Уравнение плоскости

Точка на плоскости: $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$;

Произвольная точка на плоскости: $M\ (x, y, z)$;

Нормаль к плоскости: $\vec{N}\ (A,\ B,\ C)$;

Найти: уравнение плоскости.

Вектор на плоскости: $\overrightarrow{M_0M}\ (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$;

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0\ ;\ A\cdot(x - x_0) + B\cdot(y - y_0) + C\cdot(z - z_0) = 0\ ;$$

$$D = -A\cdot x_0 - B\cdot y_0 - C\cdot z_0\ .$$

Общее уравнение плоскости:

$$\boxed{A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0}$$

Уравнение плоскости в отрезках

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0\ ;\quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = -D\ ;$$

$$-\frac{A}{D} \cdot x - \frac{B}{D} \cdot y - \frac{C}{D} \cdot z = 1\ ;\quad a = -\frac{D}{A}\ ;\quad b = -\frac{D}{B}\ ;\quad c = -\frac{D}{C}\ ;$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

Если $y = 0$, $z = 0$, то $x = a$.

Если $x = 0$, $z = 0$, то $y = b$.

Если $x = 0$, $y = 0$, то $z = c$.

Плоскость отсекает от осей координат отрезки a, b, c.

Задача 1. Дано: M_0 (1, - 5, 6) ; $\vec{N}$ (4, 2, –3) ;

Найти: уравнение плоскости, проходящей через т. M_0 перпендикулярно вектору $\vec{N}$.

Решение. **Пусть: M_0 (x_0, y_0, z_0) - точка на плоскости ;**

$\vec{N}$ (A, B, C) – **нормаль к плоскости .**

Расчетная формула (уравнение плоскости):

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0 \ ;$$

$$4 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y + 5) - 3 \cdot (z - 6) = 0 \ .$$

Ответ : $4 \cdot x + 2 \cdot y - 3 \cdot z + 24 = 0$

Задача 2. Даны две плоскости:

$$2x + 3y - 2z - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$13x - 8y + z + 44 = 0 \qquad (2)$$

Найти: угол между плоскостями .

Решение. Пусть: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ – нормали к плоскостям ;

Тогда: $\vec{N}_1\ (2,\ 3,\ -2)$; $\vec{N}_2\ (13,\ -8,\ 1)$;

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 2\cdot 13 - 3\cdot 8 - 2 = 0 \ .$$

Нормали к плоскостям перпендикулярны.

Ответ: плоскости перпендикулярны.

Задача 3. Даны две плоскости:

$6x + 4y - 14z + 16 = 0 \quad (1)$

$3x + 2y - 7z + 32 = 0 \quad (2)$

Найти: угол между плоскостями .

Решение. Пусть: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ – нормали к плоскостям ;

Тогда: $\vec{N}_1\,(6,\ 4,\ -14)$; $\vec{N}_2\,(3,\ 2,\ -7)$;

Нормали коллинеарны: $\vec{N}_1 = 2 \cdot \vec{N}_2$.

Плоскости не совпадают : см. уравнение плоскости в отрезках.

Ответ: плоскости параллельны.

<u>Задача 4</u>. **Даны две плоскости: x – z = 0 ; y – z = 0 .**

Найти: угол между плоскостями α .

<u>Решение.</u> Пусть: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ **– нормали к плоскостям ;**

Тогда: $\vec{N}_1\ (1,\ 0,\ -1)\ ;\ \vec{N}_2\ (0,\ 1,\ -1)\ ;$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}\ ; \qquad \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 + 0 + 1 = 1\ .$$

$$\left|N_1\right| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}\ ;\ \left|N_2\right| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}\ ;$$

$$\cos\alpha = 1/2\ ; \qquad \boxed{\alpha = \pi/3}$$

Задача 5. Найти уравнение плоскости, отсекающей от координатных осей x, y, z соответственно отрезки 2, 3, 4 .

Решение. Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ ; \qquad a = 2 \ ; \ b = 3 \ ; \ c = 4 \ .$$

Ответ : $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.