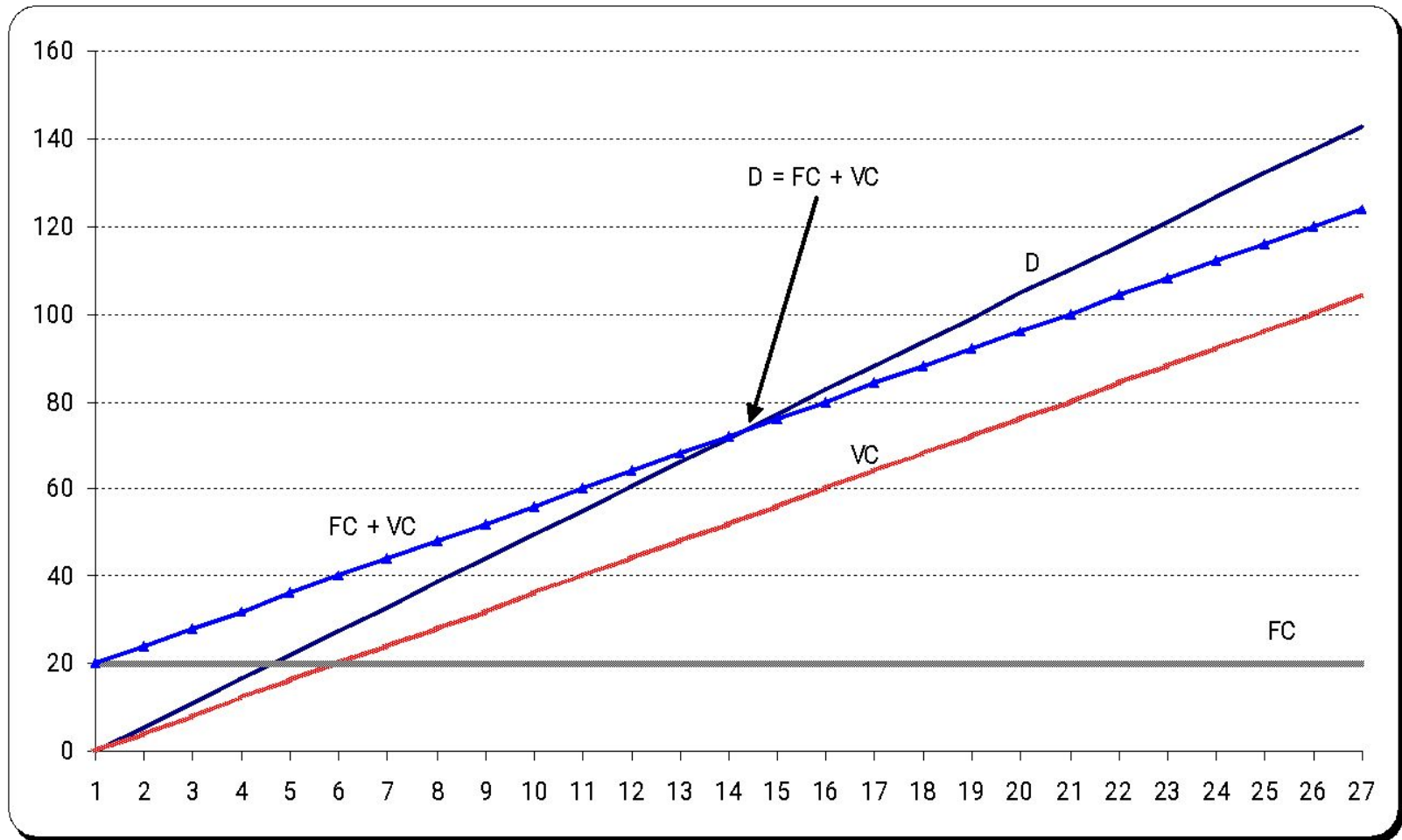


Оптимизация цены товара на  
основе постоянных и  
переменных издержек в  
предположении эластичности  
спроса

(математическая модель)

# Существующая концепция



# Постановка задачи

Таблица 1: Условные значения математической модели

Смежные периоды времени, равные $\Delta t \rightarrow 0$	Физический объем продаж товаров, единицы	Цена товаров, руб.	Средняя себестоимость единицы товаров (удельная себестоимость), руб.
А	1	2	3
Первый	$y_1$	$x_1$	$z_1$
Второй	$y_2$	$x_2$	$z_2$

Допустим, что физический объем продаж товаров  $y(x)$  является линейной функцией от цены товаров  $x$ , то есть мы имеем следующую зависимость спроса от цены:

$$y(x) = kx + b \quad (1), \text{ где}$$

$y(x)$  – физический объем продаж товаров (в физических единицах);

$x$  – цена товаров (руб. за единицу);

$k$  и  $b$  – коэффициенты, связывающие между собой физический объем продаж и цену.

Согласно данным табл. 1, для коэффициентов  $k$  и  $b$  в этом случае справедливо:

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{и} \quad b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$$

# Графическое изображение зависимости продаж от цены и себестоимости от выручки

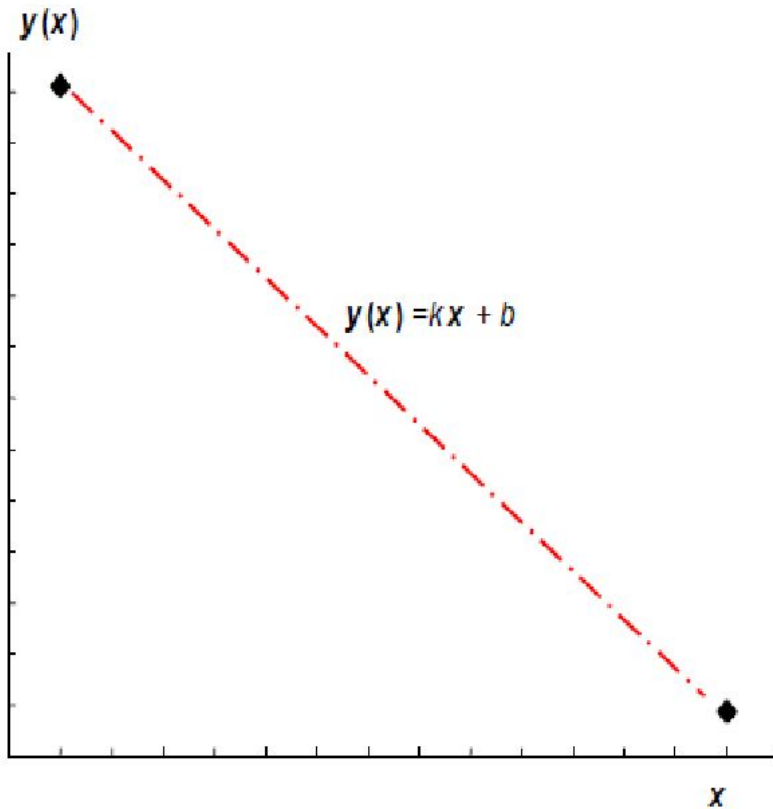


Рис. 1. Зависимость объема продаж от цены

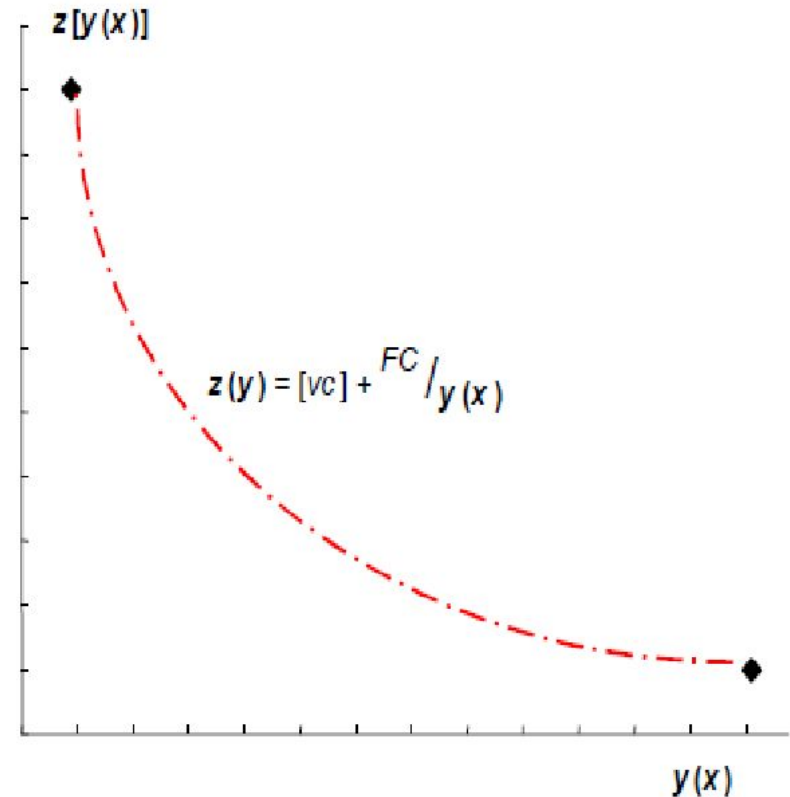


Рис. 2. Зависимость удельной себестоимости от объема продаж

# Расшифровка переменных и постоянных затрат применительно к табл.1

Если исходить из того, что зависимость себестоимости единицы товара от физического объема продаж формируется как функция переменных затрат (*variable cost*) и постоянных затрат (*fixed cost*), то данная зависимость будет выглядеть так:

$$z(y) = \frac{VC + FC}{y(x)} = [vc] + \frac{FC}{y(x)} \quad (2), \text{ где}$$

$z(y)$  – удельная себестоимость товаров (руб. на единицу товара);

$FC$  – постоянные затраты фирмы (руб.);

$VC$  – переменные затраты фирмы (руб.);

$[vc]$  – удельные переменные затраты товаров (руб. на единицу товара).

Согласно данным табл. 1, для переменных  $vc$  и  $FC$  справедливо:

$$FC = \frac{z_1 - z_2}{\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}} \quad \text{и} \quad [vc] = z_1 - \frac{z_1 - z_2}{1 - \frac{y_1}{y_2}}$$

# Уравнения точки безубыточности в классической постановке и в настоящей задаче

Знание величин постоянных затрат  $FC$  и удельных переменных затрат  $[vc]$ , а также цены товара  $x$  позволяет отыскать так называемую точку безубыточности.

Она обычно находится по следующей формуле:

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - [vc]}, \text{ где}$$

$y_{\min}$  – безубыточный объем продаж товаров (в физических единицах).

Но поскольку объем продаж  $y(x)$  и цена  $x$  связаны линейной зависимостью в соответствии с выражением (1), то это означает, что общепринятая формула для нахождения точки безубыточности может быть модифицирована. В частности, цена  $x$  может быть представлена в виде обратной функции от объема продаж  $y(x)$ . С учетом сказанного минимальный объем продаж  $y_{\min}$ , при котором прибыль равна нулю, составит

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - [vc]} = \frac{FC}{\frac{y_{\min} - b}{k} - [vc]} \quad (3).$$



# Определение функционала прибыли и ее экстремума

Если в выражение (2) подставить вместо  $y(x)$  выражение (1), то можно перейти непосредственно к зависимости удельной себестоимости  $z(x)$  от цены товара  $x$ :

$$z(x) = [vc] + \frac{FC}{kx + b} \quad (4), \text{ где}$$

$z(x)$  – удельная себестоимость товаров (руб. на единицу товара).

Далее, зная зависимость объема продаж  $y(x)$  и удельной себестоимости  $z(x)$  от цены товара  $x$ , выводится функция зависимости прибыли  $P(x)$ :

$$P(x) = y(x)[x - z(x)] = kx^2 + (b - k \cdot [vc])x - (b \cdot [vc] + FC) \quad (5), \text{ где}$$

$P(x)$  – прибыль от продажи товаров (тыс.руб.).

Для максимизации прибыли  $P(x)$  отыскивается первая производная функционала (5):

$$P'(x) = 2kx + b - k[vc].$$

# Вычисление отдельных финансовых показателей

Приравняв ее нулю и решив уравнение, получаем следующие выражения цены, объема продаж, удельной себестоимости и выручки, обеспечивающие максимум прибыли:

- цена  $x = \frac{1}{2} \left( [vc] - \frac{b}{k} \right)$  (6);

- физический объем продаж  $y = \frac{1}{2} (k[vc] + b)$  (7);

- себестоимость единицы товара  $z = [vc] + \frac{2 \cdot FC}{k[vc] + b}$  (8);

- выручка  $xy(x) = \frac{1}{4} \left( k[vc]^2 - \frac{b^2}{k} \right)$  (9).



# Графическое изображение зависимости себестоимости и прибыли от цены

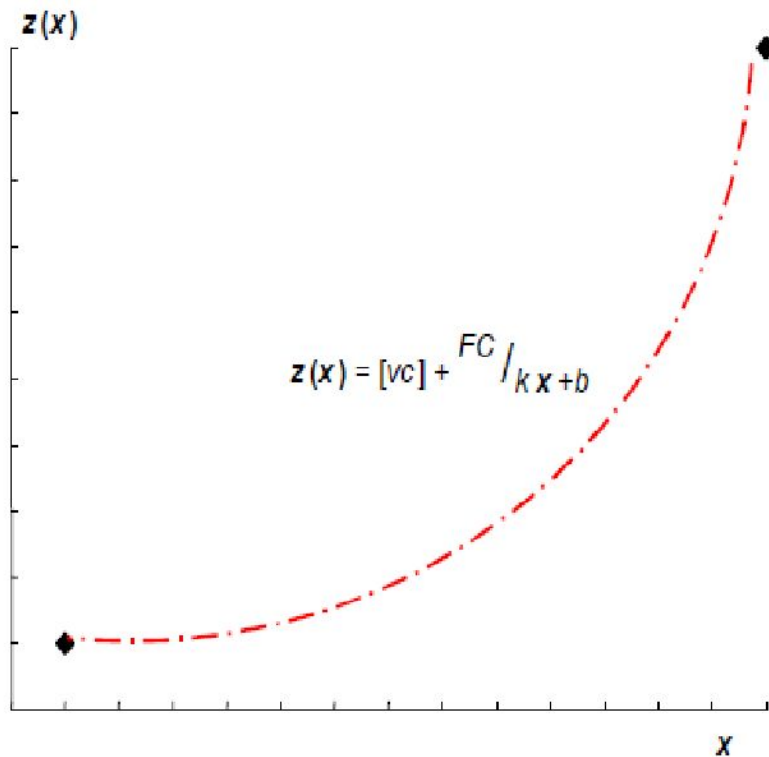


Рис. 3. Зависимость удельной себестоимости от цены

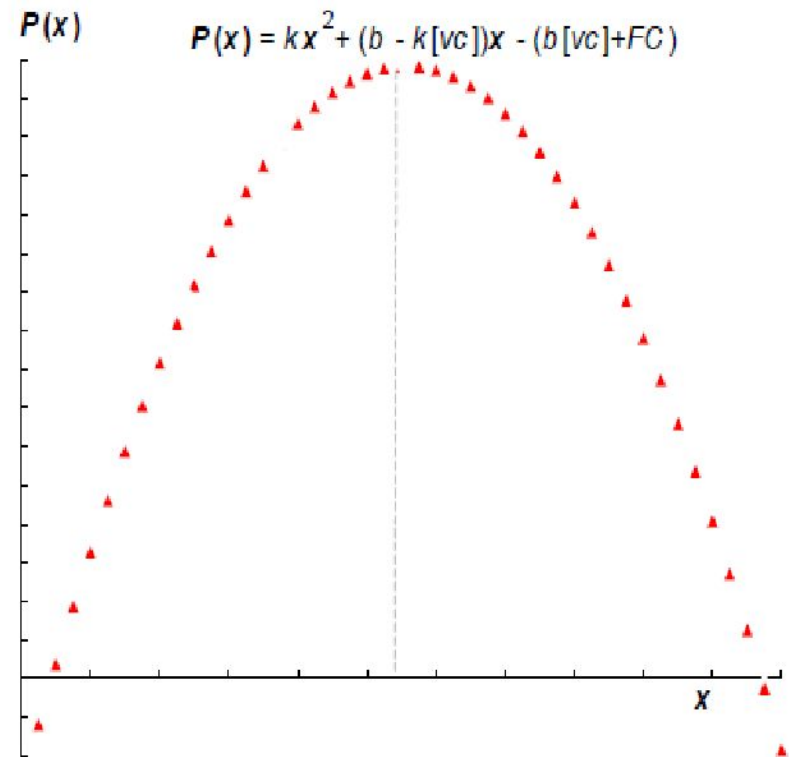


Рис. 4. Зависимость прибыли от цены

# Пример № 1

Таблица 2: Данные примера 1

Годы	Выручка от продаж, руб.	Себестоимость продаж, руб.	Прибыль от продаж, руб. [гр.1 – гр.2]	Объем продаж, шт.	Средняя цена, руб. за 1 шт. [гр.1 : гр.4]	Удельные себестоимость, руб. на 1 шт. [гр.2 : гр.4]	Удельная прибыль, руб. на 1 шт. [гр.5 – гр.6]
А	1	2	3	4	5	6	7
1 год	358 945	147 844	211 101	67 341	5,33	2,20	3,13
2 год	484 535	210 909	273 626	98 301	4,93	2,15	2,78

Согласно табл. 2, на втором году произошло снижение цены товара (с 5,33 руб. до 4,93 руб. за единицу) при одновременном росте объема продаж (с 67 341 единиц до 98 301 единицы), то есть явно проявились признаки, что покупатели чутко отреагировали на изменение цены (рис. 5).

С помощью табл. 2 и выражения (1) составляется система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4,93k + b = 98301 \\ 5,33k + b = 67341 \end{cases}$$

– решение которой дает искомую линейную зависимость (она изображена также на рис. 1):

$$y(x) = -77400x + 479883 \quad (10)$$

## Пример № 1 (продолжение)

Кроме того, из табл. 2 следует, что на втором году произошло также снижение себестоимости единицы товара (с 2,20 до 2,15 руб. за единицу) при одновременном росте объема продаж (с 67 341 единиц до 98 301 единицы). Опять же с помощью табл. 2 и выражения (2) составляется еще одна система линейных уравнений:

$$\begin{cases} [vc] + \frac{FC}{98301} = 2,15 \\ [vc] + \frac{FC}{67341} = 2,20 \end{cases}$$

– решение которой дает, что постоянные затраты  $FC = 10\,691$  руб. и удельные переменные затраты  $[vc] = 2,04$  руб. на единицу товара.

Знание величин постоянных затрат  $FC$  и удельных переменных затрат  $[vc]$ , а также цены товара  $x$  позволяет с помощью выражения (3) установить интервал безубыточности:

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - [vc]} = \frac{FC}{\frac{y_{\min} - b}{k} - [vc]} = \frac{10691}{\frac{y_{\min} - 479883}{-77400} - 2,04}$$

Решение квадратного уравнения дает две точки безубыточности для предприятия: 319 396 единицы при средней цене 2,07 руб. и 2 591 единица при средней цене 6,17 руб. Очевидно, что более реальна вторая величина, а следовательно, достигнутый на первом году объем продаж (98 301 единица) в 38 раз превышает безубыточный объем продаж (2 591 единица), то есть разница просто колоссальная. А это дает основание полагать, что фирма уже может позволить себе наращивать свою прибыль не только за счет повышения цен, а, даже, наоборот, за счет их снижения, как это было в примере 1.



# Численные результаты примера № 1

Далее, зная зависимость объема продаж  $y(x)$  от цены товара  $x$ , а также зависимость себестоимости единицы товара  $z(x)$  от цены  $x$ , выводится уже функция зависимости прибыли  $P(x)$  от цены товара  $x$ :

$$P(x) = y(x)[x - z(x)] = -77400x^2 + 637779x - 989652 \quad (13).$$

Для максимизации прибыли  $P(x)$  находим первую производную выражения (13):

$$P'(x) = 2kx + b - k[vc] = -154800x + 637779.$$

Приравняв ее нулю и решая полученное уравнение, отыскиваем следующие значения цены, объема продаж, себестоимости и выручки, оптимальные с точки зрения прибыли предприятия (максимизирующие прибыль):

- цена единицы товара  $x = 4,12$  руб., или 83,6% к уровню первого года;
- объем продаж  $y(x) = 160994$  шт., то есть увеличение на 63,8% к уровню первого года;
- себестоимость единицы товара  $z(x) = 2,11$  руб., что означает 98,1% к первого года;
- прибыль на единицу товара  $x - z(x) = 2,01$  руб., или 72,3% к уровню первого года;
- выручка от продаж  $x y(x) = 663,30$  тыс.руб., то есть рост на 36,9% к первого года;
- прибыль  $P(x) = y(x)[x - z(x)] = 323,60$  тыс.руб., что равносильно росту против первого года на 18,3%;
- наконец, рентабельность продаж  $\frac{P(x)}{x y(x)}$  составит 48,8% против 56,5% в первом году.

Если к этому добавить еще вывод о почти 40-кратном превышении достигнутого предприятием объема продаж по сравнению с точкой безубыточности, то ясно, что предприятие обладает очень большим потенциалом роста прибыли, для реализации которого нужно просто снизить цены, имевшие место на первом году.

## Пример № 2

Но гораздо чаще на практике приходится сталкиваться с ситуацией, которая приведена в табл. 3 и которая показывает, как неосторожное повышение цен всего на 5% отпугнуло покупателей и привело к катастрофическому падению физического объема продаж более чем на 13%.

Таблица 3: Данные для примера 2

Годы	Выручка от продаж, руб.	Себестоимость продаж, руб.	Прибыль от продаж, руб. [гр.1 – гр.2]	Объем продаж, кг	Средняя цена, руб/кг [гр.1 : гр.4]	Удельная себестоимость, руб/кг [гр.2 : гр.4]	Удельная прибыль, руб/кг [гр.5 – гр.6]
<b>А</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>1 год</b>	45 426 662	43 595 214	1 831 448	8 447 751	5,38	5,16	0,22
<b>2 год</b>	42 143 858	39 366 852	2 777 006	7 471 472	5,64	5,27	0,37

Как видно из табл. 3, на втором году произошел рост средней цены товаров по сравнению с предыдущим годом (с 5,38 руб. до 5,64 руб. за 1 кг) при одновременном значительном сокращении объема продаж (с 8 447 751 кг до 7 471 472 кг), то есть также явно проявились признаки, что спрос покупателей зависит от цены.



# Максимизация прибыли в примере № 2

Кроме того, из табл. 3 следует, что на втором году снижение объема продаж сопровождалось ростом себестоимости 1 кг реализуемых товаров (с 5,09 до 5,18 руб.). Составляя в соответствии с выражением (2) еще одну систему уравнений:

$$\begin{cases} [vc] + \frac{FC}{8447751} = 5,16 \\ [vc] + \frac{FC}{7471472} = 5,27 \end{cases}$$

– отыскиваем величины постоянных и удельных переменных затрат:  $FC = 7\,111\,579$  руб. и  $[vc] = 4,32$  руб. на 1 кг товаров.

Зная величины постоянных затрат  $FC$  и удельных переменных затрат  $[vc]$ , а также зависимости объема продаж от цены товара  $x$ , опять же отыскиваем **интервал безубыточности**. Для условий рассматриваемого периода минимальный объем продаж  $y_{\min}$ , при котором прибыль фирмы была бы равна нулю, находится из уравнения

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - [vc]} = \frac{FC}{\frac{y_{\min} - b}{k} - [vc]} = \frac{7111579}{\frac{y_{\min} - 28649215}{-3754919} - 4,32}$$

Решение квадратного уравнения относительно  $y_{\min}$  дает следующие две точки безубыточности: 9 665 095 кг при средней цене 5,06 руб. за 1 кг товаров и 2 762 870 кг при средней цене 6,89 руб. за 1 кг товаров. Очевидно, что предприятие находится примерно посередине между двумя точками безубыточности, все еще имея солидный резерв даже на фоне снижения спроса на 13% на втором году по сравнению первым годом в результате роста цен.



## Численные результаты примера № 2

Получив зависимость объема продаж  $y(x)$  от цены товаров  $x$ , а также зная зависимость себестоимости 1 кг товаров  $z(x)$  от их цены  $x$ , находим функцию зависимости прибыли  $P(x)$  от цены товаров  $x$ :

$$P(x) = y(x)[x - z(x)] = -3754919x^2 + 44870465x - 130876188 \quad (17),$$

В итоге, дифференцируя выражение (17) и решая полученное уравнение, отыскиваем следующие значения цены  $x$ , себестоимости  $z(x)$  и объема продаж  $y(x)$ , обеспечивающие максимум прибыли  $P(x)$  от реализации товаров:

- цена 1 кг товаров  $x = 5,97$  руб., или 105,9% ко второму году
- объем продаж  $y(x) = 6232349$  кг, то есть всего лишь 83,4% к уровню второго года;
- себестоимость 1 кг товаров  $z(x) = 5,46$  руб., или 103,6% к уровню второго года;
- прибыль на 1 кг товаров  $x - z(x) = 0,51$  руб., или же 137,8% к уровню второго года;
- выручка от продаж  $xy(x) = 37207124$  руб., что означает снижение на 11,7% по сравнению со вторым годом;
- прибыль составит  $P(x) = 3178498$  руб., то есть имеет место рост на 14,5% против второго года.

Общий вывод неутешителен, поскольку интересы организации и покупателей противоречат друг другу. При росте цен растет прибыль организации, но падает спрос, то есть страдает покупатель; при снижении же цен спрос растет, то есть покупатель выигрывает, но снижается прибыль организации. Коллизию интересов продавца и покупателя нужно понимать в том смысле, что проводимая организацией ценовая политика не учитывала платежеспособный спрос, и нуждается в корректировке через плавное снижение цен.

# Обобщение на внешне «нестандартные случаи»

А.В. Игнатов. *Время новых идей*

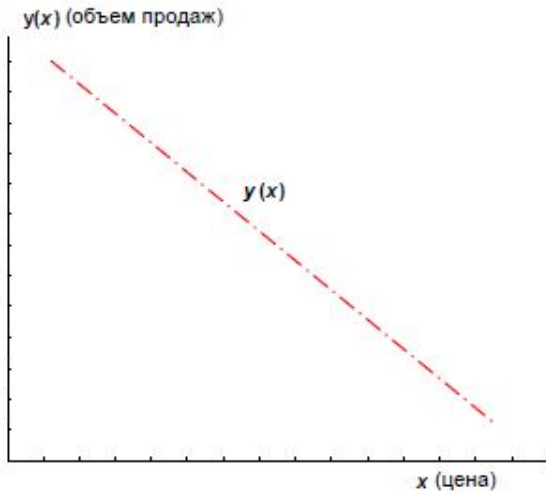


Рис. 2. Зависимость объема продаж от цены.

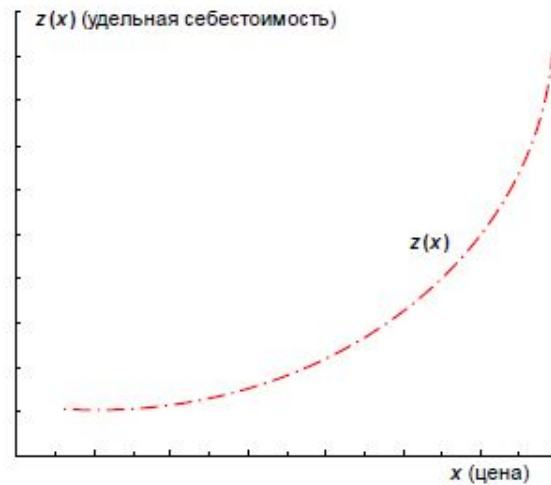


Рис. 3. Зависимость удельной себестоимости от цены

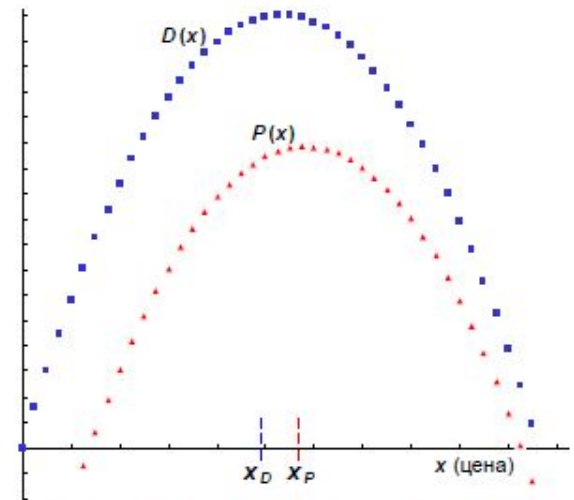


Рис. 4. Зависимость прибыли и выручки от цены

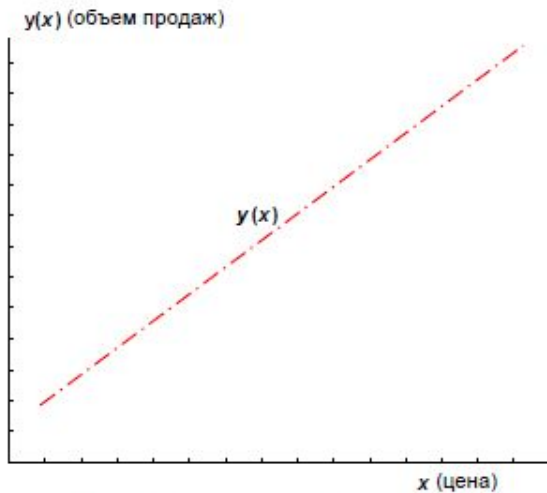


Рис. 5. Зависимость объема продаж от цены.

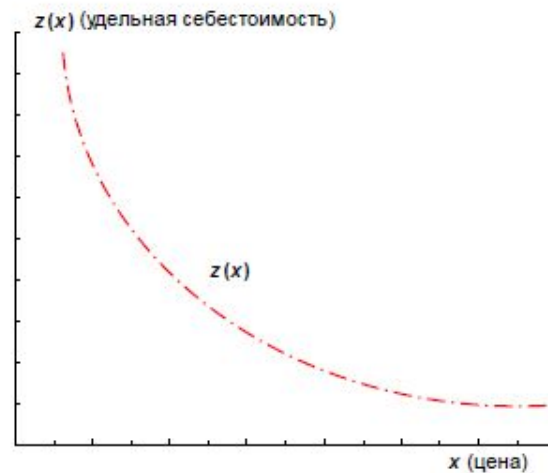


Рис. 6. Зависимость удельной себестоимости от цены

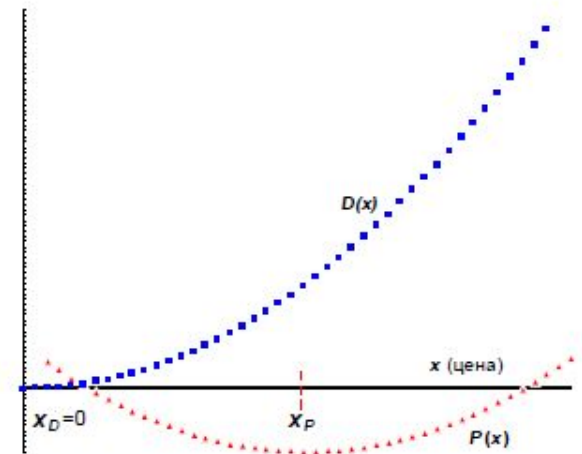


Рис. 7. Зависимость прибыли и выручки от цены



# ABC-анализ (распределение «котловых» затрат)

№	Группа товара	ЕИ	Розничная цена, руб./ЕИ	Полуная цена, руб./ЕИ	Продано, ЕИ	Коэффициенты котловых затрат						Расчетные показатели			Распределение котловых затрат, руб.						Финансовые показатели, руб.		Рентабельность, % (гр.23 : гр.13 x 100)	Равновесная цена по рентабельности, руб./ЕИ
						Вес, кг/ЕИ	по имущественным налогам (аренда)	по амортизации	по электроэнергии	по чистым трудовым затратам	по трудовым затратам и весу совокупно	выручка, руб. (гр.4 x гр.6)	полная себестоимость, руб. (гр.5 x гр.6)	вес продаж, кг	по имущественным налогам (аренда)	по амортизации	по электроэнергии	по зарплате и страховым взносам (трудозатратности)	по транспорту (по весу)	по оборотным налогам	полная себестоимость, руб. (гр.14 + гр.16-21)	Прибыль, руб. (гр.13 - гр.22)		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	Мясная продукция	кг	300	200	100	1	1,3	1,3	1,4	1,1	1,1	30 000	20 000	100	353	492	605	1 074	135	642	23 301	6 699	22,3	275
2	Колбасные изделия	кг	400	267	80	1	1,2	1,2	1,2	1	1,0	32 000	21 333	80	326	454	519	976	135	685	24 428	7 572	23,7	361
3	Рыбная продукция	кг	250	167	120	1	1,3	1,3	1,4	1,1	1,1	30 000	20 000	120	353	492	605	1 074	135	642	23 301	6 699	22,3	229
4	Молочная продукция	шт	80	53,3	100	0,7	1,2	1,2	1,2	1	0,7	8 000	5 333	70	326	454	519	683	95	171	7 581	419	5,2	90
5	Сыры, масло	кг	300	200	50	1	1,2	1,2	1,2	1	1,0	15 000	10 000	50	326	454	519	976	135	321	12 731	2 269	15,1	301
6	Растительное масло	л	100	66,7	80	0,9	1	1	1	1	0,9	8 000	5 333	72	272	378	432	878	122	171	7 587	413	5,2	112
7	Яйцо	дес	50	33,3	40	0,6	1	1	1	1	0,6	2 000	1 333	24	272	378	432	586	81	43	3 125	-1 125	-56,3	92
8	Овощи и фрукты	кг	150	100	200	1	1	1	1	1,2	1,2	30 000	20 000	200	272	378	432	1 171	135	642	23 031	6 969	23,2	136
9	Консервы овощные	шт	70	46,7	40	1,1	1	1	1	1	1,1	2 800	1 867	44	272	378	432	1 074	149	60	4 231	-1 431	-51,1	125
10	Консервы рыбные	шт	80	53,3	60	0,4	1	1	1	1	0,4	4 800	3 200	24	272	378	432	390	54	103	4 830	-30	-0,6	95
11	Консервы мясные	шт	100	66,7	30	0,4	1	1	1	1	0,4	3 000	2 000	12	272	378	432	390	54	64	3 591	-591	-19,7	141
12	Хлебобулочные	шт	40	26,7	80	0,7	1	1	1	1,1	0,8	3 200	2 133	56	272	378	432	751	95	68	4 130	-930	-29,1	61
13	Мука, крупы	кг	50	33,3	50	1	1	1	1	1	1,0	2 500	1 667	50	272	378	432	976	135	53	3 914	-1 414	-56,6	92
14	Бакалея	шт	200	133	100	0,2	1	1	1	1	0,2	20 000	13 333	20	272	378	432	195	27	428	15 066	4 934	24,7	178
15	Сахар, кондитерские	кг	200	133	80	1	1	1,1	1,1	1,1	1,1	16 000	10 667	80	272	416	476	1 074	135	342	13 381	2 619	16,4	198
16	Алкоголь	л	600	400	30	1,6	1,1	1,1	1	1	1,6	18 000	12 000	48	299	416	432	1 561	216	385	15 310	2 690	14,9	603
17	Пиво	л	120	80	70	1,2	1,1	1,1	1	1	1,2	8 400	5 600	84	299	416	432	1 171	162	180	8 261	139	1,7	139
	Итого:					14,8	18,4	18,5	18,5	17,6	15,4	233 700	155 800	1 134	5 000	7 000	8 000	15 000	2 000	5 000	197 800	35 900	15,4	

Котловые расходы:	42 000
в том числе:	
налоги (аренда)	5 000
амортизация	7 000
электроэнергия	8 000
трудозатраты	15 000
транспорт	2 000
оборотные налоги	5 000

# Расчет средней цены по группе товаров

№	Наименование товара	ЕИ	Розничная цена, руб./ЕИ	Покупная цена, руб./ЕИ	Остаток на складе, ЕИ	Произведение по розничной цене (гр.4 x гр.6)	Произведение по покупной цене (гр.5 x гр.6)
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Ветчина	кг	465	310	150	69 810	46 540
2	Колбаса докторская	кг	320	213	200	64 000	42 667
3	Колбаса молочная	кг	310	207	200	62 000	41 333
4	Колбасам телячья	кг	650	433	50	32 500	21 667
5	Сырокопченая	кг	620	413	70	43 400	28 933
6	Копченая	кг	600	400	70	42 000	28 000
7	Полукопченая	кг	580	387	100	58 000	38 667
8	Сосиски	кг	370	247	150	55 500	37 000
9	Сардельки	кг	330	220	100	33 000	22 000
10	Паштет	кг	160	107	100	16 000	10 667
			400	267	1 190	476 210	317 473

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^k (X_i n_i)}{\sum_1^k n_i}$$

$\bar{X}$  – средневзвешенная цена, руб./ЕИ;

$X_i$  – розничная или покупная цена, руб./ЕИ;

$n_i$  – остаток на складе, ЕИ;

$i$  – вид товара (от 1 до  $k$ );