



**Добро пожаловать на наши интерактивные уроки!**

Интерактивные уроки по геометрии на тему:  
**«Движения плоскости вместо  
вычислений»**

Автор: **Самаров Сергей Евгеньевич**,  
ученик 8 «В» класса  
Руководитель: **Шиленкова Елена Валентиновна**,  
преподаватель математики

12.12.2017 г.



# Включить демонстрационный материал к задаче

Выбрать задачу из общего списка (нажмите, чтобы перейти к ней)

Задача о мосте через реку

Задача о построении отрезка с заданной серединой

Задача о 2-х касающихся окружностях

Задача о восстановлении квадрата

Задача о построении равностороннего треугольника

Задача о точках Торричелли и Ферма

Задача Наполеона Бонапарта

**Задача о двух ромбах**  
(придумана автором)

Задача Герона Александрийского

Задача Герона Александрийского  
(бильярдная формулировка)

Задача о треугольнике наименьшего периметра

Задача о треугольнике наименьшего периметра (бильярдный аналог)

Задача Фаньяно

Задача Фаньяно (бильярдный аналог)

Задача о нахождении бильярдной траектории

**Задача о замкнутой бильярдной траектории**  
(придумана автором)



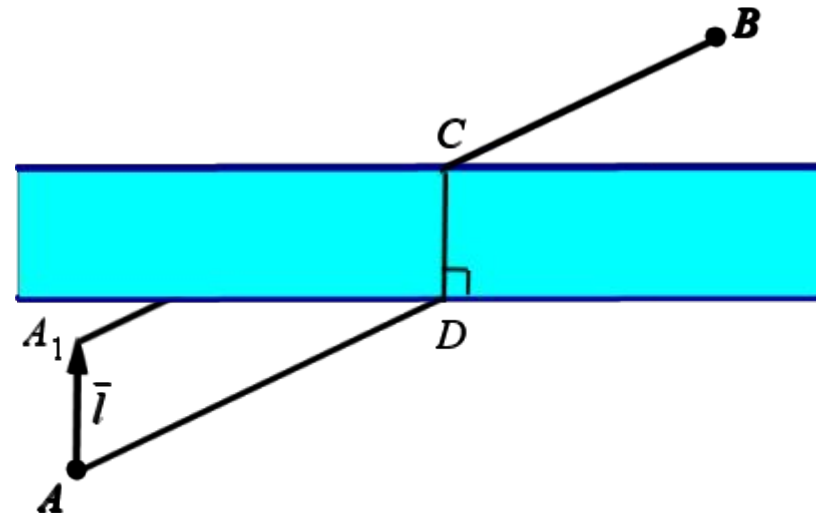
# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

## Задача о мосте через реку

### Задача о мосте через реку

Города  $A$  и  $B$  расположены на разных берегах реки.

В каком месте нужно построить мост через реку, чтобы путь от города  $A$  до города  $B$  был кратчайшим?



### Решение

#### Ответ:

Кратчайшим путем, ведущим из города  $A$  в город  $B$ , является путь, проходящий через мост  $DC$  :

$$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$$

К следующей задаче



# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

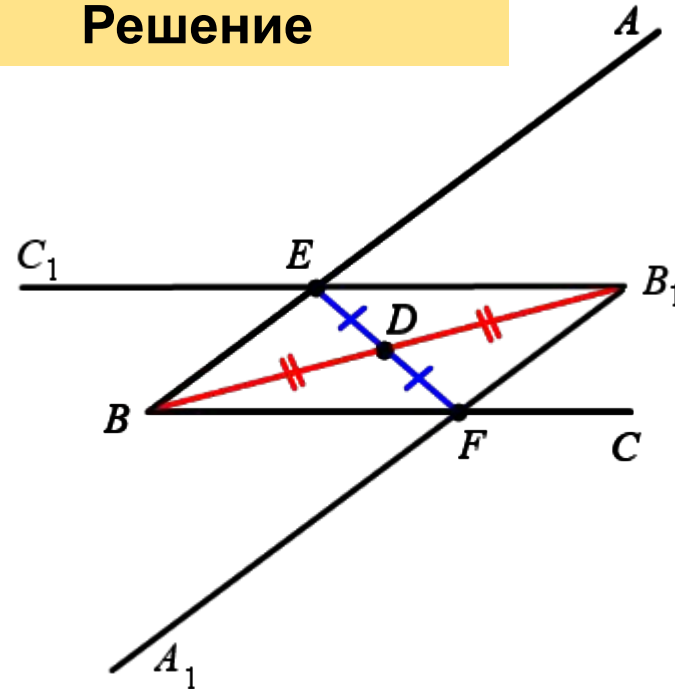
## Задача о построении отрезка с заданной серединой

### Задача о постр. отрезка с заданной серединой

Дан острый угол  $ABC$  с вершиной  $B$  и точка  $D$  внутри него.

Найти на сторонах угла такие точки  $E$  и  $F$ , чтобы точка  $D$  была серединой отрезка  $EF$ .

### Решение



### Ответ:

Точка  $D$  середина отрезка  $EF$

К следующей задаче



# Интерактивные уроки

## «Движение плоскости вместо вычислений»

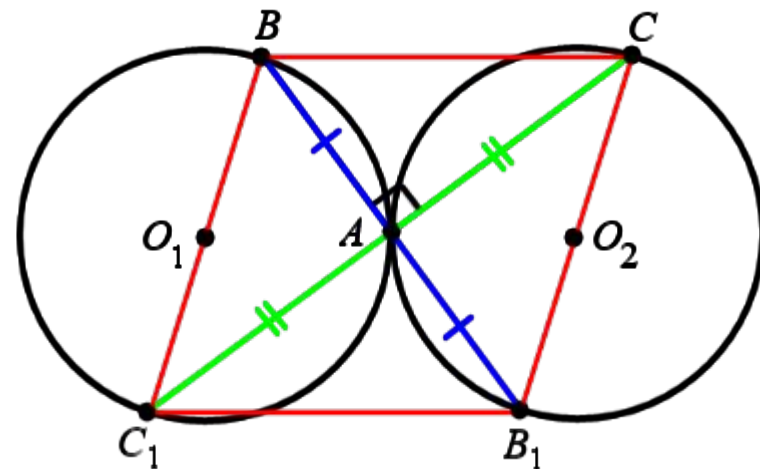
### Задача о двух касающихся окружностях

#### Задача о двух касающихся окружностях

Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и равными радиусами  $R$  касаются внешним образом в точке  $A$ .

Точки  $B$  и  $C$  лежат на разных окружностях, причем хорды  $BA$  и  $CA$  перпендикулярны. Доказать, что расстояние  $BC$  равно  $2R$ .

#### Решение



**Ответ:**

Доказано

К следующей задаче



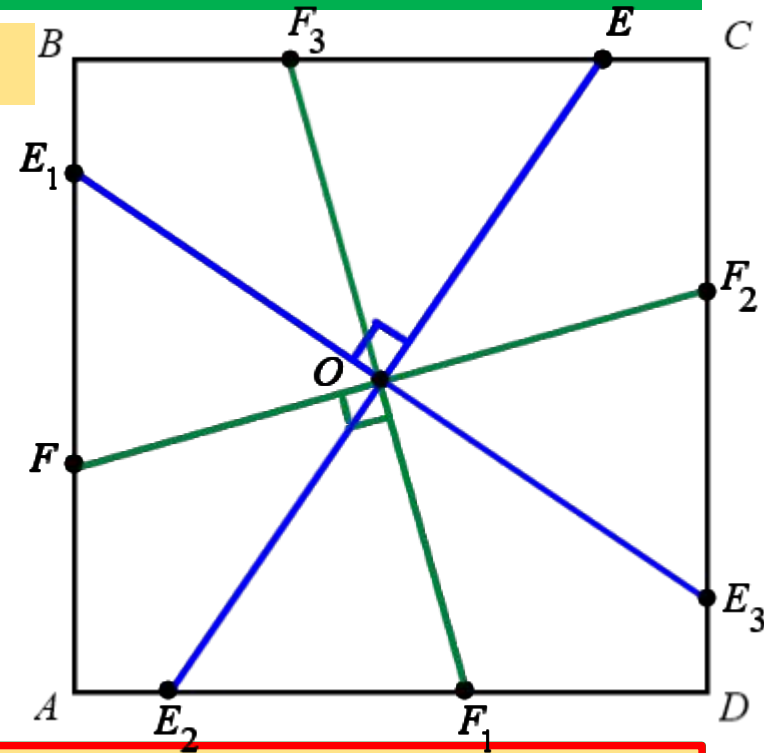
# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

## Задача о восстановлении квадрата

### Задача о восстановлении квадрата

Восстановить квадрат  $ABCD$ , если известен его центр  $O$  и точки  $F$  и  $E$ , расположенные на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно.

### Решение



### Ответ:

Квадрат восстановлен.

# Интерактивные уроки

## «Движение плоскости вместо вычислений»

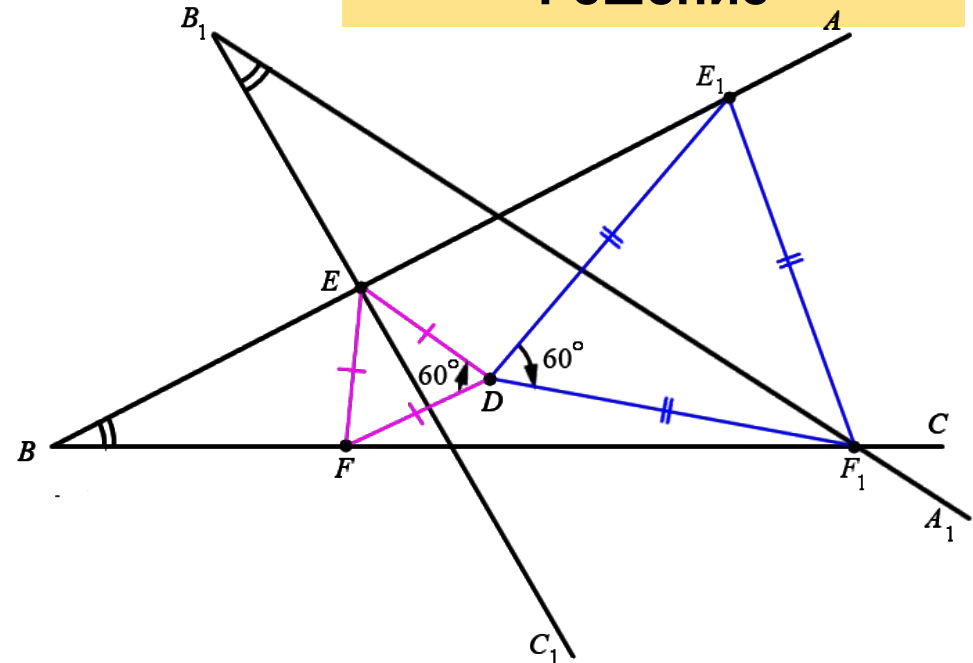
### Задача о построении равностороннего треугольника

#### Задача о равностороннем треугольнике

Дан угол  $ABC$  с вершиной  $B$  и точка  $D$  внутри него.

На сторонах угла  $AB$  и  $BC$  найти точки  $E$  и  $F$  так, чтобы треугольник  $EFD$  был равносторонним.

#### Решение



**Ответ:**

Равносторонние треугольники построены

К следующей задаче



# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

## Задача о точках Торричелли и Ферма

### Задача о точках Торричелли и Ферма

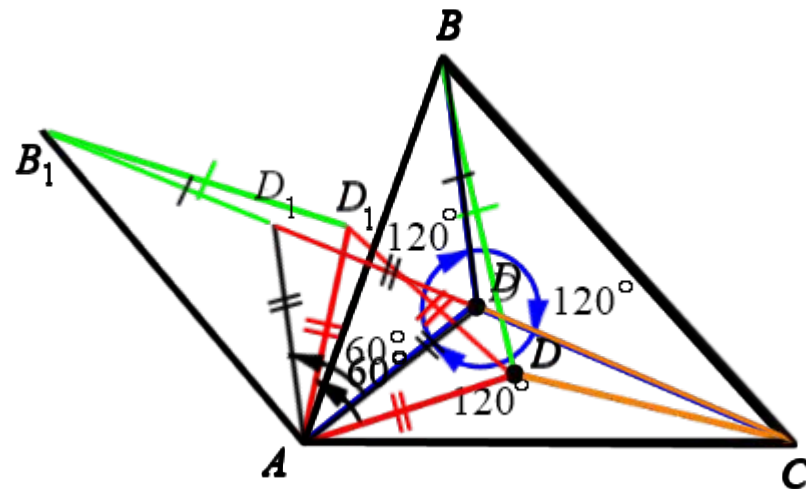
Дан остроугольный треугольник.

Точка **Ферма** – это точка внутри треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Точка **Торричелли** - это точка внутри треугольника, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в  $120^\circ$ .

Доказать, что эти точки совпадают и построить точку **Торричелли-Ферма**.

### Решение



### Ответ:

Точка Ферма-Торричелли построена.

Доказано

К следующей задаче





# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

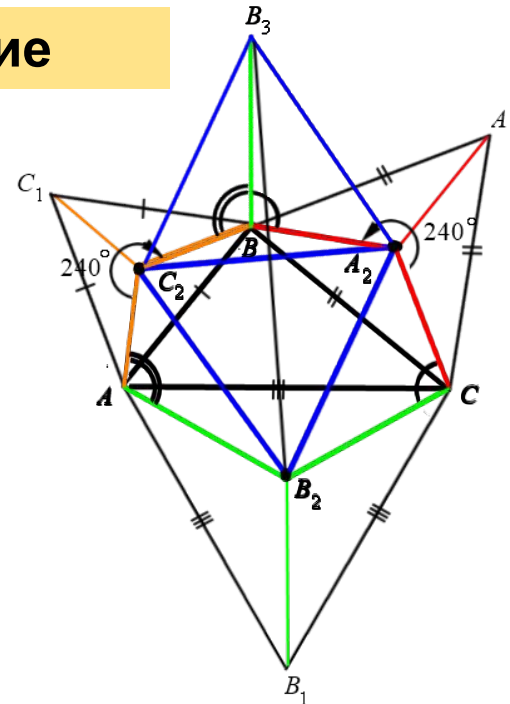
## Задача Наполеона Бонапарта

### Задача Наполеона

На сторонах произвольного треугольника как на основаниях вне треугольника построены равносторонние треугольники.

Доказать, что центры этих равносторонних треугольников также являются вершинами равностороннего треугольника.

### Решение



**Ответ:**

Доказано

К следующей задаче



# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

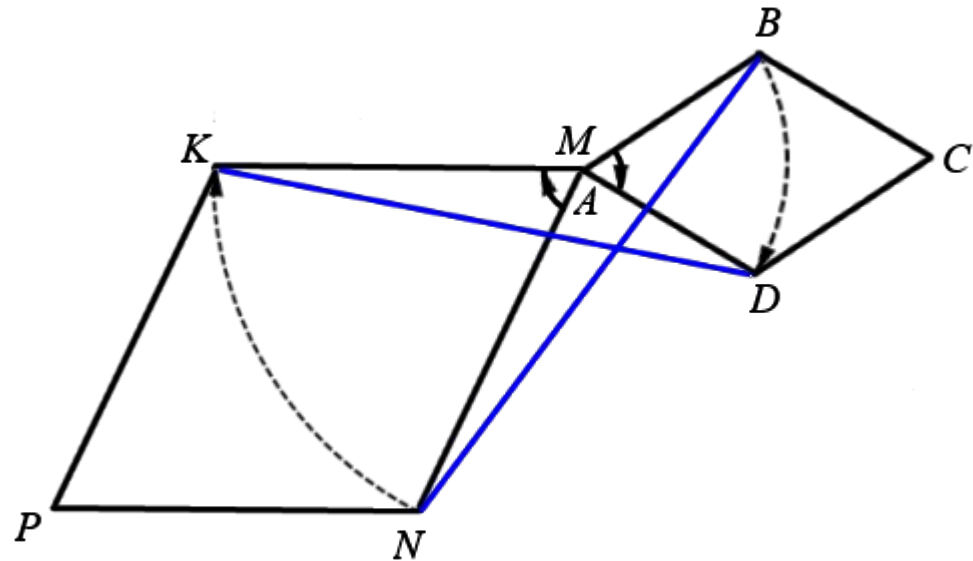
## Задача о двух ромбах (придумана автором проекта)

### Задача о двух ромбах

У ромбов  $ABCD$  и  $MNPK$  вершины  $A$  и  $M$  совпадают, а углы при вершинах  $A$  и  $M$  равны. При обходе по направлению  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  ромб  $ABCD$  остается справа, так же и при обходе по направлению  $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow K$  ромб  $MNPK$  остается справа.

Доказать, что отрезки  $BN$  и  $DK$  равны, а угол между ними равен углу  $BAD$

### Решение



### Ответ:

Отрезки  $BN$  и  $DK$  равны, а угол между ними равен углу  $BAD$ .

К следующей задаче



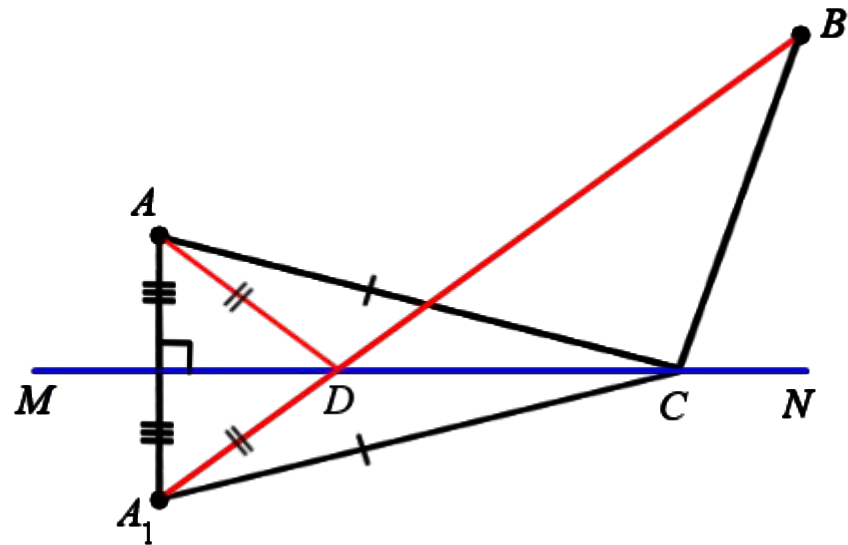
# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

## Задача Герона Александрийского

### Задача Герона Александрийского

Города  $A$  и  $B$  расположены на одном берегу реки  $MN$ . Курьер должен доставить донесение из города  $A$  в город  $B$ , напоив в реке коня.

По какому пути нужно двигаться курьеру, чтобы пройденное им расстояние было наименьшим?



### Решение

**Ответ:**

Самый короткий путь для курьера:  $A \rightarrow D \rightarrow B$

К следующей задаче



# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

## Бильярдная формулировка задачи Герона Александрийского

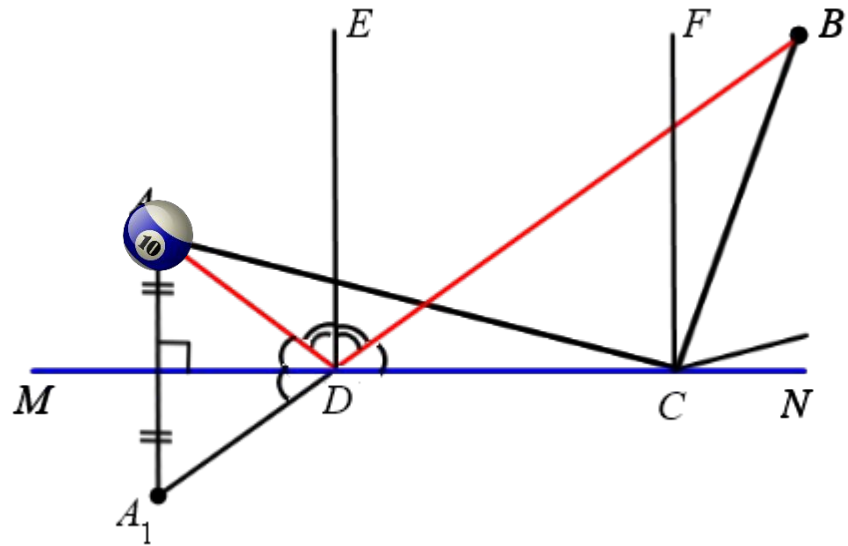
### Задача Герона Александрийского (бильярдная фор-ка)

Задачу Герона можно переформулировать в виде задачи о траектории бильярдного шара, которая состоит в следующем:

На бильярдном столе с краем  $MN$  лежат шары  $A$  и  $B$ .

Как игрок должен направить шар  $A$ , чтобы, отразившись от края  $MN$ , шар  $A$  попал в шар  $B$ ?

### Решение



### Ответ:

Шар должен быть направлен в точку  $D$  и пройдет путь:  $A \rightarrow D \rightarrow B$

К следующей задаче



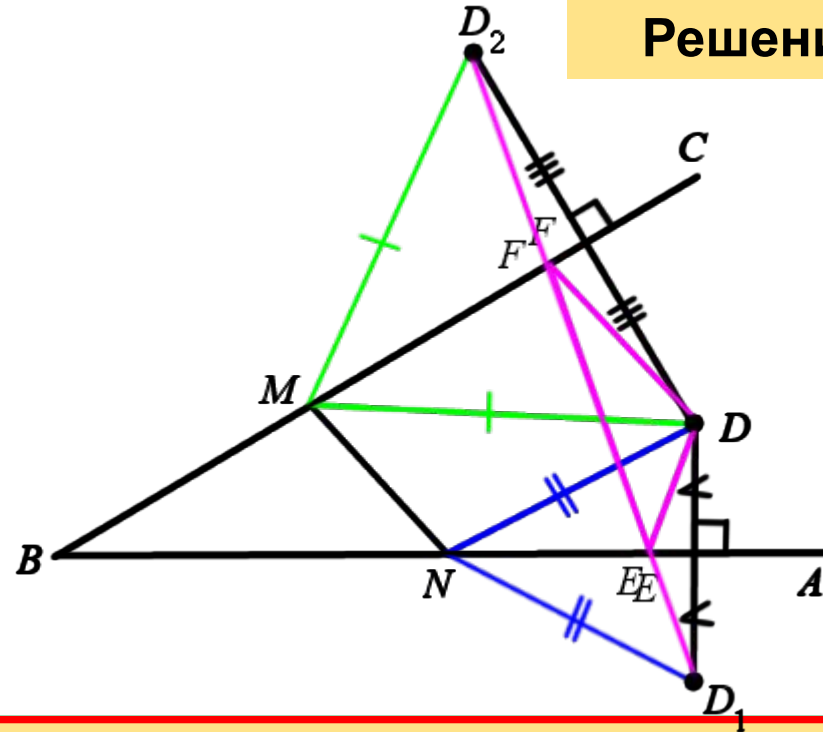
# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

## 3-ча о треуг. наименьш. периметра с вершинами на сторонах угла

### Задача о треуг. наименьшего периметра

Дан острый угол  $ABC$  и точка  $D$  внутри него.

На сторонах угла найти точки  $E$  и  $F$  так, чтобы периметр треугольника  $DEF$  был наименьшим



**Ответ:**

Полученный треугольник  $DEF$  и обладает наименьшим периметром.

К следующей задаче



# Интерактивные уроки

## «Движение плоскости вместо вычислений»

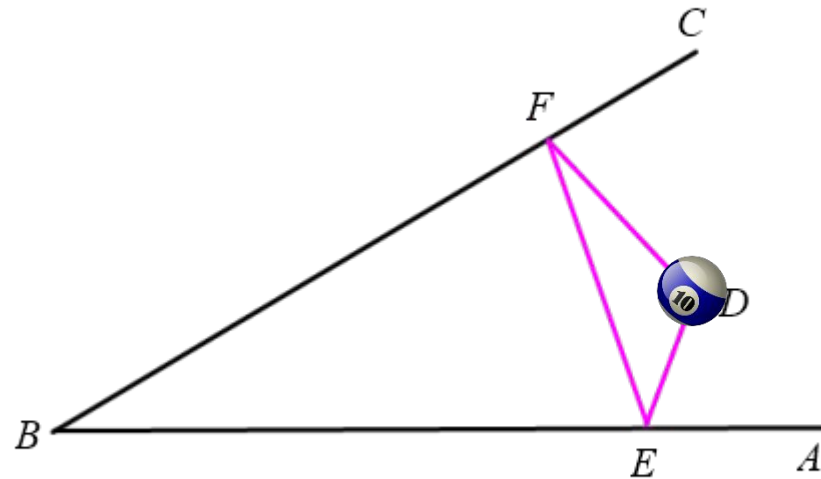
Бильярд. фор-ка з. о треуг. наим. периметра с верш. на стор. угла

### 3-ча о треуг. наим. периметра (бильярдная фор-ка)

Рассмотрим лучи  $AB$  и  $BC$  как края бильярдного стола  $ABC$  без луз, на котором лежит шар  $D$ .

Если игрок направит шар  $D$  в точку  $F$ , то, отразившись, в соответствии с физическим законом отражения, от края  $BC$  в точке  $F$ , шар, пройдя по отрезку  $FE$ , отразится от края  $AB$  в точке  $E$  и вернется в точку  $D$  по отрезку  $ED$ .

### Решение



### Ответ:

Треугольник  $DEF$  имеет наименьший периметр.

К следующей задаче



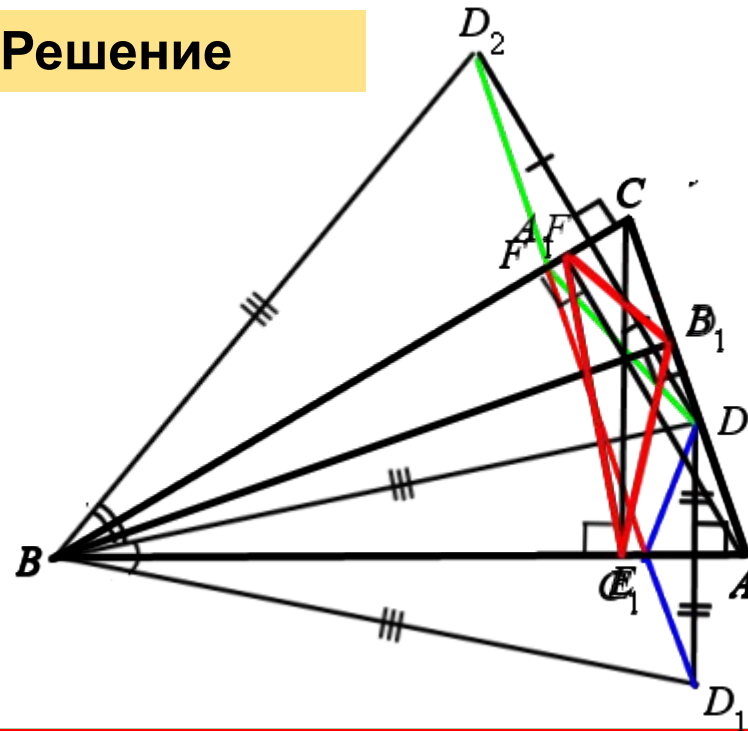
# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

## Задача Фаньяно

### Задача Фаньяно

На сторонах остроугольного треугольника  $ABC$  найти такие точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , чтобы периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  был наименьшим.

### Решение



### Ответ:

Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  найдены.

К следующей задаче



# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

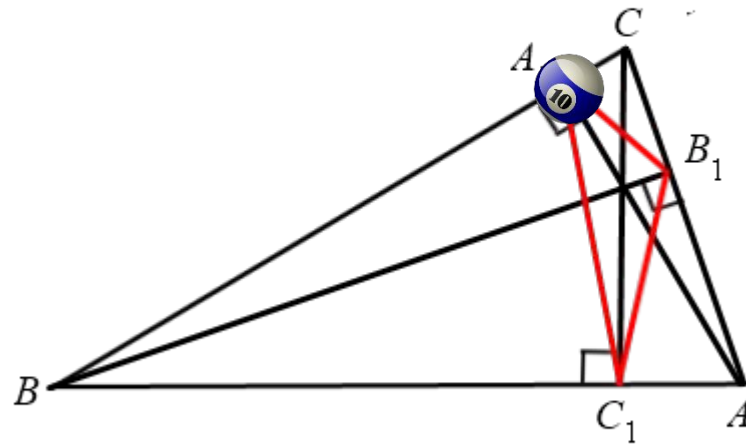
## Бильярдный аналог задачи Фаньяно

### Задача Фаньяно (бильярдный аналог)

Рассмотрим треугольник  $ABC$  как бильярдный стол без луз. Если игрок пошлет, например, шар из точки  $A_1$  в точку  $B_1$ , то, отразившись от края стола  $AC$  в точке  $B_1$ , шар попадет в точку  $C_1$ . После этого шар, отразившись от края стола  $AB$  в точке  $C_1$ , возвратится в точку  $A_1$ .

В противоположном направлении ситуация будет аналогичной.

### Решение



### Ответ:

Решение задачи Фаньяно завершено

К следующей задаче





# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

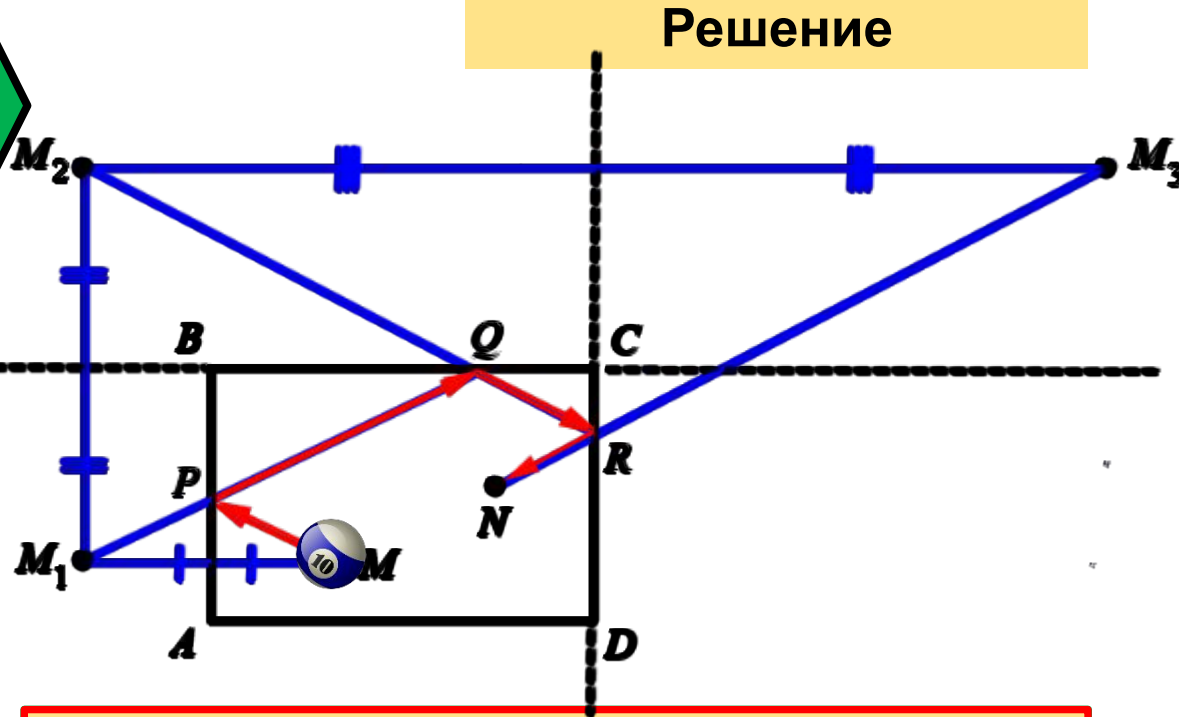
## Задача о нахождении бильярдной траектории

### Задача о нахождении бильярд. траект-и

На бильярдном столе в форме прямоугольника  $ABCD$  без луз лежат шары  $M$  и  $N$ .

Игрок бьет кием по шару  $M$ . После этого шар  $M$  ударяется в сторону  $AB$ , затем в сторону  $BC$ , потом в сторону  $CD$  и попадает в шар  $N$ .

Найти путь шара  $M$ .



**Ответ:**

Путь шара отмечен на рисунке красным цветом.

К следующей задаче



# Интерактивные уроки «Движение плоскости вместо вычислений»

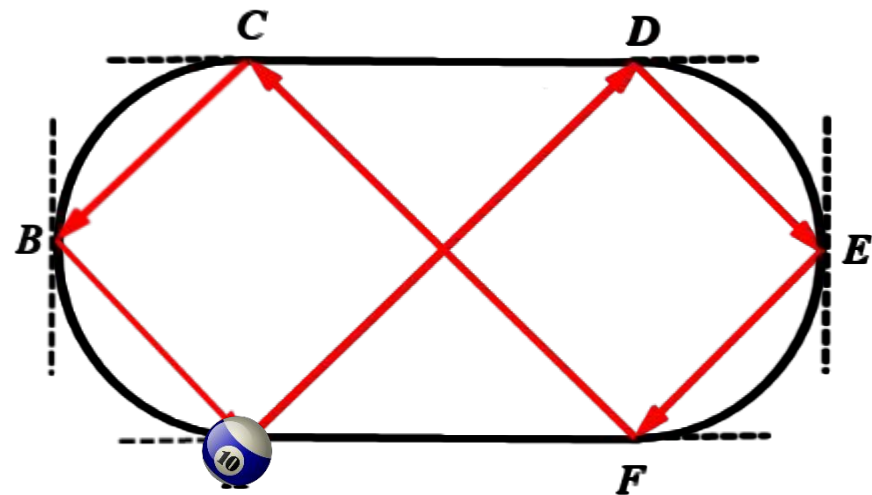
## Задача о замкнутой бильярдной траектории (придумана автором)

### Задача о замкн. бильярд. траектории

Бильярдный стол без луз имеет форму квадрата  $ACDF$ , на сторонах  $AC$  и  $FD$  которого как на диаметрах вне квадрата построены полукруги.

Найти какую-нибудь замкнутую траекторию движения бильярдного шара, имеющую 6 звеньев.

### Решение



### Ответ:

Траекторией шара будет замкнутая ломаная линия, отмеченная на красном цвете и состоящая из 6 звеньев

До свидания!



На сегодня наш интерактивный урок завершен,  
будем рады видеть Вас снова!

**Спасибо за внимание!**

