

Тригонометрические уравнения

Однородные тригонометрические уравнения

МАТЕМАТИКА

10 КЛАСС

МБОУ СШ №12

УЧИТЕЛЬ: ШУДРАКОВ НИКОЛАЙ
НИКОЛАЕВИЧ

тригонометрические уравнения первой степени

- Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени**.
- Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то для решения обе части уравнения разделим на $\cos x$, и получим:

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

$$x = \operatorname{arcctg} \left(-\frac{b}{a} \right) + \pi n$$

Пример 1.

□ Решите уравнение:

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0$$

Пример 1. Решение

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0$$

Разделим обе части на $\cos x$

Получим:

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arcctg} \frac{3}{2} + \pi n$$

Ответ: $x = \operatorname{arcctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Пример 2.

□ Решите уравнение:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Пример 2. Решение

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

По формулам приведения преобразуем обе части уравнения:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos 2x$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$$

Получим $\cos 2x = \sin 2x$

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

Пример 2. Решение

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

Разделим обе части на $\cos 2x$

$$\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

тригонометрические уравнения второй степени

□ Уравнение вида

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

называют **однородным тригонометрическим уравнением второй степени.**

Алгоритм решения уравнения

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

□ Если $a \neq 0$, $c \neq 0$, то:

□ 1. Уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \operatorname{tg} x$

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

$$a z^2 + b z + c = 0$$

Алгоритм решения уравнения

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

□ Если $a=0$ (или $c=0$), то:

□ 2. Уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносим $\cos x$ (или $\sin x$)

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$$\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0$$

□ Решаем два уравнения:

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad b \sin x + c \cos x = 0$$

Пример 3.

□ Решите уравнение:

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

Пример 3. Решение

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} x$:

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

Решив квадратное уравнение получим:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 2$$

Пример 3. Решение

Значит $\text{tg } x = 1$, $\text{tg } x = 2$

Из первого уравнения получаем:

$$x = \text{arcsctg } 1 + \pi n, \text{ т.е. } x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

Из второго уравнения находим:

$$x = \text{arcsctg } 2 + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \text{arcsctg } 2 + \pi n$, $n \in Z$

Пример 4.

□ Решите уравнение:

$$\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

Пример 4. Решение

$$\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

Выносим за скобку $\cos x$:

$$\cos x(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

Решаем два уравнения:

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$$

из первого уравнения находим

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Пример 4. Решение

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$$

Делим обе части на $\cos x$:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n$$

$$\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arccctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Пример 5.

□ Решите уравнение:

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2$$

Пример 5. Решение

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2$$

Обратим внимание на то, что уравнение в правой части содержится не 0, а 2. Значит это не однородное уравнение.

Преобразуем по основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$$

$$2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$$

Пример 5. Решение

Подставив в изначальное уравнение полученное выражение получим:

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2 \sin^2 3x + 2 \cos^2 3x$$

Приведем к виду однородного тригонометрического уравнения второй степени:

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x - 2 \sin^2 3x - 2 \cos^2 3x = 0$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 3 \cos^2 3x = 0$$

Пример 5. Решение

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 3 \cos^2 3x = 0$$

Разделим обе части почленно на $\cos^2 3x$:

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 3x + 3 = 0$$

Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} 3x$:

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0$$

Решив квадратное уравнение, получим:

$$z = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$$

Пример 5. Решение

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$$

Итак, $3x = \operatorname{arcsctg} \sqrt{3} + \pi n$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$