ДИСЦИПЛИНА

«ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ИНЖЕНЕРНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ»

Материалы практического занятия 2.4

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пример 1.

В результате проведенного эксперимента была получена следующая таблица (см. след. слайд).

Значения экспериментально полученных значений нанесены на график (см. след. слайд).

Расчетная таблица вычисления коэффициентов регрессии

Таблица 2.1

Номер опыта	x	y					
1	- 4	1,5					
2	- 3	1,2					
3	- 2	2,2					
4	- 1	2,2					
5	0	2					
6	1	3					
7	2	3,6					
8	3	3,1					
9	4	4					
Σ	0	22,7					

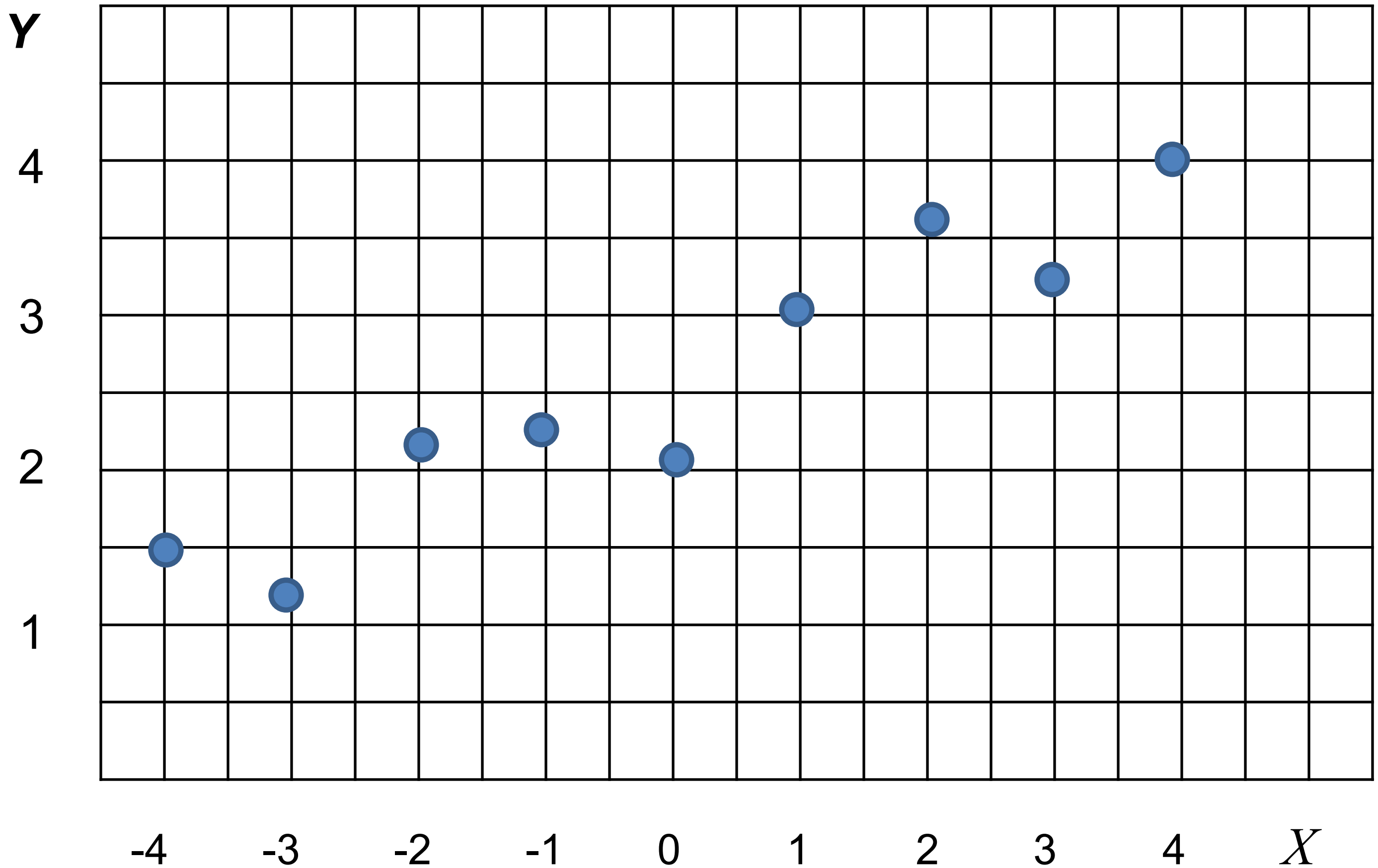

Рисунок 2.1 – Результаты эксперимента

На рис.2.1 точками показаны значения y в зависимости от x, полученные в результате эксперимента.

Так как явно прослеживается линейная зависимость, полагаем, что уравнение этой зависимости имеет вид:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x \qquad (2.1)$$

Здесь неизвестны коэффициенты b_0 и b_1.

Для их определения воспользуемся *методом наименьших квадратов.*

В соответствии с методикой метода наименьших квадратов коэффициенты b_0 и b_1 вычисляются по формулам:

$$b_o = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i{}^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x^2{}_i - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}$$

(2.2)

$$b_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x^2{}_i - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}$$

В соответствии с формулами 2.2 нам необходимо провести вычисления слагаемых, входящих в эти формулы:

1. $\sum_{i=1}^{N} y_i$

2. $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$

3. $\sum_{i=1}^{N} y_i x_i$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}$$

и т.д.

Результаты вычислений заносим в таблицу 2.1 и находим суммы столбцов:

Расчетная таблица вычисления коэффициентов регрессии

Таблица 2.1

Номер опыта	x	y	x^2	$y \cdot x$	y^2
1	- 4	1,5	16	-6	2,25
2	- 3	1,2	9	-3,3	1,21
3	- 2	2,2	4	-4,4	4,84
4	- 1	2,2	1	-2,2	4,84
5	0	2	0	0	4
6	1	3	1	3	9
7	2	3,6	4	7,2	12,96
8	3	3,1	9	9,3	9,61
9	4	4	16	16	16
Σ	***0***	***22,7***	***60***	***19,6***	***64,71***

Тогда:

$$b_o = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i{}^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x^2{}_i - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} =$$

$$= \frac{22{,}7 \cdot 60 - 19{,}6 \cdot 0}{9 \cdot 60 - 0} = 2{,}52$$

$$b_0 = 2{,}52$$

Тогда:

$$b_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x^2{}_i - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} =$$

$$= \frac{9 \cdot 19{,}6 - 22{,}7 \cdot 0}{9 \cdot 60 - 0} = 0{,}33$$

$$b_1 = 0{,}33$$

Таким образом, уравнение (2.1) запишется в виде:

$$y = 2{,}52 + 0{,}33 \cdot x \qquad (2.3)$$

На рис.2.2 (см. след. слайд) построен график искомого уравнения, построенный по формуле 2.3.

МНК гарантирует, что сумма всех отклонений между экспериментальными данными (точками) и построенной зависимостью (прямой) минимальна.

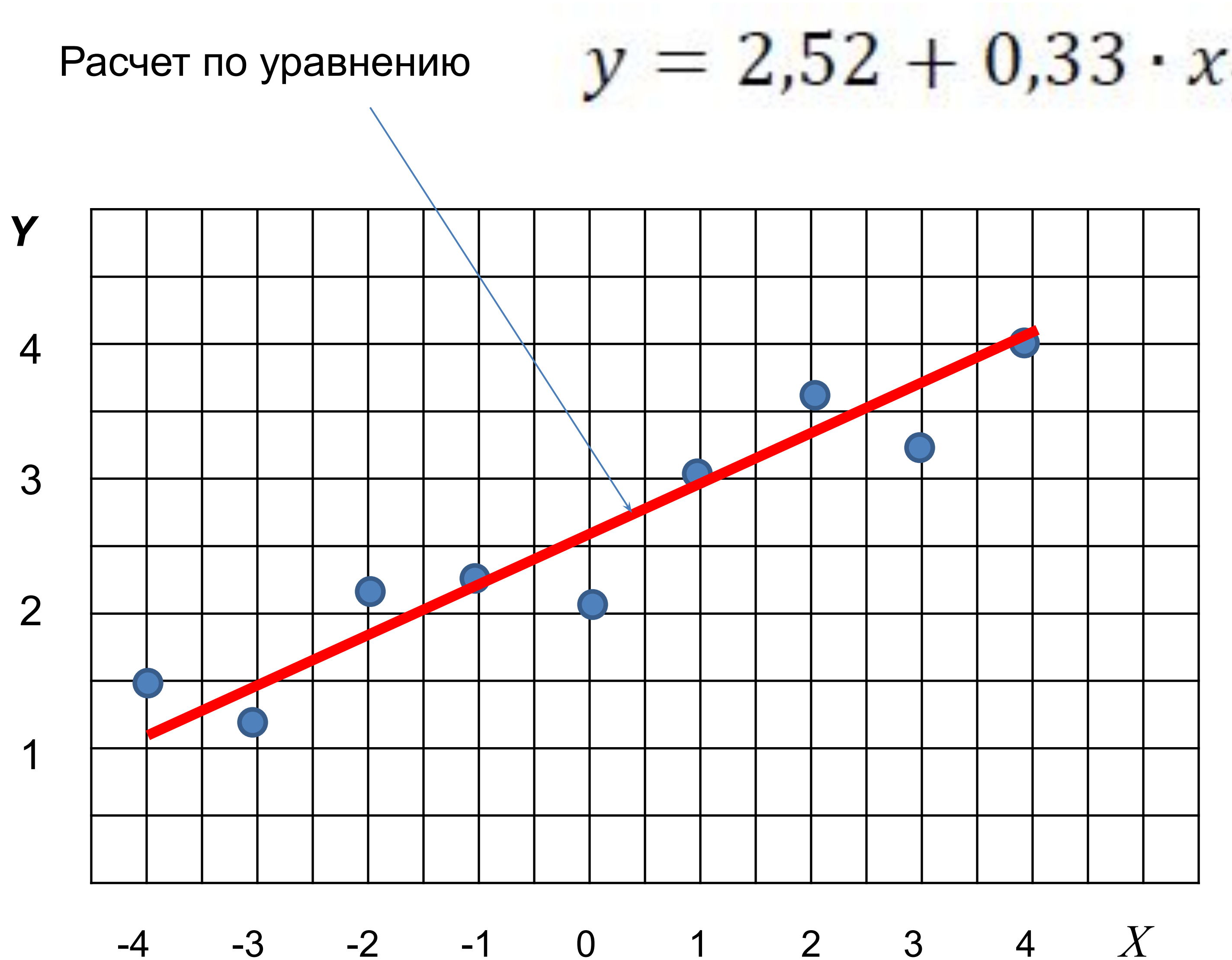

Рисунок 2.2 – Результаты эксперимента (точки) и расчета (прямая)