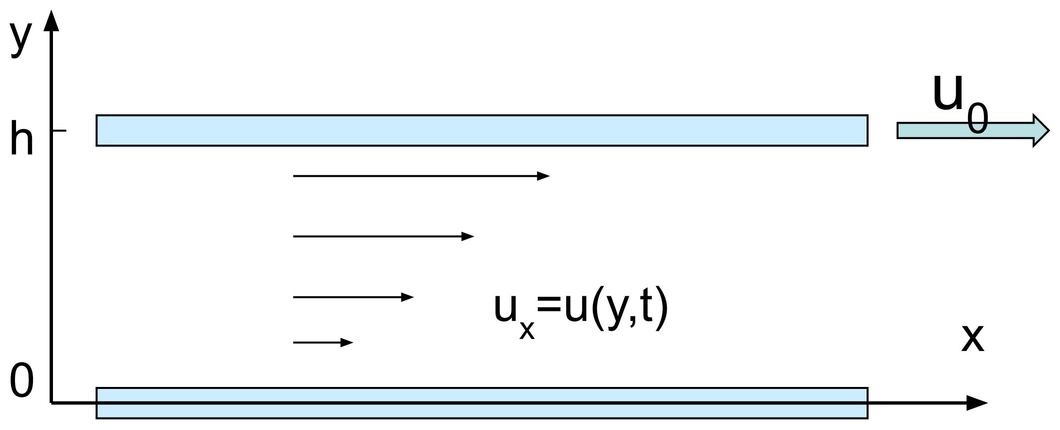
Динамика вязкой жидкости

Уравнение Навье-Стокса

$$\boxed{\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\overline{u}\nabla)\overline{u} = \overline{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\overline{u}}$$

Простейшие примеры течений вязкой жидкости

I. Движение жидкости между движущимися плоскостями



Течение стационарно, одномерно и зависит **только от y**

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u}}$$

Проекция уравнения Навье -Стокса на ось x

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Проекция уравнения Навье-Стокса на ось y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно (проверить)

I. Движение жидкости между движущимися плоскостями (продолжение)

Решение: $p = const$ $\qquad u = ay + b$

Граничные условия:

$u=u_0$ при $y=h$ $\Rightarrow$ $a=u_0/h$

$u=0$ при $y=0$ $\Rightarrow$ $b=0$

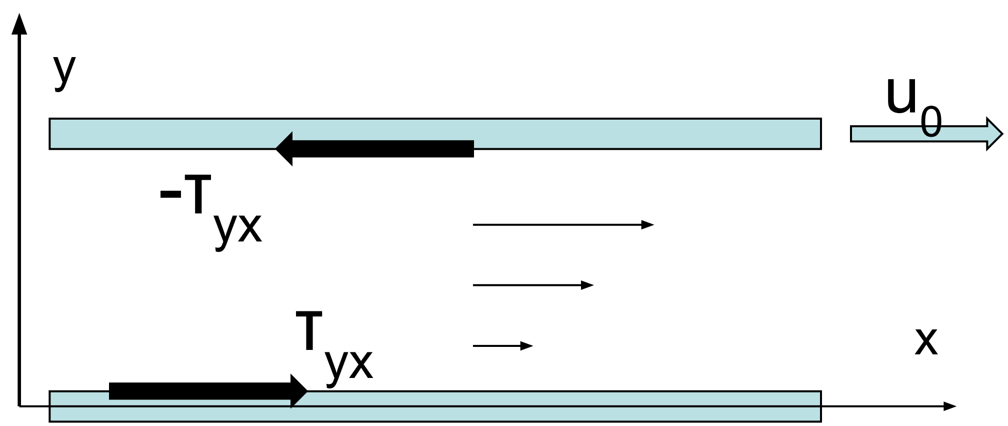
$$u = \frac{y}{h}u_0$$

Распределение скоростей между пластинами линейно

Сила трения, действующая на пластины

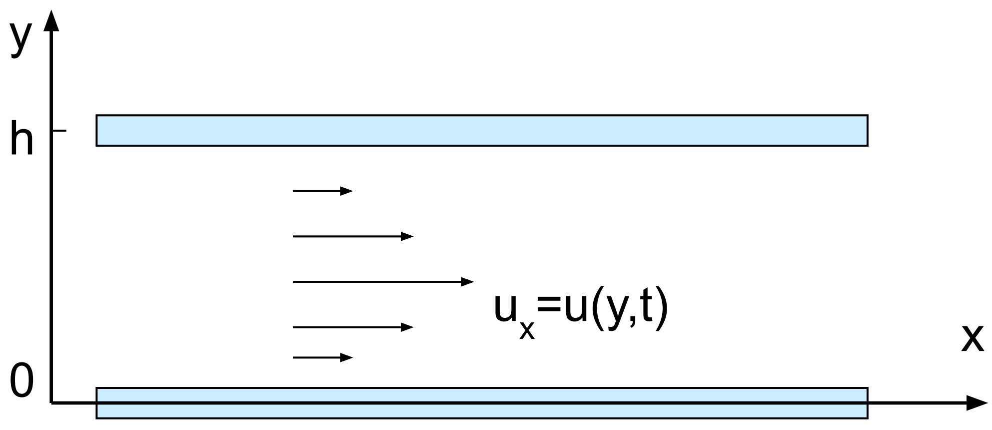
$$\tau_{yx}(y=o) = \bar{j}\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu\frac{u_0}{h}$$

$$\tau_{yx}(y=h) = (-\bar{j})\mu \left.\frac{u_0}{y}\right|_{y=h}$$



Суммарная сила на жидкость =0

II. Движение жидкости между неподвижными плоскостями



Жидкость течет за счет силы - градиента давления dp/dx

Течение стационарно и одномерно, т.е. $u_y = 0$ $u_x = u(y,t)$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u}}$$

Уравнение Навье Стокса на ось y : $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ $\Longrightarrow$ $p=p(x)$

Уравнение Навье Стокса на ось x : $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$ $\Longrightarrow$ Левая часть ур. зависит только от y, а правая – только от x

Это выполняется только если dp/dx= const !

II. Движение жидкости между неподвижными плоскостями (продолжение)

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = const \quad \Longrightarrow \quad u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y^2 + ay + b$$

Граничные условия:

u_x=0 при y=0, y=h $\Longrightarrow$ b=0 $\quad a = -\frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx}$

Решение с учетом гран. условий

$$\boxed{u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y(y-h)}$$

Течение имеет параболический профиль

Средняя скорость

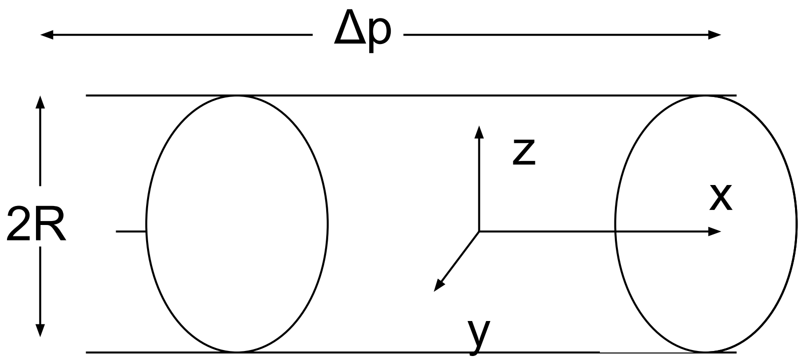
$$u_{x\text{сред}} = \frac{1}{h}\int_0^h u_x(y)dy = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

Сила, действующая на плоскость

$$\tau_{yx}(y=o) = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$

Сила, действующая на плоскости не зависит от вязкости !?
Как это объяснить?

III. Течение вязкой жидкости по трубе



Течение направлено и однородно вдоль трубы – оси *x* u зависит лишь от радиуса.

$u_x = u(r)$

Проекция уравнения Н-С на ось y $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$ ⟹ P не зависит от y

Проекция уравнения Н-С на ось z $\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0$ ⟹ P не зависит от z

Проекция уравнения Н-С на ось x $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta_{y,z} u_x$ ⟹ dp/dx=const=-Δp/l

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{\mu \cdot l}$$

III а. Течение вязкой жидкости по трубе кругового сечения

В полярных координатах: r, θ, x

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u_x\right) = -\frac{\Delta p}{\mu l}$$

Решение

$$u_x = -\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2 + a\ln r + b$$

Скорость конечна во всем сечении трубы, поэтому a=0

Гран. Условие при r=R : u_x=0

$$b = \frac{\Delta p}{4\mu l}R^2$$

$$\boxed{u_x = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)}$$

Расход жидкости – масса жидкости, протекающая в единицу времени через сечение трубы

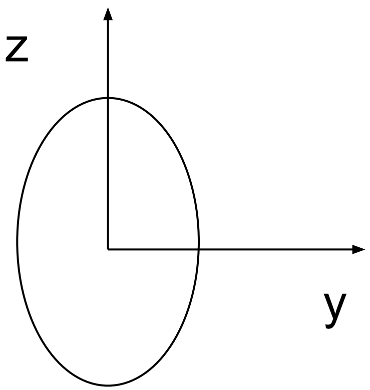
$$\boxed{Q = \int_0^R 2\pi r u(r)dr = \frac{\pi\Delta p}{8\mu l}R^4}$$

Формула Пуазейля

III б. Течение вязкой жидкости по трубе эллиптического сечения

Труба эллиптического сечения

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$



$$\frac{dp}{dx}=\mu\Delta_{y,z}u_x=\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

Общее решение

$$u_x=Ay^2+Bz^2+C$$

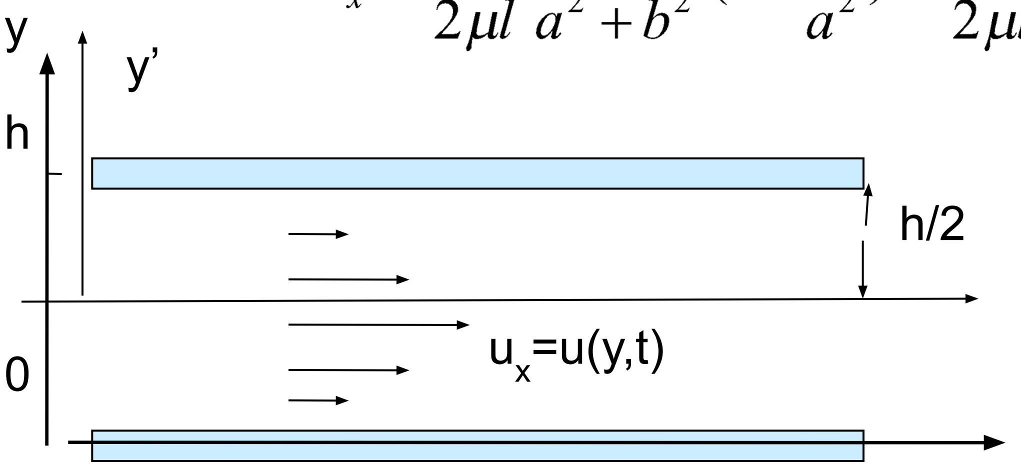
Решение должно удовлетворять гран. условию: u=0 на эллипсе, т.е. $\longrightarrow$ $u_x=Ay^2+Bz^2+C=0$

$$u_x=\frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$$

При b или a $\longrightarrow \infty$ переходим к случаю 2-х // плоскостей

Предельный переход от трубы эллиптического сечения к параллельным плоскостям (b>>a)

$$u_x = \frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}(1-\frac{y^2}{a^2}) \approx \frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{a^2 b^2}{b^2}(1-\frac{y^2}{a^2}) = \frac{\Delta p}{2\mu l}a^2(1-\frac{y^2}{a^2})$$



Было решение для двух плоскостей

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(y-h)$$

$$y' = y - h/2 \Longrightarrow u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{l}\frac{h^2}{4}[1-\frac{y'^2}{(h/2)^2}]$$

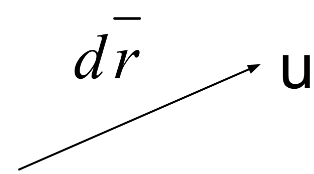
Уравнение Навье –Стокса с потенциальными силами

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\bar{u}$$

$$\bar{F} = \nabla U$$

$$(\bar{u}\nabla)\bar{u} = \frac{1}{2}\nabla(u^2) - [\bar{u}\cdot rot\bar{u}]$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = [\bar{u}\cdot rot\bar{u}] + \nu\Delta\bar{u}}$$



Стационарное течение жидкости

$$\nabla\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = [\bar{u}\cdot rot\bar{u}] + \nu\Delta\bar{u} \quad \Big| \quad d\bar{r}$$

Умножаем скалярно на элемент линии тока, dr // u

$$d\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = d\bar{r}\cdot\nu\Delta\bar{u}$$

$$d\left(\frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = d\bar{r} \cdot \nu \Delta \bar{u}$$

Работа сил вязкости

Удельная механическая
энергия единицы массы

Т.о. изменение механической энергии жидкости вдоль линий тока
равно работе вязких сил dA – диссипируемая энергия

$$dA_\nu = -d\bar{r} \cdot \nu \Delta \bar{u}$$