# Тема. Доверительные интервалы

***Доверительный интервал*** – это интервал, в котором с той или иной заранее заданной вероятностью находится неизвестный параметр генеральной совокупности.

## 1. Доверительный интервал для математического ожидания :

$$\left( \bar{x} - \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} \right),$$

где $t$ - обратное (квантиль) распределение Стьюдента

## **2. Доверительный интервал для дисперсии:**

$$\sigma^2 \in \left( \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}; \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right),$$

Где $\chi^2$ - обратное распределение хи-квадрат

**ЗАДАЧА.** Получены данные некоторых измерений: 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4. Записать данные в виде вариационного ряда. Определить оценки среднего, дисперсии, и стандартного отклонения, а также построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии на уровне значимости α=0,05.

## ***Решение***

вариационный ряд: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(1+1+2+3+4+5+6+8) = 3{,}75.$$

$$S^2 = \frac{1}{8-1}\left(1^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+8^2-8\cdot 3{,}75^2\right) \approx 6{,}214.$$

Стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2} = 2{,}493$

$$\left( \bar{x} - \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} \right),$$

$$t_{1-0,05/2}(8-1) = t_{0,975}(7) = 2,365$$

Получаем доверительный интервал
для математического ожидания

$$\left( 3,75 - \frac{2,493 \cdot 2,365}{\sqrt{8}};\quad 3,75 + \frac{2,493 \cdot 2,365}{\sqrt{8}} \right)$$

или

$$(1,665;\quad 5,835)$$

## Обратное распределение Стьюдента $t_p(n)$

| $n$ \ $p$ | **0,8** | **0,9** | **0,925** | **0,95** | **0,975** | **0,99** | **0,995** | **0,999** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1,376 | 3,078 | 4,165 | 6,314 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 318,29 |
| **2** | 1,061 | 1,886 | 2,282 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,328 |
| **3** | 0,978 | 1,638 | 1,924 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,214 |
| **4** | 0,941 | 1,533 | 1,778 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 |
| **5** | 0,920 | 1,476 | 1,699 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 5,894 |
| **6** | 0,906 | 1,440 | 1,650 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 |
| **7** | 0,896 | 1,415 | 1,617 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 |
| **8** | 0,889 | 1,397 | 1,592 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 |
| **9** | 0,883 | 1,383 | 1,574 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 |
| **10** | 0,879 | 1,372 | 1,559 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 |
| **11** | 0,876 | 1,363 | 1,548 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,025 |
| **12** | 0,873 | 1,356 | 1,538 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 |
| **13** | 0,870 | 1,350 | 1,530 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 |
| **14** | 0,868 | 1,345 | 1,523 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,787 |
| **15** | 0,866 | 1,341 | 1,517 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **16** | 0,865 | 1,337 | 1,512 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,686 |
| **17** | 0,863 | 1,333 | 1,508 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 |
| **18** | 0,862 | 1,330 | 1,504 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,610 |
| **19** | 0,861 | 1,328 | 1,500 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 |
| **20** | 0,860 | 1,325 | 1,497 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,552 |
| **21** | 0,859 | 1,323 | 1,494 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 |
| **22** | 0,858 | 1,321 | 1,492 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 |
| **23** | 0,858 | 1,319 | 1,489 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 |
| **24** | 0,857 | 1,318 | 1,487 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 |
| **25** | 0,856 | 1,316 | 1,485 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 |
| **27** | 0,855 | 1,314 | 1,482 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 |
| **30** | 0,854 | 1,310 | 1,477 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 |
| **40** | 0,851 | 1,303 | 1,468 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 |
| **60** | 0,848 | 1,296 | 1,458 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,232 |
| **120** | 0,845 | 1,289 | 1,449 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,160 |
| $\infty$ | 0,842 | 1,282 | 1,440 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 |

$$\sigma^2 \in \left( \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} ; \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right),$$

$$\chi^2_{1-0,05/2}(8-1) = 16,0;$$

$$\chi^2_{0,05/2}(8-1) = 1,69.$$

$$\left( \frac{7 \cdot 6,214}{16} ; \quad \frac{7 \cdot 6,214}{1,69} \right)$$

$$(2,719; \quad 25,738)$$

## Обратное распределение хи-квадрат $\chi^2_p(n)$

| $n$ \ $p$ | **0,001** | **0,005** | **0,01** | **0,025** | **0,05** | **0,075** | **0,1** | **0,2** | **0,3** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,004 | 0,009 | 0,016 | 0,064 | 0,148 |
| **2** | 0,002 | 0,010 | 0,020 | 0,051 | 0,103 | 0,156 | 0,211 | 0,446 | 0,713 |
| **3** | 0,024 | 0,072 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,472 | 0,584 | 1,005 | 1,424 |
| **4** | 0,091 | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 0,897 | 1,064 | 1,649 | 2,195 |
| **5** | 0,210 | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,145 | 1,394 | 1,610 | 2,343 | 3,000 |
| **6** | 0,381 | 0,676 | 0,872 | 1,237 | 1,635 | 1,941 | 2,204 | 3,070 | 3,828 |
| **7** | 0,599 | 0,989 | 1,239 | 1,690 | 2,167 | 2,528 | 2,833 | 3,822 | 4,671 |
| **8** | 0,857 | 1,344 | 1,647 | 2,180 | 2,733 | 3,144 | 3,490 | 4,594 | 5,527 |
| **9** | 1,152 | 1,735 | 2,088 | 2,700 | 3,325 | 3,785 | 4,168 | 5,380 | 6,393 |
| **10** | 1,479 | 2,156 | 2,558 | 3,247 | 3,940 | 4,446 | 4,865 | 6,179 | 7,267 |
| **11** | 1,834 | 2,603 | 3,053 | 3,816 | 4,575 | 5,124 | 5,578 | 6,989 | 8,148 |
| **12** | 2,214 | 3,074 | 3,571 | 4,404 | 5,226 | 5,818 | 6,304 | 7,807 | 9,034 |
| **13** | 2,617 | 3,565 | 4,107 | 5,009 | 5,892 | 6,524 | 7,041 | 8,634 | 9,926 |
| **14** | 3,041 | 4,075 | 4,660 | 5,629 | 6,571 | 7,242 | 7,790 | 9,467 | 10,82 |
| **15** | 3,483 | 4,601 | 5,229 | 6,262 | 7,261 | 7,969 | 8,547 | 10,32 | 11,72 |

## Обратное распределение хи-квадрат $\chi^2_p(n)$

| $n$ \ $p$ | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,075 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **16** | 3,942 | 5,142 | 5,812 | 6,908 | 7,962 | 8,707 | 9,312 | 11,15 | 12,62 |
| **17** | 4,416 | 5,697 | 6,408 | 7,564 | 8,672 | 9,452 | 10,09 | 12,00 | 13,53 |
| **18** | 4,905 | 6,265 | 7,015 | 8,231 | 9,390 | 10,21 | 10,87 | 12,86 | 14,44 |
| **19** | 5,407 | 6,844 | 7,633 | 8,907 | 10,12 | 10,97 | 11,65 | 13,72 | 15,35 |
| **20** | 5,921 | 7,434 | 8,260 | 9,591 | 10,85 | 11,73 | 12,44 | 14,58 | 16,27 |
| **21** | 6,447 | 8,034 | 8,897 | 10,28 | 11,59 | 12,50 | 13,24 | 15,44 | 17,18 |
| **22** | 6,983 | 8,643 | 9,542 | 10,98 | 12,34 | 13,28 | 14,04 | 16,31 | 18,10 |
| **23** | 7,529 | 9,260 | 10,20 | 11,69 | 13,09 | 14,07 | 14,85 | 17,19 | 19,02 |
| **24** | 8,085 | 9,886 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 14,85 | 15,66 | 18,06 | 19,94 |
| **25** | 8,649 | 10,52 | 11,52 | 13,12 | 14,61 | 15,65 | 16,47 | 18,94 | 20,87 |
| **27** | 9,803 | 11,81 | 12,88 | 14,57 | 16,15 | 17,24 | 18,11 | 20,71 | 22,72 |
| **30** | 11,59 | 13,79 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 19,66 | 20,60 | 23,36 | 25,51 |
| **40** | 17,92 | 20,71 | 22,16 | 24,43 | 26,51 | 27,93 | 29,05 | 32,34 | 34,87 |
| **50** | 24,67 | 27,99 | 29,71 | 32,36 | 34,76 | 36,40 | 37,69 | 41,45 | 44,31 |
| **75** | 42,76 | 47,21 | 49,48 | 52,94 | 56,05 | 58,15 | 59,79 | 64,55 | 68,13 |
| **100** | 61,92 | 67,33 | 70,06 | 74,22 | 77,93 | 80,41 | 82,36 | 87,95 | 92,13 |
| **200** | 143,8 | 152,2 | 156,4 | 162,7 | 168,3 | 172,0 | 174,8 | 183,0 | 189,0 |

**Обратное распределения хи-квадрат** $\chi^2{}_p(n)$ (продолжение)

| *n* \ *p* | **0,7** | **0,8** | **0,9** | **0,925** | **0,95** | **0,975** | **0,99** | **0,995** | **0,999** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1,074 | 1,642 | 2,706 | 3,170 | 3,841 | 5,024 | 6,635 | 7,879 | 10,83 |
| **2** | 2,408 | 3,219 | 4,605 | 5,181 | 5,991 | 7,378 | 9,210 | 10,60 | 13,82 |
| **3** | 3,665 | 4,642 | 6,251 | 6,905 | 7,815 | 9,348 | 11,35 | 12,84 | 16,27 |
| **4** | 4,878 | 5,989 | 7,779 | 8,496 | 9,488 | 11,14 | 13,28 | 14,86 | 18,47 |
| **5** | 6,064 | 7,289 | 9,236 | 10,01 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 16,75 | 20,51 |
| **6** | 7,231 | 8,558 | 10,64 | 11,47 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 18,55 | 22,46 |
| **7** | 8,383 | 9,803 | 12,02 | 12,88 | 14,07 | 16,01 | 18,48 | 20,28 | 24,32 |
| **8** | 9,524 | 11,03 | 13,36 | 14,27 | 15,51 | 17,53 | 20,09 | 21,95 | 26,12 |
| **9** | 10,66 | 12,24 | 14,68 | 15,63 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 23,59 | 27,88 |
| **10** | 11,78 | 13,44 | 15,99 | 16,97 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 25,19 | 29,59 |
| **11** | 12,90 | 14,63 | 17,28 | 18,29 | 19,68 | 21,92 | 24,73 | 26,76 | 31,26 |
| **12** | 14,01 | 15,81 | 18,55 | 19,60 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 28,30 | 32,91 |
| **13** | 15,12 | 16,98 | 19,81 | 20,90 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 29,82 | 34,53 |
| **14** | 16,22 | 18,15 | 21,06 | 22,18 | 23,68 | 26,12 | 29,14 | 31,32 | 36,12 |
| **15** | 17,32 | 19,31 | 22,31 | 23,45 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 32,80 | 37,70 |

**Обратное распределения хи-квадрат $\chi^2{}_p(n)$ (продолжение)**

| $n$ \ $p$ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,925 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 18,42 | 20,47 | 23,54 | 24,72 | 26,30 | 28,85 | 32,00 | 34,27 | 39,25 |
| 17 | 19,51 | 21,61 | 24,77 | 25,97 | 27,59 | 30,19 | 33,41 | 35,72 | 40,79 |
| 18 | 20,60 | 22,76 | 25,99 | 27,22 | 28,87 | 31,53 | 34,81 | 37,16 | 42,31 |
| 19 | 21,69 | 23,90 | 27,20 | 28,46 | 30,14 | 32,85 | 36,19 | 38,58 | 43,82 |
| 20 | 22,77 | 25,04 | 28,41 | 29,69 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 40,00 | 45,31 |
| 21 | 23,86 | 26,17 | 29,62 | 30,92 | 32,67 | 35,48 | 38,93 | 41,40 | 46,80 |
| 22 | 24,94 | 27,30 | 30,81 | 32,14 | 33,92 | 36,78 | 40,29 | 42,80 | 48,27 |
| 23 | 26,02 | 28,43 | 32,01 | 33,36 | 35,17 | 38,08 | 41,64 | 44,18 | 49,73 |
| 24 | 27,10 | 29,55 | 33,20 | 34,57 | 36,42 | 39,36 | 42,98 | 45,56 | 51,18 |
| 25 | 28,17 | 30,68 | 34,38 | 35,78 | 37,65 | 40,65 | 44,31 | 46,93 | 52,62 |
| 27 | 30,32 | 32,91 | 36,74 | 38,18 | 40,11 | 43,19 | 46,96 | 49,65 | 55,48 |
| 30 | 33,53 | 36,25 | 40,26 | 41,76 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 53,67 | 59,70 |
| 40 | 44,16 | 47,27 | 51,81 | 53,50 | 55,76 | 59,34 | 63,69 | 66,77 | 73,40 |
| 50 | 54,72 | 58,16 | 63,17 | 65,03 | 67,50 | 71,42 | 76,15 | 79,49 | 86,66 |
| 75 | 80,91 | 85,07 | 91,06 | 93,28 | 96,22 | 100,8 | 106,4 | 110,3 | 118,6 |
| 100 | 106,9 | 111,7 | 118,5 | 121,0 | 124,3 | 129,6 | 135,8 | 140,2 | 149,4 |
| 200 | 210,0 | 216,6 | 226,0 | 229,5 | 234,0 | 241,1 | 249,4 | 255,3 | 267,5 |

# Статистическая погрешность

- это половина длины доверительного интервала

Если объем генеральной совокупности велик или не известен, то

$$\Delta_x = \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}$$

Если генеральная совокупность имеет объем N, то

$$\Delta_x = \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

**ЗАДАЧА.** Школьному психологу необходимо определить средний уровень вербальной памяти у первоклассников. Для этого были случайно отобраны 19 школьников и по результатам тестов вычислены выборочное среднее и дисперсия вербальной памяти, которые равны, соответственно 21,36 и 11,04. Найти статистическую погрешность на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, если:

а) психолога интересует средний уровень вербальной памяти всех первоклассников региона;

б) психолога интересует средний уровень памяти учеников данной школы, в которой 58 первоклассников.

*Решение*. Имеем

$$\bar{x} = 21,36;\ \ S^2 = 11,04;\ \ n = 19;\ S = \sqrt{11,04} = 3,32.$$

По таблице ПРИЛОЖЕНИЯ находим

$$t_{1-0,05/2}(19-1) = t_{0,975}(18) = 2,101.$$ Отсюда

а) если объем генеральной совокупности велик, то

$$\Delta_x = \frac{3,32 \cdot 2,101}{\sqrt{19}} = 1,6\ ;$$

б) если объем генеральной совокупности равен $N = 58$, то

$$\Delta_x = \frac{3,32 \cdot 2,101}{\sqrt{19}}\sqrt{1-\frac{19}{58}} = 1,31$$

**Статистическая погрешность частоты** равна

$$\Delta_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

если объем генеральной совокупности велик или не известен, и

$$\Delta_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{n}{N}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

если генеральная совокупность имеет объем N.

**ЗАДАЧА**. Психологу крупной торговой сети необходимо определить долю экстравертов среди менеджеров. Для этого были случайно отобраны и протестированы 35 менеджера и выяснилось, что среди них 18 экстравертов. Определить долю экстравертов и ее статистическую погрешность на уровне значимости α=0,02, если а) число менеджеров в торговой сети велико; б) число менеджеров равно 80.

*Решение*.

Частота (доля экстравертов) равна $w$=18/35=0,514. По таблице находим

$$t_{1-0{,}02/2}(35-1)=t_{0{,}99}(34)=2{,}45$$

Отсюда, если а) число менеджеров в торговой сети велико, то

$$\Delta_w=\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\cdot t_{1-\alpha/2}(n-1) \qquad \Delta_w=\sqrt{\frac{0{,}514(1-0{,}514)}{35}}\cdot 2{,}45=0{,}2$$

б) число менеджеров равно 80, то

$$\Delta_w=\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{N}}\cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

$$\Delta_w=\sqrt{\frac{0{,}514(1-0{,}514)}{35}}\cdot\sqrt{1-\frac{35}{80}}\cdot 2{,}45=0{,}15$$

# ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

*<u>Статистической гипотезой</u>* называется некоторое предположение, которое принимается или отвергается на основании статистических данных.

$H_0$ - *нулевая гипотеза*

$H_1$ - *альтернативная* гипотеза

α - уровень значимости (0,01-0,1). Это вероятность того, что отвергнута верная нулевая гипотеза)

$p = 1 - \alpha$ - доверительная вероятность

**Критерий согласия Пирсона (критерий χ – квадрат).**

Пусть имеется несколько показателей $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Типичные значения (норма) показателей $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Экспериментальные значения (норма) показателей $n_1', n_2', \dots, n_k'$

$$\chi^2 = \left(\frac{(n_1 - n_1')^2}{n_1} + \frac{(n_2 - n_2')^2}{n_2} + \dots + \frac{(n_к - n_к')^2}{n_к}\right).$$

$\chi^2_{кр}$ зависит от двух значений: доверительной вероятности $p = 1 -$ α и числа $k - 1$ называемого числом степеней свободы.

Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ , то предположение о том, что опытные данные соответствуют нормам, принимается.

**ЗАДАЧА**. Для формирования профильных классов ученики четвертого класса проходят профориентационный тест на выявление способностей к тем или иным наукам. Согласно городской статистики, $32\%$ учащихся четвертых классов имеют склонность к гуманитарным наукам, $27\%$ математическим, – к $25\%$ственным, – не определен $16\%$

При проверке 62 школьников данной школы оказалось, что имеют склонность к гуманитарным наукам – 21 человек, к математическим – 17 человек, к естественным – 14 человек и не выявили склонность 10 человек. Можно ли с вероятностью $p = 0{,}95$ считать, что профориентационное распределение четвероклассников в данной школе соответствует городскому.

## ***Решение***.

Записываем школьные показатели профориентации во вторую строчку расчетной таблицы. Согласно городской статистики из 62 школьников склонность к гуманитарным наукам должны проявлять (нормы) 62 · 32% = 19,84 школьника, к математическим – 62 · 27% = 16,74 школьника, к естественным – 62 · 25% = 15,5 школьника и не выявили склонность 62 · 16% = 9,92 школьника. Эти нормы записываем в третью строчку расчетной таблицы. В следующую строку записываем значения критерия, получаем таблицу вида:

| Способности | Гуманитарные науки | Математические науки | Естественные науки | Не выявлены |
|---|---|---|---|---|
| $n_i'$ | 21 | 17 | 14 | 10 |
| $n_i$ | 19,84 | 16,74 | 15,5 | 9,92 |
| $\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$ | 0,068 | 0,004 | 0,145 | 0,0645 |

$$\chi^2 = 0{,}068 + 0{,}004 + 0{,}145 + 0{,}0645 = 0{,}282.$$

По таблице критических значений (ПРИЛОЖЕНИЕ )

$p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$k - 1 = 4 - 1 = 3$

$\chi^2_{кр} = 7{,}815.$

$\chi^2 < \chi^2_{кр},$ следовательно, основная гипотеза принимается, то есть распределение способностей в классах соответствует городскому

# *Проверка гипотез о равенстве дисперсий*

1. Получают выборку показателя в двух группах объемом $\square_{\square}$ и $\square_{\square}$:

$$\square_1, \square_2, \square_3, \dots, \square_{\square\square}$$

$$\square_1, \square_2, \square_3, \dots, \square_{\square\square}$$

2. Задают некоторый уровень значимости α и доверительную вероятность $\square = 1 - \alpha$.

3. Рассчитывают выборочную среднюю дисперсии:

$$\square = \frac{1}{\square_{\square}}(\square_1 + \square_2 + \square_3 + \square + \square_{\square\square})$$

$$\square = \frac{1}{\square_{\square}}(\square_1 + \square_2 + \square_3 + \square + \square_{\square\square})$$

$$\square_{\square}^2 = \frac{1}{\square_{\square} - 1}\square\square_1^2 + \square_2^2 + \square + \square_{\square\square}^2 - \square_{\square}\square\square^2\square$$

$$\square_{\square}^2 = \frac{1}{\square_{\square} - 1}\square\square_1^2 + \square_2^2 + \square + \square_{\square\square}^2 - \square_{\square}\square\square^2\square$$

1. Вычисляют статистику, равную отношению большей дисперсии к меньшей. $\square = \frac{\max(\square_{\square}^2; \square_{\square}^2)}{\min(\square_{\square}^2; \square_{\square}^2)}$

2. По таблице обратного распределения Фишера на основании доверительной вероятности $\square$ и двух степеней свободы $\square - 1$ и $\square - 1$, где $\square$ – объем выборки с большей дисперсии, а $\square$ – с меньшей, находят критическое значение $\square_{кр} = \square_{1-\square}(\square - 1; \square - 1)$

3. Если $\square < \square_{кр}$, то дисперсии в группах равны, то есть группы имеют одинаковую степень однородности показателя.

**ЗАДАЧА.** Для участия в обучающей игре по знанию английского языка учащиеся 8-х классов были разбиты на две группы из 11 и 12 человек. Согласно требованию игры, необходимо, чтобы дисперсия уровня подготовки по языку была в группах одинакова. Для проверки был проведен экспресс-тест знания языка, который показал следующие баллы:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Группа 1 | 8 | 6 | 5 | 5 | 6 | 7 | 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | |
| Группа 2 | 7 | 6 | 4 | 9 | 3 | 6 | 7 | 5 | 7 | 3 | 8 | 6 |

Сравнить уровни дисперсии при $\alpha = 0{,}05$.

***Решение.*** В результате расчетов получим

$n_1 = 11$, $n_2 = 12$, $\bar{x}_1 = 5{,}81$, $\bar{x}_2 = 5{,}92$, $s_1^2 = 1{,}36$, $s_2^2 = 3{,}54$

Статистика критерия $F = \frac{3{,}54}{1{,}36} = 2{,}6$.

По таблице обратного распределения Фишера на основании вероятности $p = 1 - \alpha = 0{,}95$ и степени свободы $12 - 1 = 11$ *и* $11 - 1 = 10$, находим $F_{кр} = 2{,}94$. Видно, что $F < F_{кр}$, то есть дисперсии равны и уровень разброса в знаниях английского языка в группах одинаков.

**Критическое значение распределения Фишера $F_{0,95}(k_1, k_2)$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ (продолжение)**

| $k_2$ \ $k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 161 | 199 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 244 | 246 | 248 | 250 | 253 |
| **2** | 18,5 | 19,0 | 19,2 | 19,3 | 19,3 | 19,3 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,5 | 19,5 | 19,5 |
| **3** | 10,1 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,74 | 8,70 | 8,66 | 8,62 | 8,55 |
| **4** | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,91 | 5,86 | 5,80 | 5,75 | 5,66 |
| **5** | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,68 | 4,62 | 4,56 | 4,50 | 4,40 |
| **6** | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,00 | 3,94 | 3,87 | 3,81 | 3,70 |
| **7** | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,57 | 3,51 | 3,44 | 3,38 | 3,27 |
| **8** | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,28 | 3,22 | 3,15 | 3,08 | 2,97 |
| **9** | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,07 | 3,01 | 2,94 | 2,86 | 2,75 |
| **10** | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,91 | 2,85 | 2,77 | 2,70 | 2,58 |
| **11** | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,79 | 2,72 | 2,65 | 2,57 | 2,45 |
| **12** | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,69 | 2,62 | 2,54 | 2,47 | 2,34 |
| **13** | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,38 | 2,25 |
| **15** | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,39 | 2,31 | 2,18 |
| **16** | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,42 | 2,35 | 2,28 | 2,19 | 2,06 |
| **18** | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,34 | 2,27 | 2,19 | 2,11 | 1,97 |

## Критические значения распределения Фишера $F_{0,99}(k_1,k_2)$ на уровне значимости $\alpha = 0,01$ (продолжение)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 98,5 | 99,0 | 99,2 | 99,3 | 99,3 | 99,3 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,5 | 99,5 | 99,5 |
| 3 | 34,1 | 30,8 | 29,5 | 28,7 | 28,2 | 27,9 | 27,7 | 27,5 | 27,3 | 27,2 | 27,1 | 26,9 | 26,7 | 26,5 | 26,2 |
| 4 | 21,2 | 18,0 | 16,7 | 16,0 | 15,5 | 15,2 | 15,0 | 14,8 | 14,7 | 14,6 | 14,4 | 14,2 | 14,0 | 13,8 | 13,6 |
| 5 | 16,3 | 13,3 | 12,1 | 11,4 | 11,0 | 10,7 | 10,5 | 10,2 | 10,2 | 10,1 | 9,89 | 9,72 | 9,55 | 9,38 | 9,11 |
| 6 | 13,8 | 10,9 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,72 | 7,56 | 7,40 | 7,23 | 6,97 |
| 7 | 12,3 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 | 6,47 | 6,31 | 6,16 | 5,99 | 5,74 |
| 8 | 11,3 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,67 | 5,52 | 5,36 | 5,20 | 4,95 |
| 9 | 10,6 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,11 | 4,96 | 4,81 | 4,65 | 4,40 |
| 10 | 10,0 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,71 | 4,56 | 4,41 | 4,25 | 4,00 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,40 | 4,25 | 4,10 | 3,94 | 3,69 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,16 | 4,01 | 3,86 | 3,70 | 3,45 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 3,96 | 3,82 | 3,66 | 3,51 | 3,25 |
| 15 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,80 | 3,66 | 3,51 | 3,35 | 3,09 |

## Критические значения распределения Фишера $F_{0,99}(k_1,k_2)$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ (продолжение)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 98,5 | 99,0 | 99,2 | 99,3 | 99,3 | 99,3 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,5 | 99,5 | 99,5 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,55 | 3,41 | 3,26 | 3,10 | 2,84 |
| 18 | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 | 3,37 | 3,23 | 3,08 | 2,92 | 2,66 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,56 | 3,46 | 3,37 | 3,23 | 3,09 | 2,94 | 2,78 | 2,52 |
| 22 | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 | 3,35 | 3,26 | 3,12 | 2,98 | 2,83 | 2,67 | 2,40 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 | 3,26 | 3,17 | 3,03 | 2,89 | 2,74 | 2,58 | 2,31 |
| 26 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,42 | 3,29 | 3,18 | 3,09 | 2,96 | 2,81 | 2,66 | 2,50 | 2,23 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,07 | 2,98 | 2,84 | 2,70 | 2,55 | 2,39 | 2,11 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 3,12 | 2,99 | 2,89 | 2,80 | 2,66 | 2,52 | 2,37 | 2,20 | 1,92 |
| 60 | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,95 | 2,82 | 2,72 | 2,63 | 2,50 | 2,35 | 2,20 | 2,03 | 1,73 |
| 120 | 6,85 | 4,79 | 3,95 | 3,48 | 3,17 | 2,96 | 2,79 | 2,66 | 2,56 | 2,47 | 2,34 | 2,19 | 2,03 | 1,86 | 1,53 |