Урок

Геометрия 8

11. 04. 19

Классная работа

Признаки подобия треугольников

Мы докажем два признака подобия треугольников. Доказанные ранее признаки равенства треугольников являются частными случаями признаков подобия треугольников.

Теорема 11(первый признак подобия треугольников). **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.**

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$

Д - ть: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

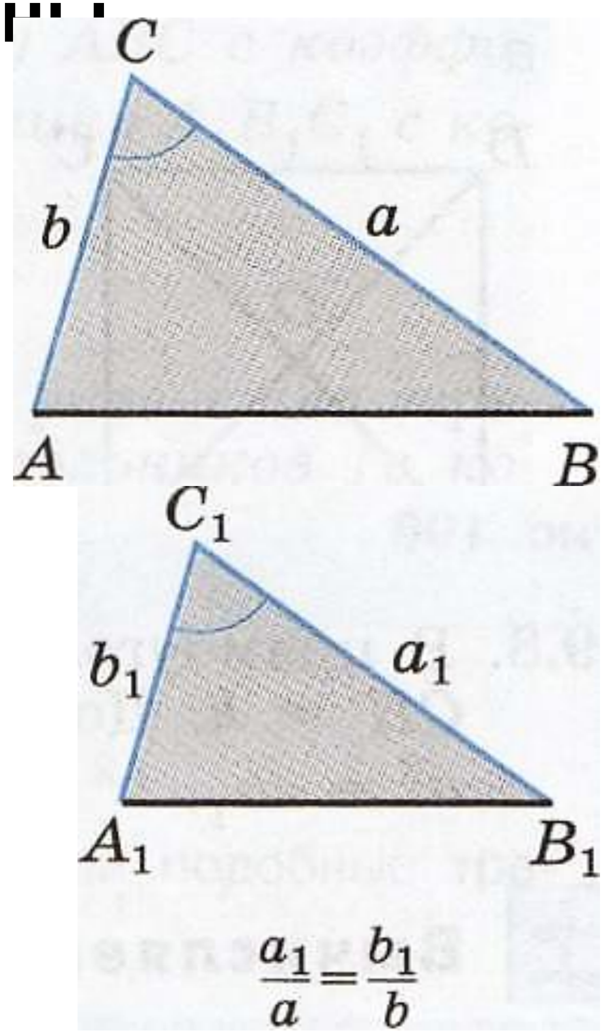
Д - во:

1) **Тогда, используя введённые обозначения, имеем равенства**
   $a_1 = k \cdot a$, $b_1 = k \cdot b$ **т. е. выполняются два из трёх равенств**

2) **Докажем, что выполняется и третье равенство, т. е. что**
   $c_1 = k \cdot c$

3) **По теореме косинусов:**
   $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos C_1 = (ka)^2 + (kb)^2 - 2(ka)(kb)\cos C =$
   $= k^2(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) = k^2c^2 = (kc)^2$

4) $c_1^2 = (kc)^2 \Rightarrow c_1 = kc$



Теорема 12(второй признак подобия треугольников). **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$

Д - ть: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

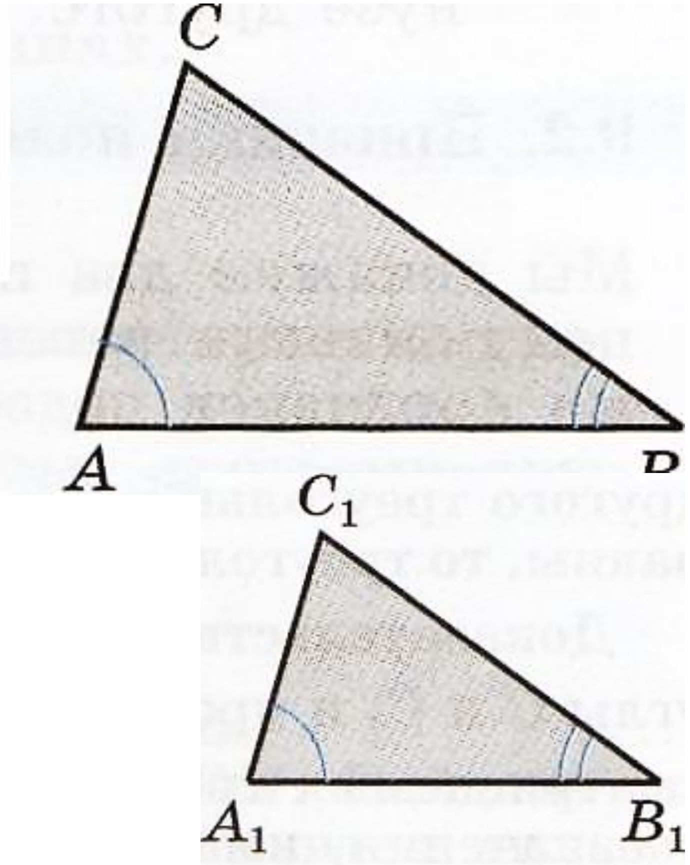


Рис. 198

1) Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\angle C = \angle C_1$
2) Докажем пропорциональность сторон ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
3) $\sin A = \sin A_1$, $\sin B = \sin B_1$, $\sin C = \sin C_1$
4) Согласно теореме синусов стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов треугольника. Поэтому

$$a = p\sin A,\ b = p\sin B,\ c = p\sin C$$

и

$$a_1 = q\sin A_1,\ b_1 = q\sin B_1,\ c_1 = q\sin C_1$$

5) Получаем $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$ т. е. стороны рассматриваемых треугольников пропорциональны и эти треугольники подобны.

Замечание.

Отметим, что первый признак подобия треугольников вытекает из теоремы косинусов, а второй — из теоремы синусов.

Дополняем теорию

9. 12

Хорда треугольника, параллельная его стороне, отсекает от него треугольник, подобный данному. Докажите. Проверьте обратное. Какие следствия вы можете получить из доказанного утверждения?

9. 13

Пусть две параллельные прямые пересекаются тремя (или более) прямыми, проходящими через одну и ту же точку, не лежащую на данных параллельных прямых. Докажите, что на параллельных прямых получились пропорциональные отрезки.

Рассуждаем

9.14. Два угла одного треугольника равны 70° и 80°, а два угла другого треугольника равны 30° и 80°. Подобны ли эти треугольники?

9.15. Какие признаки подобия прямоугольных и равнобедренных треугольников можно получить как непосредственные следствия двух признаков подобия треугольников? А какие уже известные вам признаки подобия прямоугольных и равнобедренных треугольников не являются следствиями общих признаков подобия треугольников?

Смотрим

9.16. Найдите подобные треугольники на рисунке 199 на с. 144. Напишите пропорциональность их соответствующих сторон.

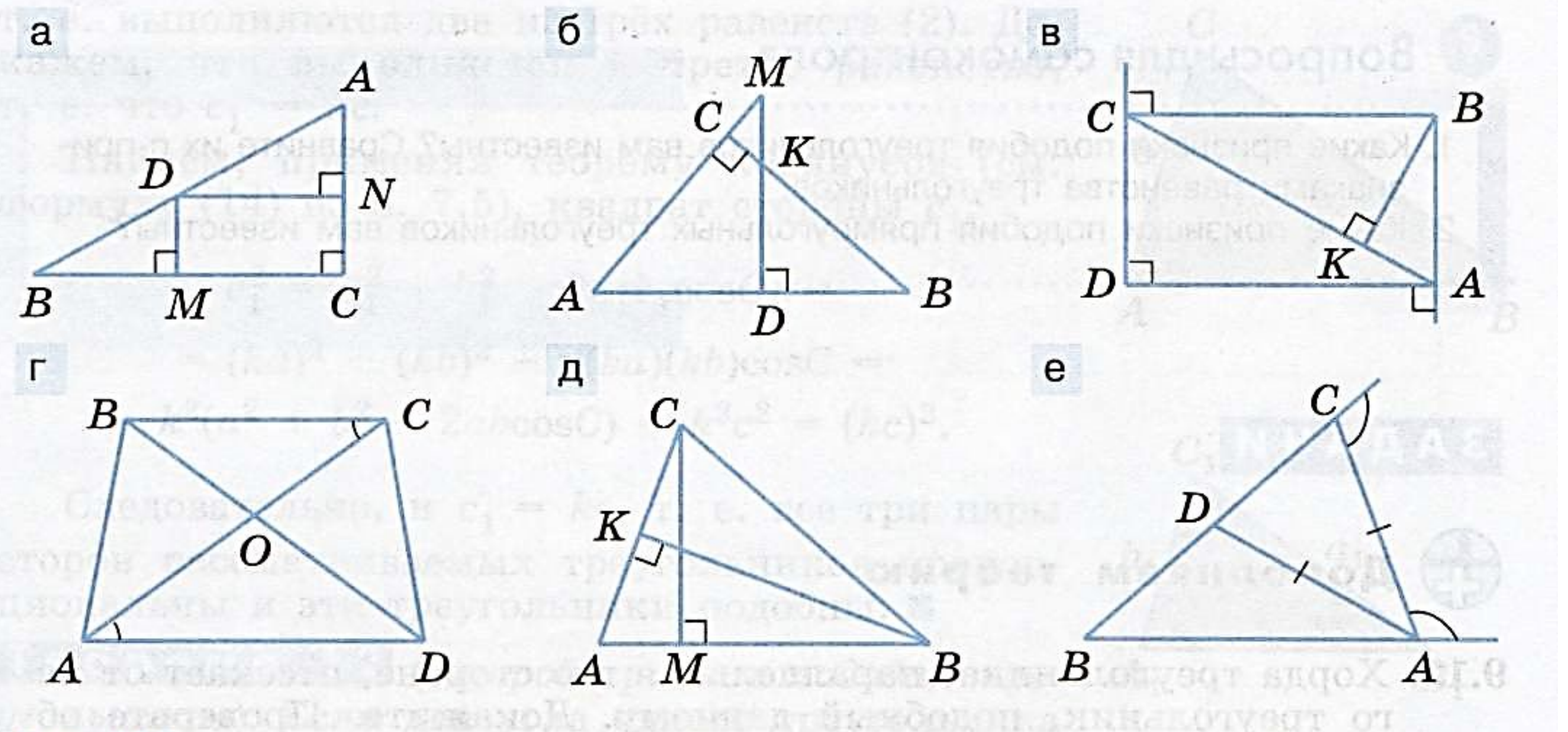


Рис. 199

9.17. Проведите две медианы треугольника и среднюю линию этого треугольника, соединяющую концы медиан. Найдите на полученном рисунке подобные треугольники. Запишите пропорциональность их соответствующих сторон.

Вычисляем

9.19.

Хорда КМ треугольника АВС идёт из точки К стороны АВ параллельно его стороне ВС. Найдите:

а) ВК, если АК = 4, АМ = 6, МС = 10;

б) МС, если АМ = 2, АВ = 6, АК = 4;

в) АС, если КВ = 3, МС = 4, АВ = 10;

г) КМ, если АК = 4, ВК = 6, БС = 20;

д) ВС, если КМ = 5, АМ = 2, МС = 6.

Вычисляем

9.20.

Хорда PO треугольника ABC идёт от точки P стороны AB до точки O стороны AC. Пусть $\angle AOP = \angle ABC$.

Найдите:

а) AO, если AB = 6, AP = 4, AC = 12;

б) BP, если AP = 4, AO = 3, AC = 8;

в) PO, если AB = 12, BC = 8, AO = 6.