристик электростатического поля и магнитного полей:

Индукция

магнитного поля описывает суммарное поле токов проводимости и микротоков вещества

$B$  аналогично  $E$

Напряжённость электрического поля описывает суммарное поле свободных и связанных зарядов

Напряжённость магнитного поля описывает только поле **макротоков** (токов проводимости) и одинакова в вакууме и в веществе

$H$  аналогично  $D$

Вектор

электрического смещения описывает только поле **свободных зарядов** и одинаков в вакууме и в веществе



Связь между характеристиками полей:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \text{аналогично} \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \quad \text{— магнитная постоянная}$$

$\mu$  — магнитная проницаемость вещества

**Физический смысл магнитной проницаемости  $\mu$ :**

Магнитная проницаемость  $\mu$  показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе  $B$  больше, чем в вакууме  $B_0 = \mu_0 H$ :

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}$$

$$[\mu] = 1$$

**Задача электродинамики –  
вычисление полей, созданных зарядами и  
токами**

решается с помощью

□ **Закона Био-Савара-Лапласа**  
и

□ **Принципа суперпозиции**

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

**Индукция поля, созданного в данной точке несколькими токами, равна векторной сумме индукций полей, созданных в данной точке каждым током в отдельности**

# Принцип суперпозиции

(в случае непрерывных проводников)

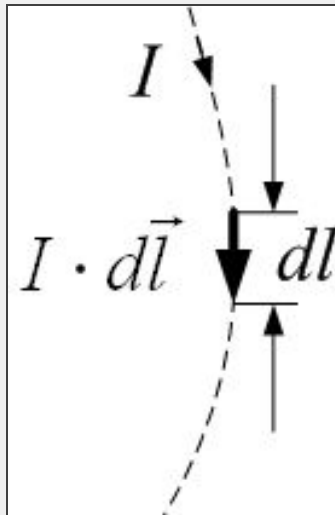
$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$

Индукция, созданная проводником с током, равна интегралу от элементарных индукций полей, созданных каждым элементом тока в отдельности

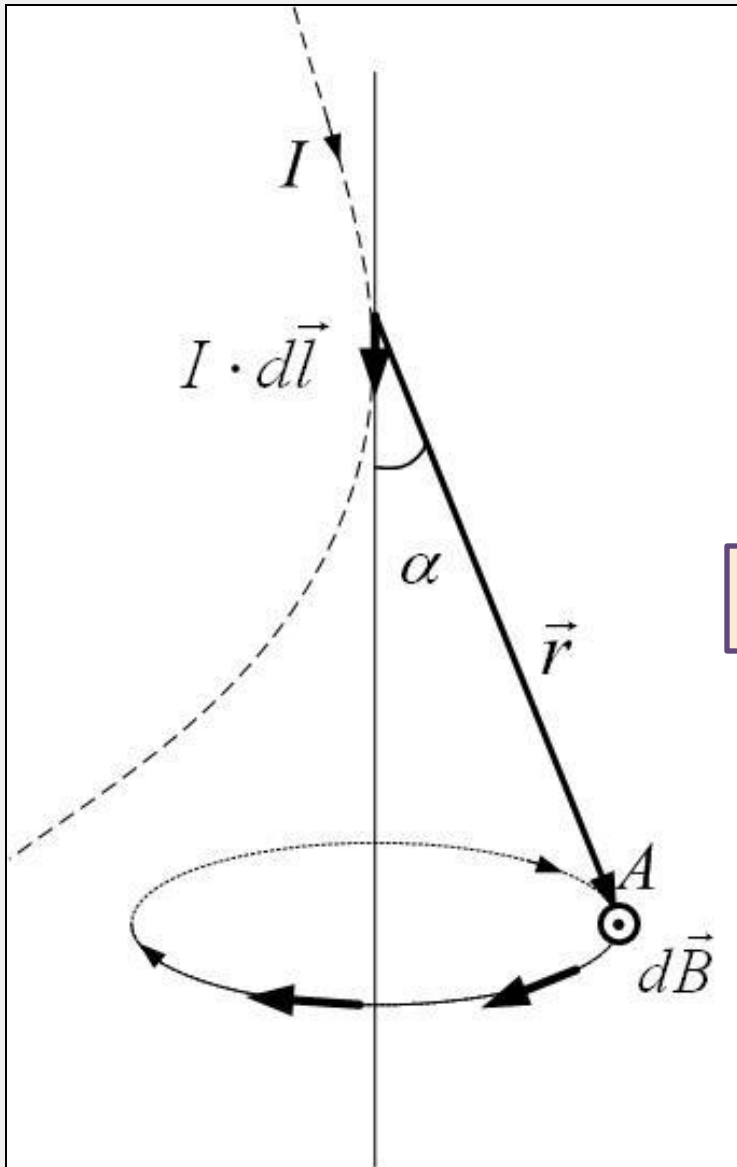
проводник непрерывный;  
интеграл по всему проводнику

создано элементом тока

$$I \cdot dl$$



Элемент тока:  $I \cdot dl$



$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

Вектор  $d\vec{B}$  направлен по правилу буравчика

$$d\vec{B} \perp \vec{r}$$

$$d\vec{B} \perp I \cdot d\vec{l}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

# Индукция поля прямого бесконечного проводника с током

$$B = \int_1^2 dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

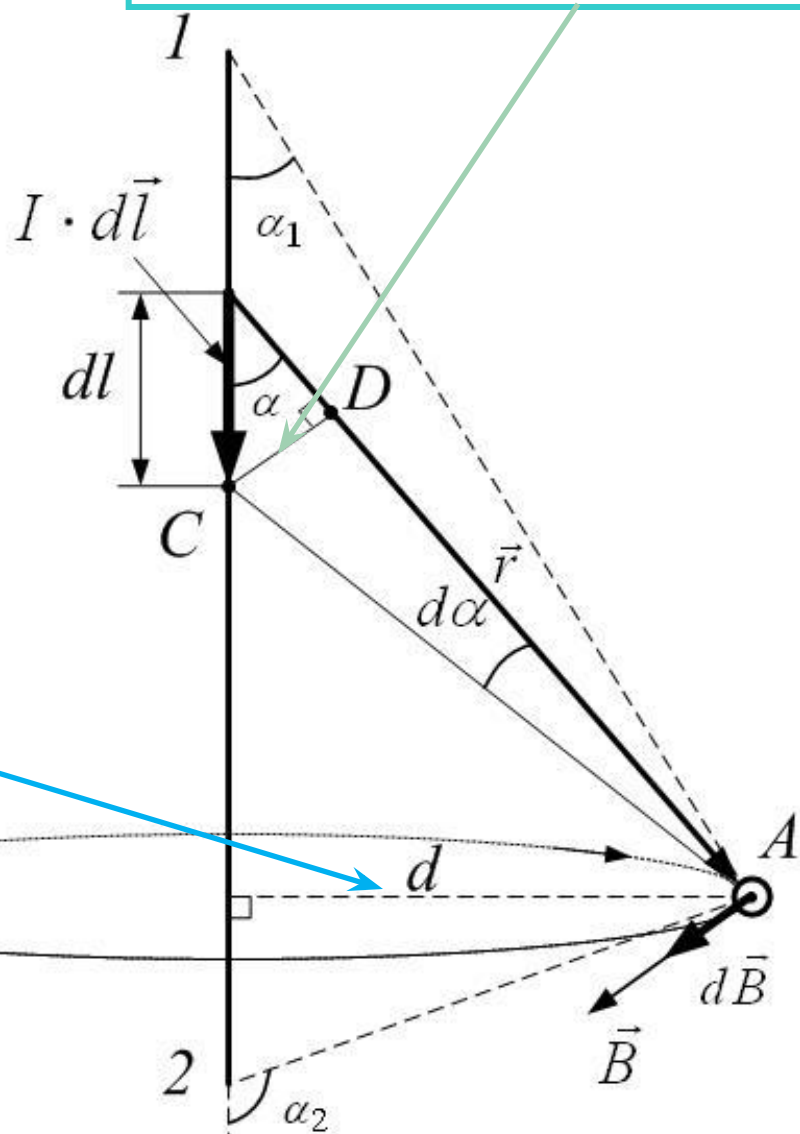
$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot r \cdot d\alpha}{r^2} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\alpha}{r}$$

$$d = r \cdot \sin \alpha$$

$$r = \frac{d}{\sin \alpha}$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{d}$$

$$|CD| = dl \cdot \sin \alpha = r \cdot d\alpha$$



$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{d}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot (-\cos \alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

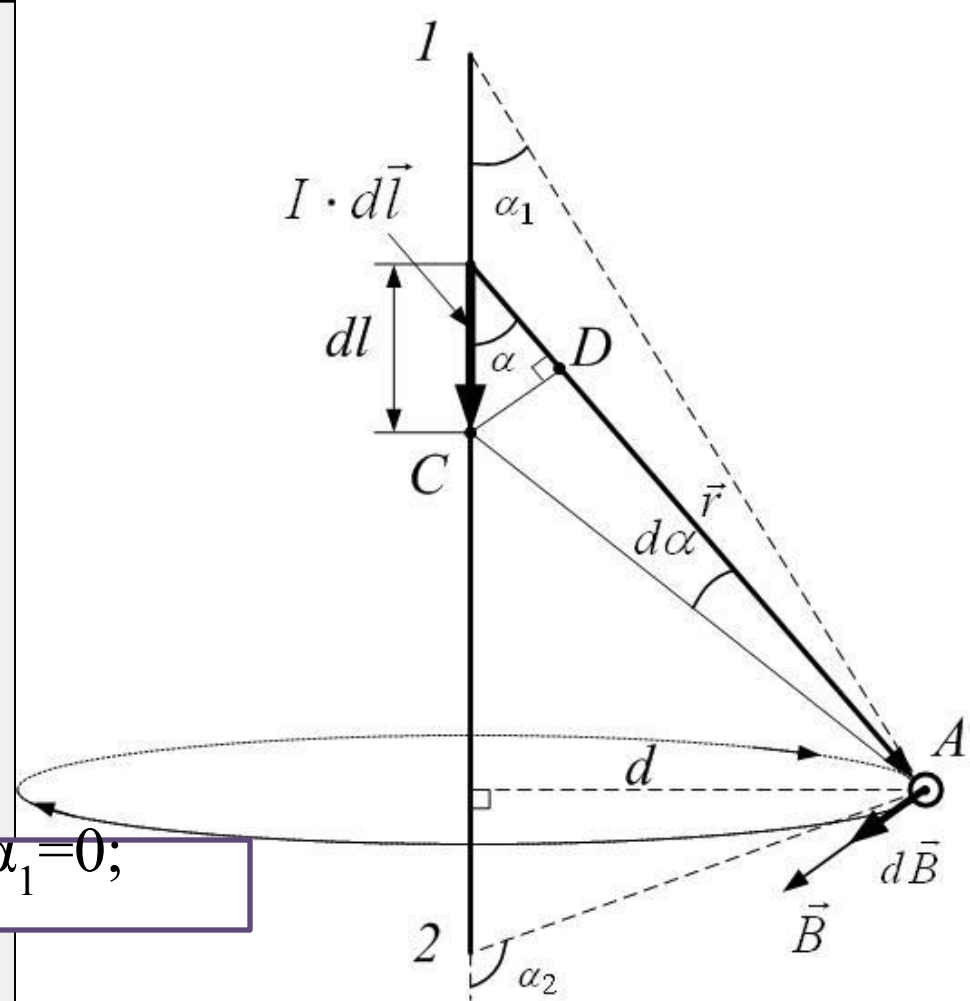
$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

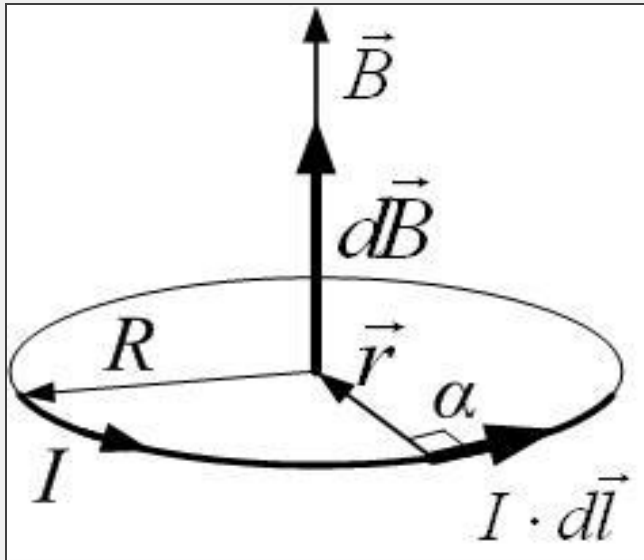
Если проводник бесконечен,  $\alpha_1 = 0$ ;  
 $\alpha_2 = \pi$



$$B_\infty = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d} (1 - (-1)) = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}$$



## Индукция в центре кругового тока



$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^\circ}{R^2}$$

$$B = \oint_L dB$$

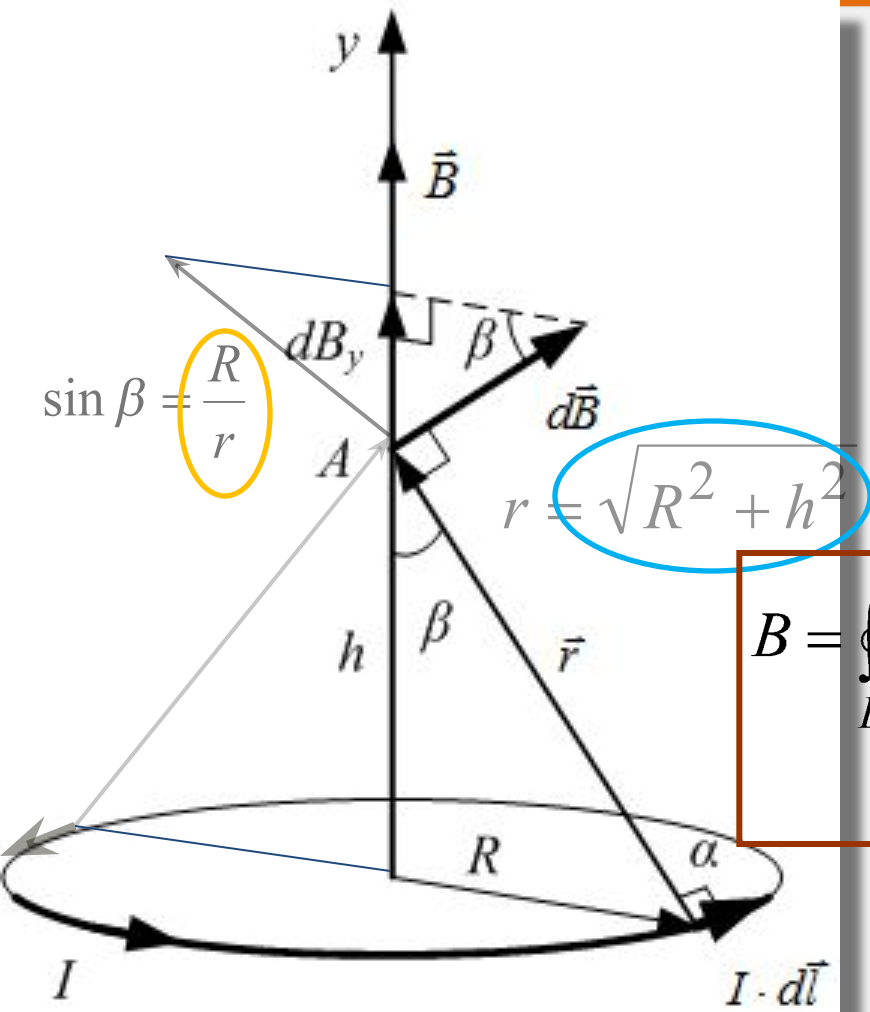
$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \oint_L dl$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2R}$$



# Индукция на оси кругового тока

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$



$$B = B_y = \oint_L dB_y = \oint_L \sin \beta \cdot dB$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^\circ}{r^2}$$

$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \sin \beta = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \sin \beta \cdot \oint_L dl$$

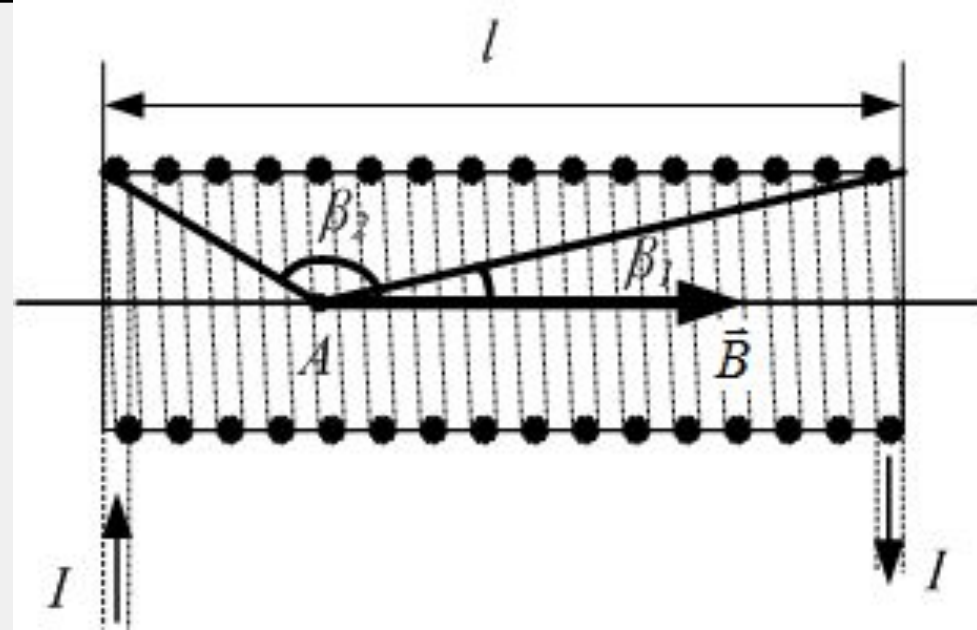
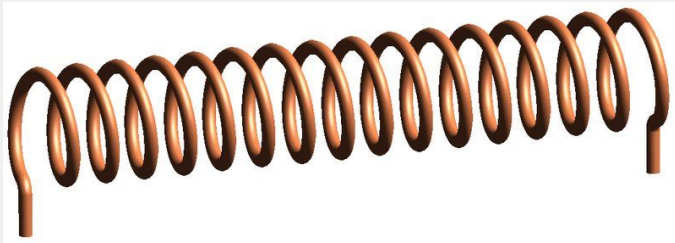
по окружности

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{R}{r} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot r^3}$$

$$B_{\text{на оси}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \sqrt{(R^2 + h^2)^3}}$$

$$B_{\text{на оси}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} \sin^3 \beta$$

# Поле соленоида



$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

$$n = \frac{N}{l}$$

Для длинного  
соленоида:

$$\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = \pi$$

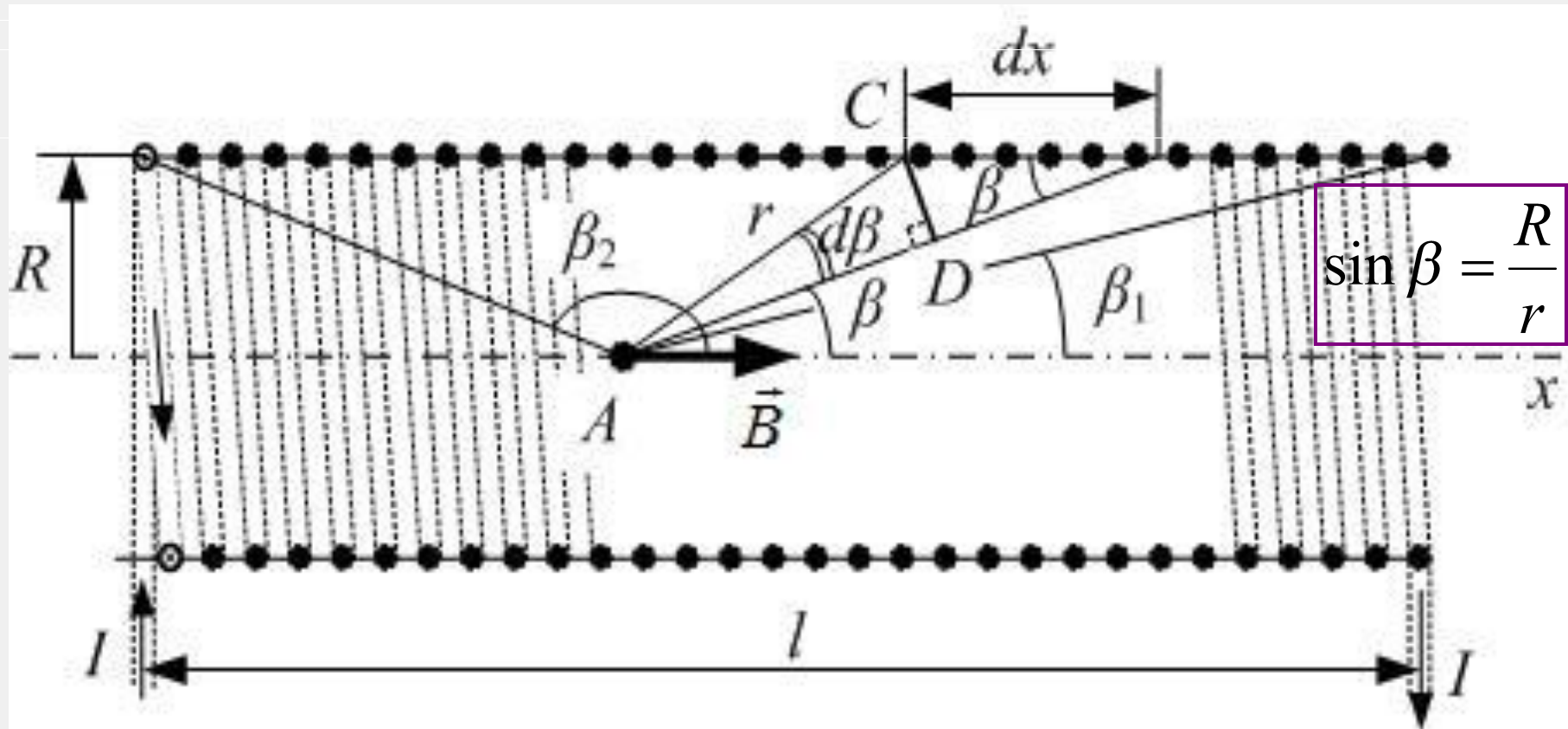
$$B_{\infty \text{ солен.}} = \frac{\mu\mu_0 I n}{2} (1 - (-1))$$

$\Rightarrow$

$$B_{\infty \text{ солен.}} = \mu\mu_0 I n$$



# Поле соленоида



$$|CD| = dx \cdot \sin \beta = r \cdot d\beta$$

$\Rightarrow$

$$dx = \frac{r \cdot d\beta}{\sin \beta}$$

# Поле соленоида

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot dx}{2 \cdot R} \sin^3 \beta$$

$$dx = \frac{r \cdot d\beta}{\sin \beta}$$

$\Rightarrow$

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot r \cdot \sin^2 \beta \cdot d\beta}{2 \cdot R}$$

$$\sin \beta = \frac{R}{r}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \sin \beta \cdot d\beta}{2}$$

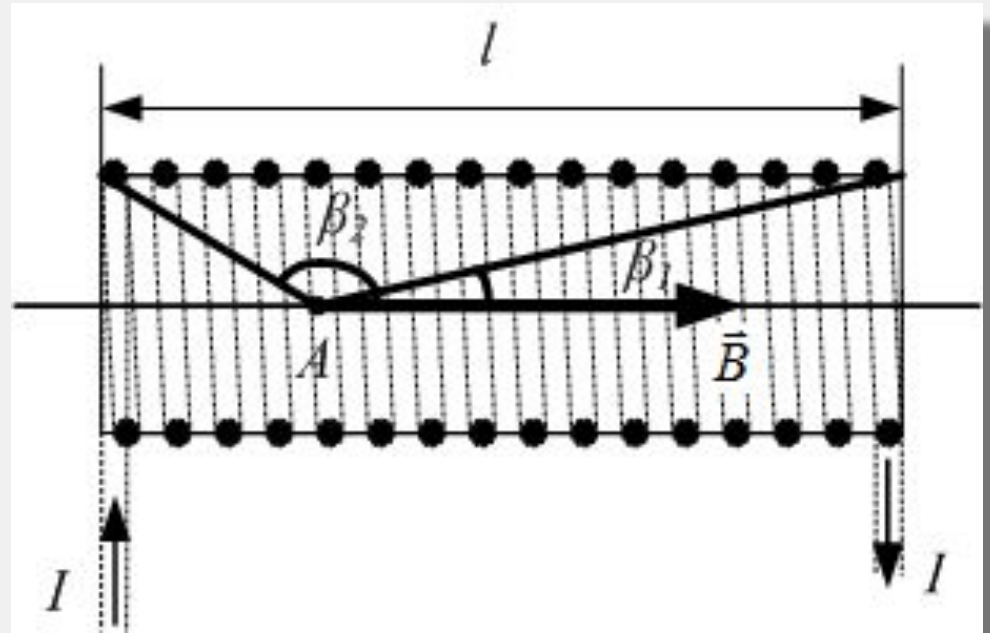
$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dB = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \sin \beta \cdot d\beta}{2}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \cdot d\beta$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (-\cos \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$

# Поле соленоида

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (-\cos \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$



$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

Поле движущегося заряда

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

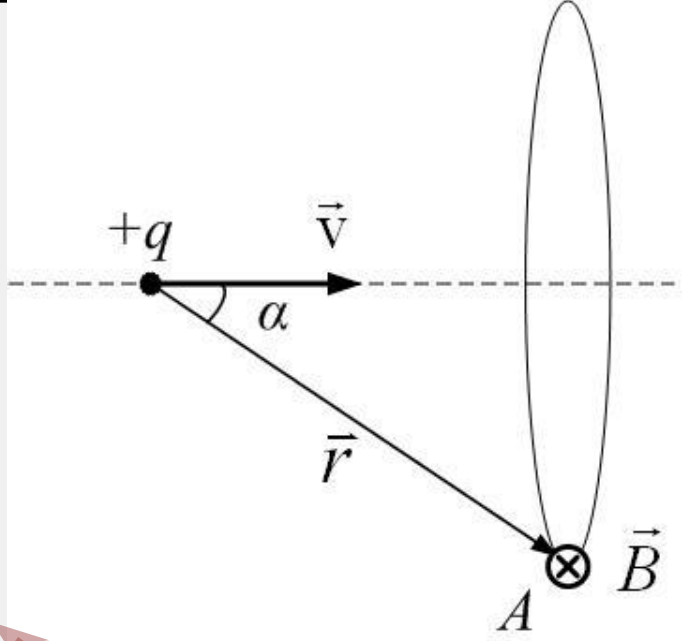
Замена:

$$I \cdot d\vec{l} \rightarrow q \cdot \vec{v}$$

$$d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot v \cdot \sin \alpha}{r^2}$$



$[I \cdot dl] = A \cdot m$   
 $[q \cdot v] = K_{\text{Лл}} \cdot \frac{m}{c} = \frac{K_{\text{Лл}}}{c} \cdot m = A \cdot m$

$$j = \frac{I}{S}$$

$$j = q \cdot n \cdot v$$

$$dV = S \cdot dl$$

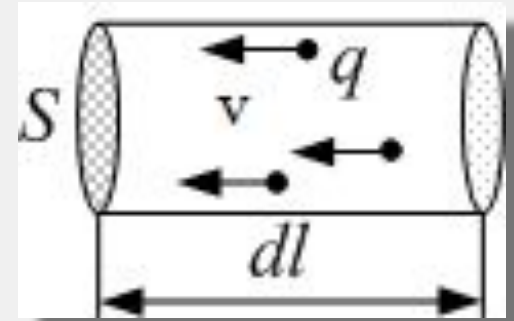
$$dN = n \cdot dV$$

$$I \cdot dl = jS \cdot dl$$

$$I \cdot dl = q \cdot n \cdot v \cdot S \cdot dl$$

$$I \cdot dl = q \cdot v \cdot n \cdot dV$$

$$I \cdot dl = q \cdot v \cdot dN$$



$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl \times r]}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot dN [v \times r]}{r^3}$$

$$B_q = \frac{dB}{dN}$$

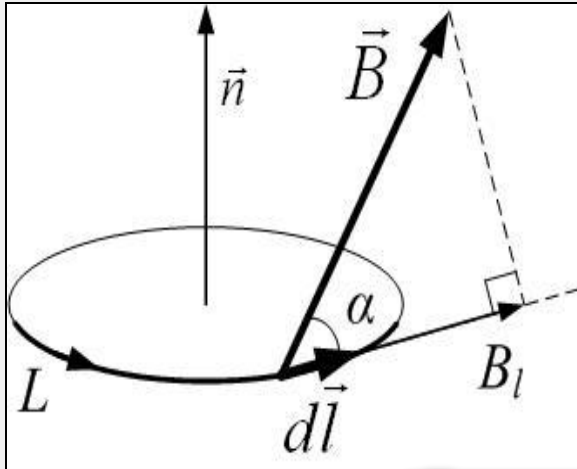
$$B_q = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q [v \times r]}{r^3}$$



# Закон полного тока (теорема о циркуляции)

для магнитного поля в вакууме

Циркуляция  
вектора:



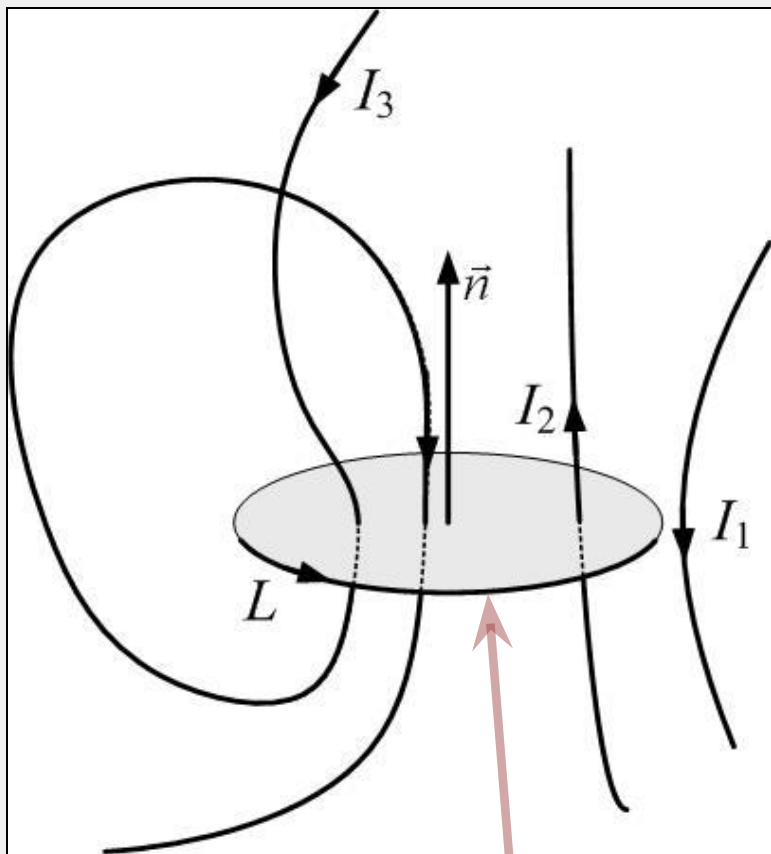
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B \cos \alpha \cdot dl = \oint_L B_l \cdot dl$$

Теорема о  
циркуляции:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Циркуляция вектора магнитной индукции для поля в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на магнитную постоянную

## Пример применения теоремы о циркуляции (закона полного тока)



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - 2I_3)$$

Теорема о циркуляции, если заданы не токи, а плотность тока:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

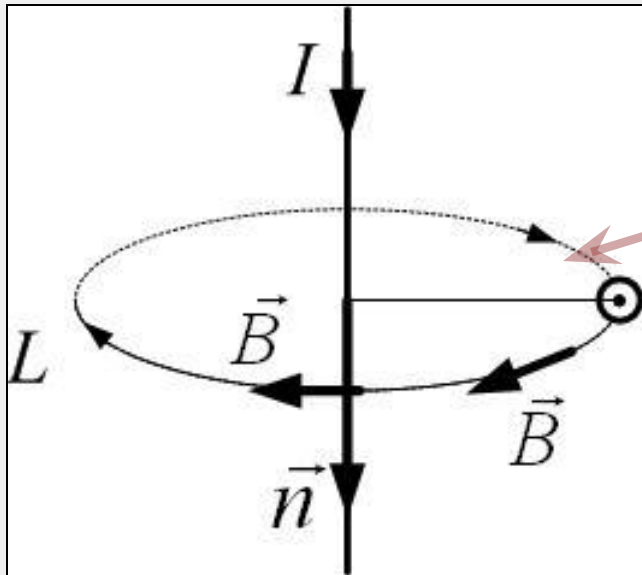
Интеграл берётся по поверхности, натянутой на контур

# Применение закона полного

тока

Поле прямого бесконечного  
провода

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



В любой точке контура вектор  $\vec{B}$  одинаков и направлен по касательной к нему

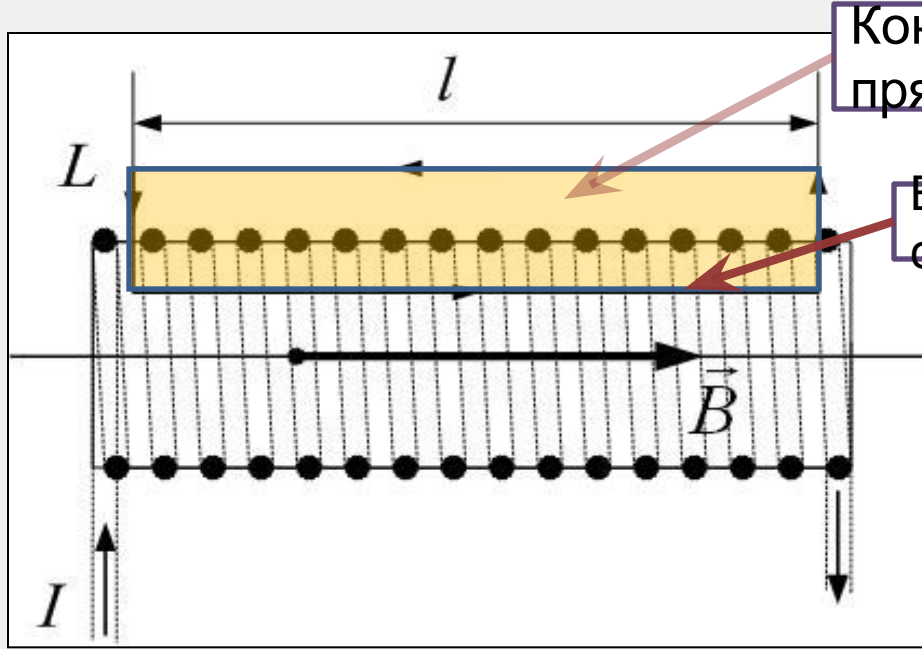
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \cdot \int_L dl = B \cdot 2\pi R$$

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R}$$

Поле длинного (бесконечного)  
соленоида

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



Контур – узкий длинный  
прямоугольник

В интеграл даёт вклад только эта  
сторона

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \cdot \int_L dl = B \cdot l$$

Ток  $I$  пронизывает контур  $N$   
раз:

$$\sum_i I_i = I \cdot N$$

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I \cdot N$$

$\Downarrow$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{l} = \mu_0 \cdot I \cdot n$$

## Непотенциальность магнитного поля

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

$\Rightarrow$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} \neq 0$$

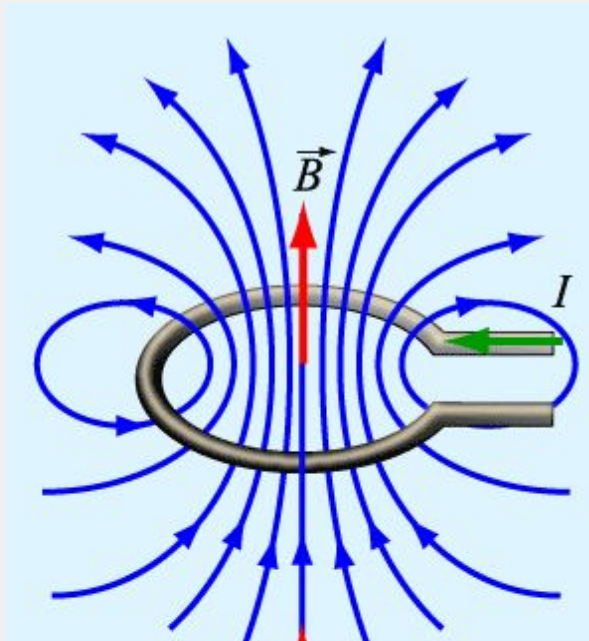
Магнитное поле непотенциально

Магнитное поле носит вихревой характер

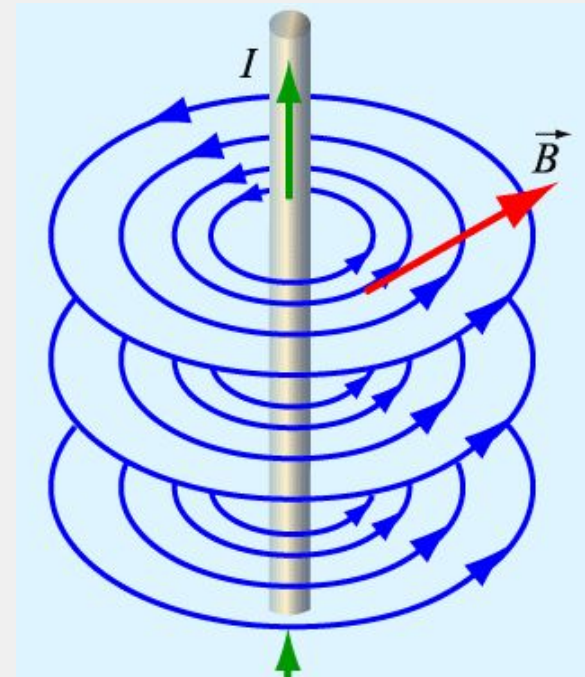
Линии магнитной индукции замкнуты

# Непотенциальность магнитного поля

Линии магнитной индукции замкнуты



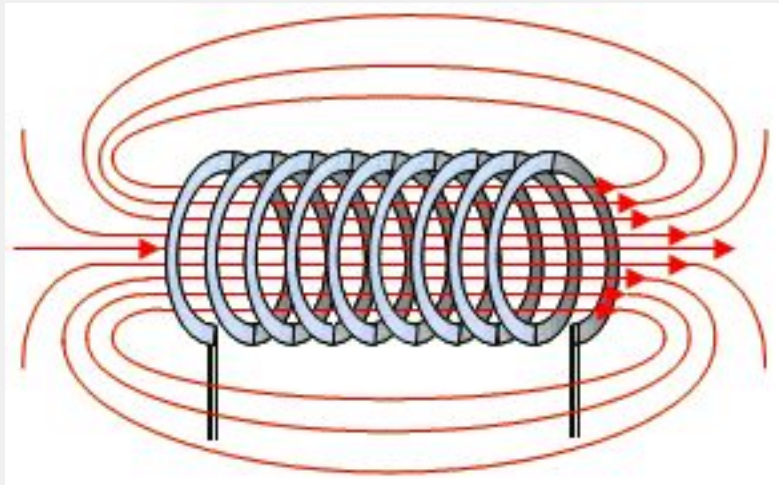
Поле кругового тока



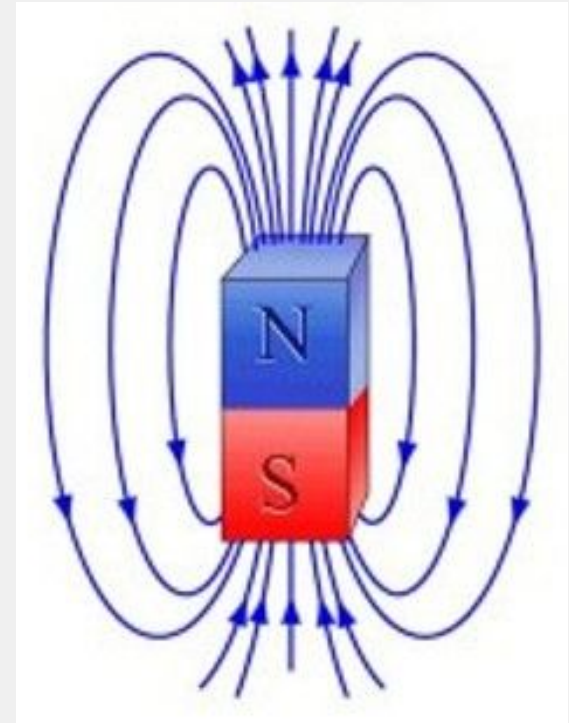
Поле прямого провода

# Непотенциальность магнитного поля

Линии магнитной индукции замкнуты



Поле соленоида



Поле полосового магнита