Алгебраические уравнения

Задание №5, 7, 11, 12, 17, 18 ЕГЭ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$f_1(x) = g_1(x) \longrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

$$f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x),$$

деление на h(x) недопустимо!

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$$

$$\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$$

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

$$\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$$

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2};$$

Домашнее задание по блоку алгебраические уравнения

$$(x+\sqrt{x^2-1})^5(x-\sqrt{x^2-1})^3=1.$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}.$$

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3.$$

$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$$

$$\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2.$$

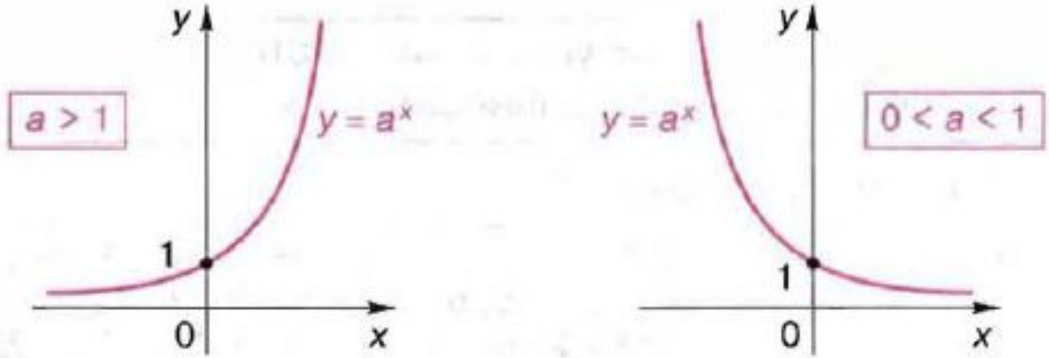
$$\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$$

Логарифмические и показательные уравнения

Основные свойства и формулы

Показательная функция и ее свойства

Показательной функцией называется функция $y = a^x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.



Свойства показательной функции $y = a^x$

1. Область определения функции — множество **R** всех действительных чисел.
2. Область значений функции — множество всех положительных чисел.
3. Монотонность функции:

   если $a > 1$ функция является возрастающей на множестве всех действительных чисел;
   если $0 < a < 1$ функция является убывающей.

   Примеры. $y = 2^x$, $a = 2$, $a > 1$ — функция возрастающая;

   $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $a = \frac{1}{2}$, $0 < a < 1$ — функция убывающая.

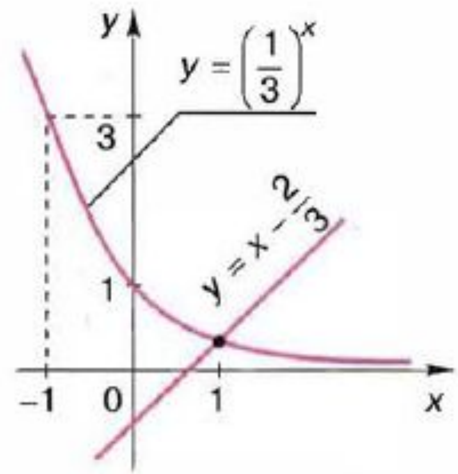
Графики всех показательных функций проходят через точку (0; 1) и расположены выше оси Ox, т. к. $a^x > 0$.

Пример. Решить графически уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$$

Решение. Построим графики функций

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ и } y = x - \frac{2}{3}.$$



Из рисунка видно, что графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x = 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень данного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

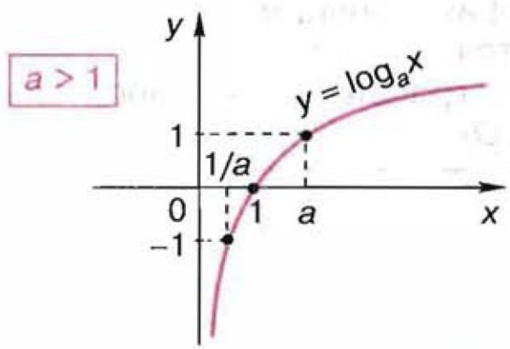
Логарифмическая функция и ее свойства

Функция $y = \log_a x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$, называется **логарифмической функцией**.

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$

1. Область определения функции — множество всех положительных чисел ($x > 0$).
2. Область значений функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
3. Монотонность функции:
   если $a > 1$, то функция является возрастающей;
   если $0 < a < 1$, то функция является убывающей.
4. Промежутки постоянного знака:

Значения аргумента	$a > 1$	$0 < a < 1$
$0 < x < 1$	$y < 0$	$y > 0$
$x > 1$	$y > 0$	$y < 0$



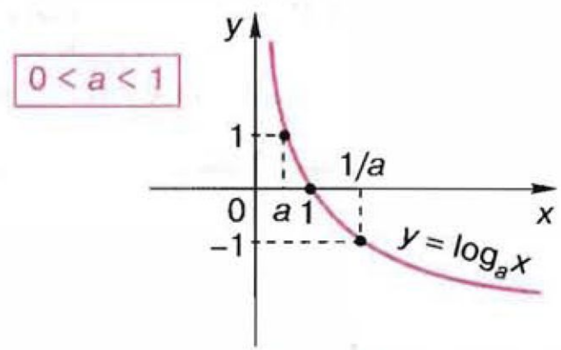


График логарифмической функции $y = \log_a x$ расположен правее оси Oy и проходит через точку (1; 0).

Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени x, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b.

Обозначение: $\log_a b = x$.

Запись $\log_a b = x$ равносильна $a^x = b$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$\log_2 8 = 3$	$\Leftrightarrow$	$2^3 = 8$
$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	$\Leftrightarrow$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$
$\log_7 7 = 1$	$\Leftrightarrow$	$7^1 = 7$
$\log_4 1 = 0$	$\Leftrightarrow$	$4^0 = 1$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$4^{\log_4 5} = 5; \quad 2^{\log_2 8} = 8$$

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$)

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \rightarrow \log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18 \cdot 2 = \log_6 36 = 2$
2. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \rightarrow \log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$
3. $\log_a b^r = r\log_a b \rightarrow \log_2 8^4 = 4\log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\log_{\sqrt{2}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 16}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = 4 : \frac{1}{2} = 8$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e ($e = 2{,}718...$) и пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Логарифмирование и потенцирование

Логарифмирование — это преобразование, при котором выражение с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

Дано: $x = \dfrac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Найти: $\lg x$.

Решение. $\lg x = \lg\dfrac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)} = \lg(3a^2\sqrt[5]{b^3}) - \lg(c^4(a+b)) =$

По свойству логарифмов 2.

$= (\lg 3 + \lg a^2 + \lg\sqrt[5]{b^3}) - (\lg c^4 + \lg(a+b))$.

По свойству логарифмов 1.

Используя свойство логарифмов 3 и раскрывая скобки, получаем:

Ответ: $\lg x = \lg 3 + 2\lg a + \dfrac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a+b)$.

Потенцирование — это преобразование, обратное логарифмированию.

Дано: $\lg x = 2\lg a - 5\lg b + \dfrac{3}{7}\lg c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Найти выражение для x.

Решение. Потенцируя получаем:

$$\lg x = \lg a^2 - \lg b^5 + \lg\sqrt[7]{c^3} = \lg\frac{a^2\sqrt[7]{c^3}}{b^5}.$$

По свойству логарифмов 3.

По свойствам логарифмов 1 и 2.

Ответ: $x = \dfrac{a^2\sqrt[7]{c^3}}{b^5}$.

Логарифм основания равен единице:

$$\log_a a = 1\,.$$

Логарифм единицы равен нулю:

$$\log_a 1 = 0\,.$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\,,\ \text{или}\ \log_a b \cdot \log_b a = 1\,;$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b \quad \left(p \in \boldsymbol{R},\, p \neq 0\right).$$

Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

равносильно каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)$$

$\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a\left(f(x)\right)^p$, где p – четное число;

$$\log_a\left(f(x)\,g(x)\right) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|,$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|,$$

$\log_a\left(f(x)\right)^p = p\log_a|f(x)|$, p – четное число.

$$2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}} \cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}} = 5^{10} \cdot 0{,}1^{5}.$$

$$2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400 .$$

$$\log_2 3 + 2\log_4 x = x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}.$$

1. Найдите корень уравнения $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

2. Найдите корень уравнения $(3x + 15)^2 = (3x - 9)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

3. Найдите корень уравнения $(x - 5)(x - 3) + 1 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{5x-1}=2x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-7}=7$.

6. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+3} = \frac{1}{2}$.

7. Найдите корень уравнения $9^{1-x} = \frac{1}{3}$.

8. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+63} = 7^{x+21}$.

9. Найдите корень уравнения: $\log_9(5+x)=3$.

10. Найдите корень уравнения $\lg(-5x+2)=-1$.

11. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x-7}=2$.

12. Найдите корень уравнения $\sqrt{18-2x}=6$.

13. Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x)=3$.

14. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5x+57}{7}}=9$.

15. Найдите корень уравнения $\log_2(7+4x)=\log_2(3+4x)+1$.

16. Найдите корень уравнения $6^{5-3x}=0{,}36\cdot 10^{5-3x}$.

17. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$.

18. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$.

19. Найдите корень уравнения $5^{-x} = 125$.

20. Найдите корень уравнения $\sqrt{x-3} = 6$.

Домашнее задание

Зачетные задания

1. Найдите корень уравнения $\frac{6x+1}{2x-4}=5$.

2. Найдите корень уравнения $6x=1+\frac{1}{x}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

3. Найдите корень уравнения $2\sqrt{11+2x}=x+3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

4. Найдите корень уравнения $216^{4-x}=36^{\frac{3}{2}x}$.

5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x+2}=\left(\frac{1}{22}\right)^{x^2-3x+2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

6. Найдите корень уравнения $\log_5(-5x+13)=3$.

7. Найдите корень уравнения $\log_{2x+3}7=0{,}5$.

8. Найдите корень уравнения $\log_{27}(8x+21)=\frac{\log_3(7-6x)}{3}$.

9. Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(x+1)}{33}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

10. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg}(-\pi x)=-1$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

11. Найдите корень уравнения $(2x+7)^2=(2x-5)^2$.

12. Найдите корень уравнения $\frac{5x-4}{6}=\frac{4x-5}{5}$.

13. Найдите корень уравнения $(x-8)^2=-32x$.

14. Найдите корень уравнения $\frac{1}{11}x^2=9\frac{1}{11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

15. Найдите корень уравнения $\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x}$.

16. Найдите корень уравнения $\sqrt{20-3x}=\sqrt{5}$.

17. Найдите корень уравнения $\sqrt{11+5x}=x+3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

18. Найдите корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{12}=-0{,}5$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

19. Найдите корень уравнения $2^x\cdot 3^x=36^{x-4}$.

20. Найдите корень уравнения $2\log_4(3x-5)=\log_2(15-x)$.