

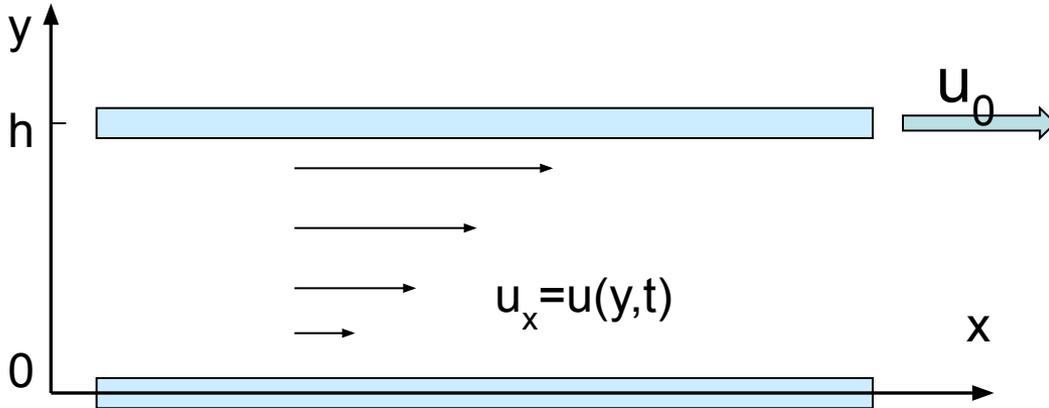
Динамика вязкой жидкости

Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u}$$

Простейшие примеры течений вязкой жидкости

I. Движение жидкости между движущимися плоскостями



Течение стационарно,
одномерно и зависит
только от y

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u}$$

Проекция уравнения Навье -Стокса на
ось x

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Проекция уравнения Навье-Стокса на
ось y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно (**проверить**)

I. Движение жидкости между движущимися плоскостями (продолжение)

Решение: $p = const$ $u = ay + b$

Граничные условия:

$u = u_0$ при $y = h$ \longrightarrow $a = u_0 / h$
 $u = 0$ при $y = 0$ \longrightarrow $b = 0$

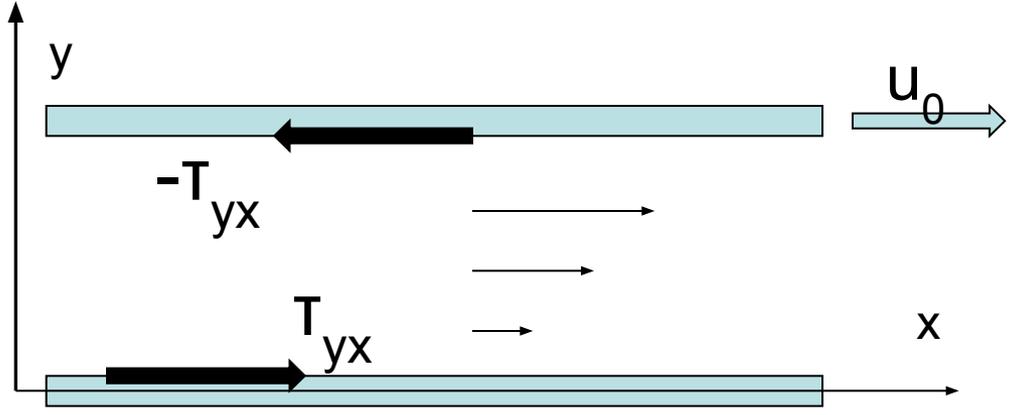
$$u = \frac{y}{h} u_0$$

Распределение скоростей между пластинами линейно

Сила трения, действующая на пластины

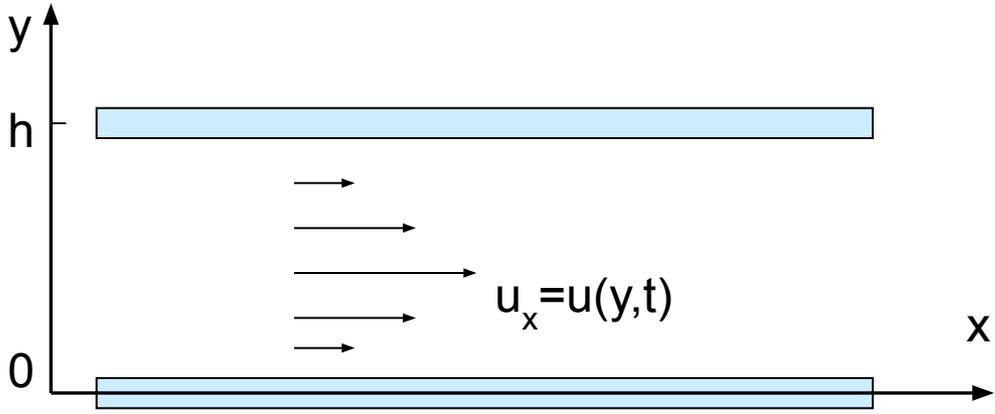
$$\tau_{yx}(y = 0) = -j\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{u_0}{h}$$

$$\tau_{yx}(y = h) = (-\bar{j})\mu \frac{u_0}{y} \Big|_{y=h}$$



Суммарная сила на жидкость = 0

II. Движение жидкости между неподвижными плоскостями



Жидкость течет за счет силы - градиента давления dp/dx

Течение стационарно и одномерно, т.е. $u_y = 0$ $u_x = u(y, t)$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u}$$

Уравнение Навье Стокса на ось y : $\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \implies p = p(x)$

Уравнение Навье Стокса на ось x : $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \implies$ Левая часть ур. зависит только от y, а правая – только от x

Это выполняется только если $dp/dx = \text{const}$!

II. Движение жидкости между неподвижными плоскостями (продолжение)

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \text{const} \quad \longrightarrow \quad u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + ay + b$$

Граничные условия:

$$u_x = 0 \text{ при } y=0, y=h$$



$$b=0 \quad a = -\frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

Решение с учетом гран. условий

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h)$$

Течение имеет параболический профиль

Средняя скорость

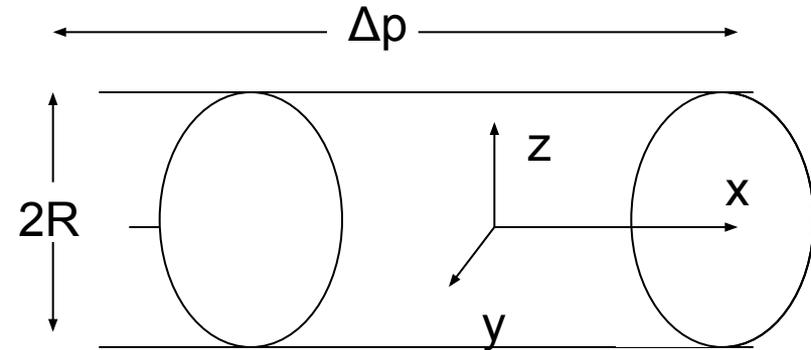
$$u_{\text{сред}} = \frac{1}{h} \int_0^h u_x(y) dy = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

Сила, действующая на плоскость

$$\tau_{yx}(y=0) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{h}{2} \frac{dp}{dx}$$

*Сила, действующая на плоскости не зависит от вязкости !?
Как это объяснить?*

III. Течение вязкой жидкости по трубе



Течение направлено и однородно вдоль трубы – оси x и зависит лишь от радиуса.

$$u_x = u(r)$$

Проекция уравнения Н-С на ось y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad P \text{ не зависит от } y$$

Проекция уравнения Н-С на ось z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad P \text{ не зависит от } z$$

Проекция уравнения Н-С на ось x

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta_{y,z} u_x \quad \longrightarrow \quad dp/dx = \text{const} = -\Delta p/l$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{\mu \cdot l}$$

III а. Течение вязкой жидкости по трубе кругового сечения

В полярных координатах: r, θ, x

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u_x \right) = - \frac{\Delta p}{\mu l}$$

Решение

$$u_x = - \frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + a \ln r + b$$

Скорость конечна во всем сечении трубы, поэтому $a=0$

Гран. Условие при $r=R$: $u_x=0$

$$b = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$$

$$u_x = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

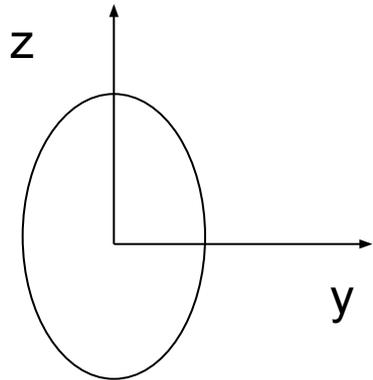
Расход жидкости – масса жидкости, протекающая в единицу времени через сечение трубы

$$Q = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} R^4$$

Формула Пуазейля

III б. Течение вязкой жидкости по трубе эллиптического сечения

Труба эллиптического сечения



$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{dp}{dx} = \mu \Delta_{y,z} u_x = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

Общее решение

$$u_x = Ay^2 + Bz^2 + C$$

Решение должно удовлетворять граничному условию: $u=0$ на эллипсе, т.е.

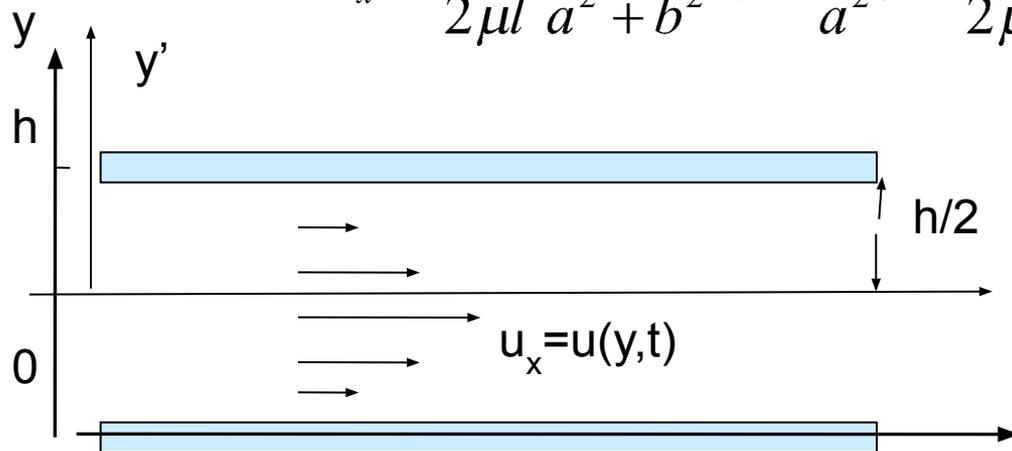
$$\longrightarrow u_x = Ay^2 + Bz^2 + C = 0$$

$$u_x = \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right)$$

При b или $a \rightarrow \infty$
переходим к случаю 2-х // плоскостей

Предельный переход от трубы эллиптического сечения к параллельным плоскостям ($b \gg a$)

$$u_x = \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \approx \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) = \frac{\Delta p}{2\mu l} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$



Было решение для двух плоскостей

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y - h)$$

$$y' = y - h/2 \quad \longrightarrow \quad u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \frac{h^2}{4} \left[1 - \frac{y'^2}{(h/2)^2}\right]$$

Уравнение Навье – Стокса с потенциальными силами

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u}$$

$$\bar{F} = \nabla U$$

$$(\bar{u} \nabla) \bar{u} = \frac{1}{2} \nabla(u^2) - [\bar{u} \cdot \text{rot} \bar{u}]$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = [\bar{u} \cdot \text{rot} \bar{u}] + \nu \Delta \bar{u}$$

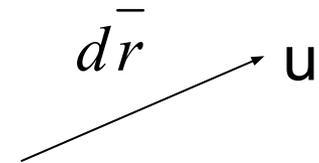
Стационарное течение жидкости

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = [\bar{u} \cdot \text{rot} \bar{u}] + \nu \Delta \bar{u}$$

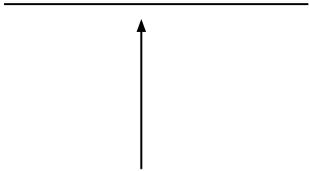
$d\bar{r}$

Умножаем скалярно на элемент линии тока, $d\bar{r} \parallel \mathbf{u}$

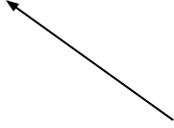
$$d \left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = d\bar{r} \cdot \nu \Delta \bar{u}$$



$$d\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = d\bar{r} \cdot \nu \Delta \bar{u}$$



 Удельная механическая
 энергия единицы массы



 Работа сил вязкости

Т.о. изменение механической энергии жидкости вдоль линий тока равно работе вязких сил dA – диссипируемая энергия

$$dA_v = -d\bar{r} \cdot \nu \Delta \bar{u}$$

1

2