Иррациональные уравнения и их системы.

Определение. ***Иррациональным уравнением*** *называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, или под знаком возведения в дробную степень.*

Так, иррациональными являются уравнения:

$$\sqrt{x+3} = 2x - 1; \qquad \sqrt{x-1} - 12\sqrt[3]{x} = 3;$$

$$2x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0; \qquad (2x - x)^{\frac{1}{3}} = (x+6)^{\frac{1}{4}} + 7x.$$

Для того, чтобы решить иррациональное уравнение, вначале нужно обратить внимание на вид данного уравнения. Это позволяет выяснить, есть ли смысл решать уравнение вообще, а если да, то каким способом.

К примеру, нет смысла приступать к решению уравнения $\sqrt[4]{x+3} = -2$, так как значение арифметического корня не может быть отрицательным числом.

При решении иррациональных уравнений корни (радикалы), входящие в уравнения, всегда рассматриваются как арифметические корни. Для выяснения этого факта нужно определить ОДЗ переменной, содержащейся под знаком корня.

Общий метод решения иррациональных уравнений заключается в следующем:

а) если иррациональное уравнение содержит только один радикал, то нужно преобразовать уравнение так, чтобы в одной его части оказался только этот радикал. Затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, чтобы получилось рациональное уравнение;

б) если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.

При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень иногда получается уравнение, не равносильное данному. Поэтому необходимо проверить, удовлетворяют или не удовлетворяют найденные значения переменной искомому уравнению. Проверка является составной частью решения, поскольку некоторые найденные значения переменной могут не удовлетворять исходному уравнению.

Такие значения переменной называют посторонними корнями.

Рассмотрим примеры решения иррациональных уравнений.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $\sqrt{x+2} = x$.

Решение. Возведем обе части уравнения $\sqrt{x+2} = x$ в квадрат. Тогда получим: $x + 2 = x^2$. Квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ имеет корни: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Проверка. 1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2+2} = 2$; $2 = 2$ — верно.

2) $x = -1$, тогда $\sqrt{-1+2} = -1$; $1 = -1$ — неверно.

Следовательно, $x = -1$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $(x - 5)(x + 2)\sqrt{x-7} = 0$.

Решение. Найдем ОДЗ переменной $x - 7 > 0$ или $x > 7$. Следовательно, $x \in [7; +\infty)$. Исходное уравнение может быть заменено совокупностью уравнений $x - 5 = 0$, $x + 2 = 0$, $\sqrt{x-7} = 0$.

Решая эти уравнения получим: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 7$ (x_1 и x_2 не входят в область допустимых значений данного уравнения).

Ответ: 7.

ПРИМЕР

3. Решим уравнение $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.

Решение. Уравнение содержит всего один радикал; оставляем его в левой части равенства, или, как говорят, отделяем радикал, перенося единицу в правую часть: $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$. Возведем обе части полученного уравнения в квадрат и получим:

$x^2+5x+1=(2x-1)^2$ или $x^2+5x+1=4x^2-4x+1$.

Отсюда $3x^2-9x=0$, $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$, $x_1=0$ и $x_2=3$.

Проверка. $\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}+1\neq 2\cdot 0$. Следовательно, первый корень $x=0$ не удовлетворяет уравнению и является посторонним корнем (этот корень не принадлежит ОДЗ переменной, что легко проверить). Таким же путем убеждаемся, что второй корень $x_2=3$ удовлетворяет заданному уравнению.

Ответ: 3.

При решении иррациональных уравнений в отдельных случаях используется *способ введения новых переменных.*

Этот способ применяется с целью приведения иррационального уравнения сложного вида к более простому.

ПРИМЕР

4. Решим уравнение $\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0$.

Решение. Обозначим: $y = \sqrt[8]{x}$. Получим уравнение: $y^2 + y - 2 = 0$, которое имеет корни: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$.

Следовательно, $\sqrt[8]{x} = 1$ или $\sqrt[8]{x} = -2$. Корень первого уравнения: $x_1 = 1$. Второе уравнение не имеет корней, так как $\sqrt[8]{x} > 0$. Таким образом, решением исходного уравнения является число 1.

Ответ: 1.

ПРИМЕР

5. Решим уравнение $\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1, \text{ или } -x\sqrt{x^2 - 1} = x(x - 2).$$

Было бы ошибкой "сократить" обе части уравнения на x, так как при этом можно потерять корень, поэтому преобразуем:

$$-x\sqrt{x^2 - 1} - x(x - 2) = 0, \text{ или } -x\left(\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)\right) = 0,$$

$$-x = 0 \text{ или } \sqrt{x^2 - 1} + x - 2 = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } \sqrt{x^2 - 1} = -x + 2.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ отсюда } x = \frac{5}{4}.$$

П р о в е р к а. Найденные значения переменной x подставляем в исходное уравнение. Выясняем, что $x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению, а при $x = \frac{5}{4}$ получаем верное числовое равенство. Следовательно, корнем исходного уравнения является число $\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

ПРИМЕР

6. Решим уравнение $(x+34)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{x-3} = 1$.

Решение. Вначале степень с дробным показателем запишем в виде корня. Тогда получим уравнение $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$. Последнее уравнение приведем к виду: $\sqrt[3]{x+34} = 1 + \sqrt[3]{x-3}$ и возведем обе части уравнения в третью степень:

$$x + 34 = 1 + 3\sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{(x-3)^2} + x - 3,$$

$$36 = 3\sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{(x-3)^2} \text{ или } \sqrt[3]{(x-3)^2} + \sqrt[3]{x-3} - 12 = 0.$$

Обозначив $y = \sqrt[3]{x-3}$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 12 = 0$, которое имеет корни: $y_1 = 3$, $y_2 = -4$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\sqrt[3]{x-3} = 3 \text{ или } \sqrt[3]{x-3} = -4.$$

Возведя обе части уравнений в третью степень соответственно получаем: $x - 3 = 27$ или $x - 3 = -64$; отсюда, $x = 30$ или $x = -61$.

При проверке убеждаемся, что оба значения x удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: 30; −61.

…

Определение. *Система уравнений, содержащая иррациональные уравнения, называется* ***системой иррациональных уравнений.***

При решении системы иррациональных уравнений в основном используются способы решения рациональных уравнений и систем рациональных уравнений.

Рассмотрим пример решения системы иррациональных уравнений :

ПРИМЕР

7. Решим систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35 \end{cases}$.

Решение. Вначале введем новые переменные: $\sqrt[3]{x} = a$, $\sqrt[3]{y} = b$. Тогда данная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a + b = 5, \\ a^2 - ab + b^2 = 7. \end{cases}$$

Решая методом подстановки последнюю систему уравнений получим $a = 2$, $b = 3$ и $a = 3$, $b = 2$. Перейдя к замене $\sqrt[3]{x} = a$ и $\sqrt[3]{y} = b$, имеем $\sqrt[3]{x} = 2$, $\sqrt[3]{y} = 3$ и $\sqrt[3]{x} = 3$, $\sqrt[3]{y} = 2$. Чтобы найти значения переменных x и y, каждое полученное иррациональное уравнение возводим в третью степень.

Тогда: $x_1 = 8$, $y_1 = 27$ и $x_2 = 27$, $y_2 = 8$.

Проверка: 1) $x = 8$ и $y = 27$, тогда $\begin{cases} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5, \\ 8 + 27 = 35; \end{cases}$

2) $x = 27$ и $y = 8$, тогда $\begin{cases} \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 5, \\ 27 + 8 = 35. \end{cases}$

Все найденные значения переменных x и y удовлетворяют системе уравнений.

Ответ: (8; 27) и (27; 8).

Домашнее задание:

Краткий конспект

рассмотреть примеры решения

Решить № 14.1 -14.3, №14.5

Решите уравнения (14.1—14.4):

14.1. 1) $\sqrt{x} = 3$; 2) $\sqrt{x-3} = 2$;

3) $\sqrt{x} = 2 - x$; 4) $\sqrt{x-2} = \frac{x}{3}$.

14.2. 1) $\sqrt[3]{x+2} = 3$; 2) $\sqrt[4]{x-3} = 2$;

3) $3 + \sqrt{x+3} = x$; 4) $5 + \sqrt{x+1} = x$.

14.3. 1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$; 2) $x + \sqrt{2x} - 4 = 0$;

3) $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{x+5} = 0$; 4) $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{x+5} = 0$.

14.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y = 13. \end{cases}$