

Тема. Доверительные интервалы

Доверительный интервал – это интервал, в котором с той или иной заранее заданной вероятностью находится неизвестный параметр генеральной совокупности.

1. Доверительный интервал для математического ожидания :

$$\left(\bar{x} - \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} \right),$$

где t - обратное (квантиль) распределение Стьюдента

2. Доверительный интервал для дисперсии:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi_{1-\alpha/2}^2 (n-1)}; \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi_{\alpha/2}^2 (n-1)} \right),$$

Где χ^2 - обратное распределение хи-квадрат

ЗАДАЧА. Получены данные некоторых измерений: 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4. Записать данные в виде вариационного ряда. Определить оценки среднего, дисперсии, и стандартного отклонения, а также построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии на уровне значимости $\alpha=0,05$.

Решение

вариационный ряд: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

$$\bar{x} = \frac{1}{8} (1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8) = 3,75.$$

$$S^2 = \frac{1}{8-1} (1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 - 8 \cdot 3,75^2) \approx 6,214.$$

Стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2} = 2,493$

$$\left(\bar{x} - \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} \right),$$

$$t_{1-0,05/2}(8-1) = t_{0,975}(7) = 2,365$$

Получаем доверительный интервал
для математического ожидания

$$\left(3,75 - \frac{2,493 \cdot 2,365}{\sqrt{8}}; 3,75 + \frac{2,493 \cdot 2,365}{\sqrt{8}} \right)$$

ИЛИ

$$(1,665; 5,835)$$

Обратное распределение Стьюдента $t_p(n)$

$p \backslash n$	0,8	0,9	0,925	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	1,376	3,078	4,165	6,314	12,71	31,82	63,66	318,29
2	1,061	1,886	2,282	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328
3	0,978	1,638	1,924	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	0,941	1,533	1,778	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,920	1,476	1,699	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894
6	0,906	1,440	1,650	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,896	1,415	1,617	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,889	1,397	1,592	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,883	1,383	1,574	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,879	1,372	1,559	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,876	1,363	1,548	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,873	1,356	1,538	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,870	1,350	1,530	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,868	1,345	1,523	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,866	1,341	1,517	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733

16	0,865	1,337	1,512	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,863	1,333	1,508	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,862	1,330	1,504	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,861	1,328	1,500	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,860	1,325	1,497	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,859	1,323	1,494	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,858	1,321	1,492	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,858	1,319	1,489	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,857	1,318	1,487	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,856	1,316	1,485	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
27	0,855	1,314	1,482	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
30	0,854	1,310	1,477	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,851	1,303	1,468	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,848	1,296	1,458	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,845	1,289	1,449	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,842	1,282	1,440	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

$$\sigma^2 \in \left(\frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi_{1-\alpha/2}^2 (n-1)}; \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi_{\alpha/2}^2 (n-1)} \right),$$

$$\chi_{1-0,05/2}^2 (8-1) = 16,0;$$

$$\chi_{0,05/2}^2 (8-1) = 1,69.$$

$$\left(\frac{7 \cdot 6,214}{16}; \frac{7 \cdot 6,214}{1,69} \right)$$

$$(2,719; 25,738)$$

Обратное распределение хи-квадрат $\chi^2_p(n)$

$n \backslash p$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,075	0,1	0,2	0,3
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,009	0,016	0,064	0,148
2	0,002	0,010	0,020	0,051	0,103	0,156	0,211	0,446	0,713
3	0,024	0,072	0,115	0,216	0,352	0,472	0,584	1,005	1,424
4	0,091	0,207	0,297	0,484	0,711	0,897	1,064	1,649	2,195
5	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,394	1,610	2,343	3,000
6	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	1,941	2,204	3,070	3,828
7	0,599	0,989	1,239	1,690	2,167	2,528	2,833	3,822	4,671
8	0,857	1,344	1,647	2,180	2,733	3,144	3,490	4,594	5,527
9	1,152	1,735	2,088	2,700	3,325	3,785	4,168	5,380	6,393
10	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,446	4,865	6,179	7,267
11	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,124	5,578	6,989	8,148
12	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	5,818	6,304	7,807	9,034
13	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	6,524	7,041	8,634	9,926
14	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,242	7,790	9,467	10,82
15	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	7,969	8,547	10,32	11,72

Обратное распределение хи-квадрат $\chi^2_p(n)$

$n \backslash p$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,075	0,1	0,2	0,3
16	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	8,707	9,312	11,15	12,62
17	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	9,452	10,09	12,00	13,53
18	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,21	10,87	12,86	14,44
19	5,407	6,844	7,633	8,907	10,12	10,97	11,65	13,72	15,35
20	5,921	7,434	8,260	9,591	10,85	11,73	12,44	14,58	16,27
21	6,447	8,034	8,897	10,28	11,59	12,50	13,24	15,44	17,18
22	6,983	8,643	9,542	10,98	12,34	13,28	14,04	16,31	18,10
23	7,529	9,260	10,20	11,69	13,09	14,07	14,85	17,19	19,02
24	8,085	9,886	10,86	12,40	13,85	14,85	15,66	18,06	19,94
25	8,649	10,52	11,52	13,12	14,61	15,65	16,47	18,94	20,87
27	9,803	11,81	12,88	14,57	16,15	17,24	18,11	20,71	22,72
30	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	19,66	20,60	23,36	25,51
40	17,92	20,71	22,16	24,43	26,51	27,93	29,05	32,34	34,87
50	24,67	27,99	29,71	32,36	34,76	36,40	37,69	41,45	44,31
75	42,76	47,21	49,48	52,94	56,05	58,15	59,79	64,55	68,13
100	61,92	67,33	70,06	74,22	77,93	80,41	82,36	87,95	92,13
200	143,8	152,2	156,4	162,7	168,3	172,0	174,8	183,0	189,0

Обратное распределения хи-квадрат $\chi^2_p(n)$ (продолжение)

$n \backslash p$	0,7	0,8	0,9	0,925	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	1,074	1,642	2,706	3,170	3,841	5,024	6,635	7,879	10,83
2	2,408	3,219	4,605	5,181	5,991	7,378	9,210	10,60	13,82
3	3,665	4,642	6,251	6,905	7,815	9,348	11,35	12,84	16,27
4	4,878	5,989	7,779	8,496	9,488	11,14	13,28	14,86	18,47
5	6,064	7,289	9,236	10,01	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	7,231	8,558	10,64	11,47	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	8,383	9,803	12,02	12,88	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	9,524	11,03	13,36	14,27	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	10,66	12,24	14,68	15,63	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	11,78	13,44	15,99	16,97	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	12,90	14,63	17,28	18,29	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	14,01	15,81	18,55	19,60	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	15,12	16,98	19,81	20,90	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	16,22	18,15	21,06	22,18	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	17,32	19,31	22,31	23,45	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70

Обратное распределения хи-квадрат $\chi^2_p(n)$ (продолжение)

$n \backslash p$	0,7	0,8	0,9	0,925	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
16	18,42	20,47	23,54	24,72	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	19,51	21,61	24,77	25,97	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	20,60	22,76	25,99	27,22	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	21,69	23,90	27,20	28,46	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	22,77	25,04	28,41	29,69	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	23,86	26,17	29,62	30,92	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	24,94	27,30	30,81	32,14	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	26,02	28,43	32,01	33,36	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	27,10	29,55	33,20	34,57	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	28,17	30,68	34,38	35,78	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
27	30,32	32,91	36,74	38,18	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
30	33,53	36,25	40,26	41,76	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
40	44,16	47,27	51,81	53,50	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
50	54,72	58,16	63,17	65,03	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66
75	80,91	85,07	91,06	93,28	96,22	100,8	106,4	110,3	118,6
100	106,9	111,7	118,5	121,0	124,3	129,6	135,8	140,2	149,4
200	210,0	216,6	226,0	229,5	234,0	241,1	249,4	255,3	267,5

Статистическая погрешность

- это половина длины доверительного интервала

Если объем генеральной совокупности велик или не известен, то

$$\Delta_x = \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}$$

Если генеральная совокупность имеет объем N , то

$$\Delta_x = \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

ЗАДАЧА. Школьному психологу необходимо определить средний уровень вербальной памяти у первоклассников. Для этого были случайно отобраны 19 школьников и по результатам тестов вычислены выборочное среднее и дисперсия вербальной памяти, которые равны, соответственно 21,36 и 11,04. Найти статистическую погрешность на уровне значимости $\alpha = 0,05$, если:

а) психолога интересует средний уровень вербальной памяти всех первоклассников региона;

б) психолога интересует средний уровень памяти учеников данной школы, в которой 58 первоклассников.

Решение. Имеем

$$\bar{x} = 21,36; S^2 = 11,04; n = 19; S = \sqrt{11,04} = 3,32.$$

По таблице ПРИЛОЖЕНИЯ находим

$$t_{1-0,05/2}(19-1) = t_{0,975}(18) = 2,101. \text{ Отсюда}$$

а) если объем генеральной совокупности велик, то

$$\Delta_x = \frac{3,32 \cdot 2,101}{\sqrt{19}} = 1,6 ;$$

б) если объем генеральной совокупности равен $N = 58$, то

$$\Delta_x = \frac{3,32 \cdot 2,101}{\sqrt{19}} \sqrt{1 - \frac{19}{58}} = 1,31$$

Статистическая погрешность частоты

равна

$$\Delta_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

если объем генеральной совокупности велик
или не известен, и

$$\Delta_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

если генеральная совокупность имеет объем
N.

ЗАДАЧА. Психологу крупной торговой сети необходимо определить долю экстравертов среди менеджеров. Для этого были случайно отобраны и протестированы 35 менеджера и выяснилось, что среди них 18 экстравертов. Определить долю экстравертов и ее статистическую погрешность на уровне значимости $\alpha=0,02$, если а) число менеджеров в торговой сети велико; б) число менеджеров равно 80.

Решение.

Частота (доля экстравертов) равна $w=18/35=0,514$. По таблице находим

$$t_{1-0,02/2}(35-1) = t_{0,99}(34) = 2,45$$

Отсюда, если а) число менеджеров в торговой сети велико, то

$$\Delta_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1) \quad \Delta_w = \sqrt{\frac{0,514(1-0,514)}{35}} \cdot 2,45 = 0,2$$

б) число менеджеров равно 80, то

$$\Delta_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1) \quad \Delta_w = \sqrt{\frac{0,514(1-0,514)}{35}} \cdot \sqrt{1 - \frac{35}{80}} \cdot 2,45 = 0,15$$

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистической гипотезой называется некоторое предположение, которое принимается или отвергается на основании статистических данных.

H_0 - нулевая гипотеза

H_1 - альтернативная гипотеза

α - уровень значимости (0,01-0,1). Это вероятность того, что отвергнута верная нулевая гипотеза)

$p = 1 - \alpha$ - доверительная вероятность

Критерий согласия Пирсона (критерий χ – квадрат).

Пусть имеется несколько показателей x_1, x_2, \dots, x_k .

Типичные значения (норма) показателей n_1, n_2, \dots, n_k .

Экспериментальные значения (норма) показателей n'_1, n'_2, \dots, n'_k

$$\chi^2 = \left(\frac{(n_1 - n'_1)^2}{n_1} + \frac{(n_2 - n'_2)^2}{n_2} + \dots + \frac{(n_k - n'_k)^2}{n_k} \right).$$

$\chi^2_{кр}$ зависит от двух значений: доверительной вероятности $p = 1 - \alpha$ и числа $k - 1$ называемого числом степеней свободы.

Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то предположение о том, что опытные данные соответствуют нормам, принимается.

ЗАДАЧА. Для формирования профильных классов ученики четвертого класса проходят профориентационный тест на выявление способностей к тем или иным наукам. Согласно городской статистики, 32% учащихся четвертых классов имеют склонность к гуманитарным наукам, 27% математическим, – к 25% естественным, – не определен 16%

При проверке 62 школьников данной школы оказалось, что имеют склонность к гуманитарным наукам – 21 человек, к математическим – 17 человек, к естественным – 14 человек и не выявили склонность 10 человек. Можно ли с вероятностью $p = 0,95$ считать, что профориентационное распределение четвероклассников в данной школе соответствует городскому.

Решение.

Записываем школьные показатели профориентации во вторую строчку расчетной таблицы. Согласно городской статистики из 62 школьников склонность к гуманитарным наукам должны проявлять (нормы) $62 \cdot 32\% = 19,84$ школьника, к математическим – $62 \cdot 27\% = 16,74$ школьника, к естественным – $62 \cdot 25\% = 15,5$ школьника и не выявили склонность $62 \cdot 16\% = 9,92$ школьника. Эти нормы записываем в третью строчку расчетной таблицы. В следующую строку записываем значения критерия, получаем таблицу вида:

Способности	Гуманитарные науки	Математические науки	Естественные науки	Не выявлены
n'_i	21	17	14	10
n_i	19,84	16,74	15,5	9,92
$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$	0,068	0,004	0,145	0,0645

$$\chi^2 = 0,068 + 0,004 + 0,145 + 0,0645 = 0,282.$$

$$p = 1 - 0,05 = 0,95$$

По таблице критических значений (ПРИЛОЖЕНИЕ)

$$k - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\chi_{кр} = 1,815.$$

$\chi^2 < \chi_{кр}^2$, следовательно, основная гипотеза принимается, то есть распределение способностей в классах соответствует городскому

Проверка гипотез о равенстве дисперсий

1. Получают выборку показателя в двух группах объемом

$$n_1 \text{ и } n_2: \quad x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n_1}$$

$$x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n_2}$$

2. Задают некоторый уровень значимости α и доверительную вероятность $\beta = 1 - \alpha$.

3. Рассчитывают выборочную среднюю дисперсии:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} (x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n_1})$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} (x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{2n_2})$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} (x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1n_1}^2 - n_1 \bar{x}_1^2)$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} (x_{21}^2 + x_{22}^2 + \dots + x_{2n_2}^2 - n_2 \bar{x}_2^2)$$

1. Вычисляют статистику, равную отношению большей дисперсии к меньшей.
$$F = \frac{\max (S_1^2; S_2^2)}{\min (S_1^2; S_2^2)}$$

2. По таблице обратного распределения Фишера на основании доверительной вероятности α и двух степеней свободы $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$, где n_1 – объем выборки с большей дисперсии, а n_2 – с меньшей, находят критическое значение $F_{кр} = F_{1-\alpha}(n_1 - 1; n_2 - 1)$

3. Если $F < F_{кр}$, то дисперсии в группах равны, то есть группы имеют одинаковую степень однородности показателя.

ЗАДАЧА. Для участия в обучающей игре по знанию английского языка учащиеся 8-х классов были разбиты на две группы из 11 и 12 человек. Согласно требованию игры, необходимо, чтобы дисперсия уровня подготовки по языку была в группах одинакова. Для проверки был проведен экспресс-тест знания языка, который показал следующие баллы:

Группа 1	8	6	5	5	6	7	4	5	6	7	5	
Группа 2	7	6	4	9	3	6	7	5	7	3	8	6

Сравнить уровни дисперсии при $\alpha = 0,05$.

Решение. В результате расчетов получим
 $n_1 = 11, n_2 = 12, \bar{x}_1 = 5,81, \bar{x}_2 = 5,92, s_1^2 = 1,36, s_2^2 = 3,54$
Статистика критерия $F = \frac{3,54}{1,36} = 2,6$.

По таблице обратного распределения Фишера на основании вероятности $\alpha = 1 - \alpha = 0,95$ и степени свободы $12 - 1 = 11$ и $11 - 1 = 10$, находим $F_{кр} = 2,94$. Видно, что $F < F_{кр}$, то есть дисперсии равны и уровень разброса в знаниях английского языка в группах одинаков.

**Критическое значение распределения Фишера $F_{0,95}(k_1, k_2)$ на
уровне значимости $\alpha = 0,05$ (продолжение)**

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	120
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	253
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,75	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,25
15	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,18
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,06
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,11	1,97

**Критические значения распределения Фишера $F_{0,99}(k_1, k_2)$ на уровне
значимости $\alpha = 0,01$ (продолжение)**

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	120
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	26,9	26,7	26,5	26,2
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,6	14,4	14,2	14,0	13,8	13,6
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,2	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,38	9,11
6	13,8	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,23	6,97
7	12,3	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	5,99	5,74
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,20	4,95
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,65	4,40
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,25	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	3,94	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,70	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,51	3,25
15	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,35	3,09

Критические значения распределения Фишера $F_{0,99}(k_1, k_2)$ на уровне

значимости $\alpha = 0,01$ (продолжение)

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	120
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5
6	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,10	2,84
8	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	2,92	2,66
10	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,78	2,52
12	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,67	2,40
15	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,58	2,31
20	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,50	2,23
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,39	2,11
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,20	1,92
50	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,03	1,73
20	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,86	1,53