

# Дифференциальные уравнения в частных производных

Если  $u = u(x; y)$  , то в общем случае ДУ с частными производными второго порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + 2y.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = x + 2y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int (x + 2y) dx = \frac{x^2}{2} + 2yx + C_1(y).$$

$$u(x; y) = \int \left( \frac{x^2}{2} + 2yx + C_1(y) \right) dy =$$

$$= \frac{x^2}{2} y + y^2 x + C_1^*(y) + C_2(x)$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{y} u \right) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{y} u = C_1(y).$$

$$u = wv, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w^1 v + wv^1;$$

$$w^1 v + w v^1 + \frac{1}{y} w v = C_1(y) ;$$

$$w^1 v + w \left( v^1 + \frac{1}{y} v \right) = C_1(y) \Rightarrow \begin{cases} v^1 + \frac{1}{y} v = 0 \\ w^1 v = C_1(y) \end{cases} ;$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|v| = -\ln|y| \Rightarrow v = \frac{1}{y}.$$

$$w^1 \frac{1}{y} = C_1(y) \Rightarrow w^1 = y \cdot C_1(y) \Rightarrow w = \int y \cdot C_1(y) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = C_1^*(y) + C_2(x).$$

$$u(x; y) = (C_1^*(y) + C_2(x)) \frac{1}{y}.$$

Дифференциальное уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее частных производных.

- ▶ Любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка (при двух независимых переменных) может быть записано в следующем виде:

$$a \cdot u''_{xx} + 2b \cdot u''_{xy} + c \cdot u''_{yy} + d \cdot u'_x + e \cdot u'_y + f \cdot u + g = 0$$

Для упрощения исходного дифференциального уравнения, необходимо сделать замену для независимых переменных:

$$\xi = \varphi(x; t);$$

$$\eta = \psi(x; t).$$

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta'_x;$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi'_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta'_y$$

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x =$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta'_x \right)'_x = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)'_x \cdot \xi'_x + \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \xi''_{xx} + \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)'_x \cdot \eta'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_x =$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \eta'_x \right] \cdot \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{xx} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \eta'_x \right] + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{xx}$$

$$u''_{xx} = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot (\xi'_x)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot (\eta'_x)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{xx} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{xx}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \xi'_y \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \eta'_y \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \eta'_x \cdot \xi_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \eta'_x \cdot \eta'_y + \\
 &\quad + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{xy} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{xy}
 \end{aligned}$$

$$u''_{yy} = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot (\xi'_y)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi'_y \cdot \eta'_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot (\eta'_y)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{yy} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{yy}$$

Подставляя теперь найденные частные производные в исходное уравнение, получим уравнение (2):

$$\bar{a}u''_{\xi\xi} + 2\bar{b}u''_{\xi\eta} + \bar{c}u''_{\eta\eta} + \bar{F}(u'_\xi, u'_\eta, u, \xi, \eta) = 0$$

$$\bar{a} = a(\xi'_x)^2 + 2b\xi'_x\xi'_y + c(\xi'_y)^2$$

$$\bar{b} = a\xi'_x\eta'_x + b(\xi'_x\eta'_y + \xi'_y\eta'_x) + c\xi'_y\eta'_y$$

$$\bar{c} = a(\eta'_x)^2 + 2b\eta'_x\eta'_y + c(\eta'_y)^2$$

Чтобы уравнение (2) приобрело более простой вид, функции  $u$  и  $v$  подбираются так, чтобы они являлись решениями уравнения (3):

$$a(z'_x)^2 + 2bz'_xz'_y + c(z'_y)^2 = 0$$

# Теорема:

- ▶ Для того чтобы функция  $z = f(x; y)$  во всех точках области  $G$  удовлетворяла уравнению (3), необходимо и достаточно, чтобы семейство

$$f(x; y) = k$$

было общим интегралом уравнения

$$a(dy)^2 - 2bdydx + c(dx)^2 = 0$$

**Пример.** Найти решение уравнения  $x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} = 0$

▶ Решение. В данном уравнении  $a = x^2$   $b = 0$   $c = -y^2$

Составим характеристическое уравнение:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = k$$

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow yx = k$$

$$\xi = \frac{y}{x} \quad \eta = xy$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + u'_\eta \cdot \eta''_{xx} =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot y + u''_{\eta\eta} \cdot y^2 + u'_\xi \cdot \frac{2y}{x^3} + u'_\eta \cdot 0$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{x^2} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{x} \cdot x + u''_{\eta\eta} \cdot x^2$$

$$-4y^2 u''_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u'_{\xi} = 0$$

$$-4\xi\eta u''_{\xi\eta} + 2\xi u'_{\xi} = 0 \Rightarrow 2\eta u''_{\xi\eta} = u'_{\xi}$$

$$u'_{\xi} = v$$

$$2\eta v_{\eta}' = v \Rightarrow v = c(\xi)\sqrt{\eta}$$

$$u'_{\xi} = c(\xi)\sqrt{\eta} \Rightarrow u = \int c(\xi)\sqrt{\eta} d\xi = \sqrt{\eta} \int c(\xi) d\xi + C_1 = \sqrt{\eta} C_2(\xi) + C_1(\eta)$$

$$u = \sqrt{xy} C_2\left(\frac{y}{x}\right) + C_1(xy)$$

Линейное уравнение второго порядка

$$a \cdot u''_{xx} + 2b \cdot u''_{xy} + c \cdot u''_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

имеет в точке  $(x; y)$  гиперболический тип, если  $b^2 - ac > 0$ ,  
параболический тип, если  $b^2 - ac = 0$ , эллиптический  
тип, если  $b^2 - ac < 0$ .

Для того, чтобы привести уравнение к каноническому  
виду, нужно составить уравнение характеристик

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$$

которое распадается на два уравнения (5) и (6):

$$ady - \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)dx = 0, \quad ady - \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)dx = 0$$

# Уравнения гиперболического типа:

- ▶ Общие интегралы уравнений (5) и (6)

$$\varphi(x; y) = c_1 \quad \psi(x; y) = c_2$$

будут вещественными и различными.

Они определяют два различных семейства характеристик.

Вводя новые независимые переменные, по правилу

$$\xi = \varphi(x; y) \quad \eta = \psi(x; y)$$

уравнение приведет к каноническому виду:  $v_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$

# Уравнения параболического типа

- ▶ В этом случае уравнения (5) и (6) совпадают, и их общий интеграл будет иметь вид:  $\varphi(x, y) = c_1$

Введем новые независимые переменные, по правилу

$$\xi = \varphi(x; y) \quad \eta = \eta(x; y)$$

где функцию  $\eta = \eta(x, y)$  выбираем таким образом, чтобы якобиан преобразования

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Уравнение в новых переменных примет вид:

$$v_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

# Уравнения эллиптического типа

- ▶ Общие интегралы уравнений (5) и (6) - комплексно-сопряженные:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c_1$$

Полагая  $\xi = \varphi(x; y)$     $\eta = \psi(x; y)$

исходное уравнение приведет к каноническому виду:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

При построении канонического вида уравнения используются формулы преобразования производных функции  $u(x, y)$  к новым переменным:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}$$

Пример. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$$

▶ Решение. Имеем  $a=1, b=\frac{1}{2}, c=-2 \Rightarrow b^2 - ac = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$

следовательно, уравнение имеет гиперболический тип на всей плоскости.

Составим уравнение характеристик:

▶  $(dy)^2 - dy \cdot dx - 2(dx)^2 = 0$   
 $dy - 2dx = 0 \Rightarrow y = 2x + c_1$   
 $dy + dx = 0 \Rightarrow y = -x + c_2$

Характеристиками заданного уравнения будут функции:

$$\varphi_1 = y - 2x \quad \varphi_2 = y + x$$

Выполним замену:  $\xi = \varphi_1 = y - 2x, \eta = y + x$

$$\xi_x = -2, \xi_y = 1, \eta_x = 1, \eta_y = 1$$

$$\xi_{xx} = 0, \xi_{yy} = 0, \xi_{xy} = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{yy} = 0, \eta_{xy} = 0$$

Построим выражения для производных функции  $u$  при переходе к новым переменным, указав слева от вертикальной черты коэффициенты, с которыми производные входят в уравнение:

$$\begin{array}{l|l} -3 & u_x = -2v_\xi + v_\eta, \\ -15 & u_y = v_\xi + v_\eta, \\ 1 & u_{xx} = 4v_{\xi\xi} - 4v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\ -2 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\ 1 & u_{xy} = -2v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}. \end{array}$$

Подставляя производные в исходное уравнение, находим

коэффициенты: 
$$\frac{v_{\xi\xi} \quad v_{\eta\eta} \quad v_{\xi\eta} \quad v_{\xi} \quad v_{\eta} \quad v}{0 \quad 1 \quad -9 \quad -9 \quad -18 \quad 0}$$

Построим выражение для неоднородного члена уравнения:

$$27x = 27 \frac{\xi - \eta}{3} = 9(\xi - \eta)$$

Подставляя построенные выражения в заданное уравнение, приведем его к каноническому виду:

$$v_{\eta\eta} - 9v_{\xi\eta} - 9v_{\xi} - 18v_{\eta} + 9(\xi - \eta) = 0$$

**Пример.** Привести к каноническому виду уравнение:

$$(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0$$

Решение. Имеем  $a = (1 + x^2)^2, b = 0, c = 1$

$$b^2 - ac = -(1 + x^2)^2 < 0$$

Это уравнение эллиптического типа.

Составим уравнения характеристик:

$$(1 + x^2)^2 (dy)^2 + (dx)^2 = 0$$

$$(1+x^2)^2 dy \pm i(1+x^2)dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} dy = \frac{-i}{1+x^2} dx, \\ dy = \frac{i}{1+x^2} dx. \end{cases}$$

$$\varphi = y + i \cdot \operatorname{arctg}x = c_1$$

$$\bar{\varphi} = y - i \cdot \operatorname{arctg}x = c_2$$

$$\xi = \operatorname{Re}(\varphi) = y$$

$$\eta = \operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{arctg}x$$

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \eta_x = \frac{1}{1+x^2}, \eta_y = 0, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0$$

$$\begin{array}{l} 2x(1+x^2) \\ 0 \\ (1+x^2)^2 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} u_x = \frac{1}{1+x^2} v_\eta, \\ u_y = v_\xi, \\ u_{xx} = \frac{1}{1+x^2} v_{\eta\eta} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} v_\eta, \\ u_{yy} = v_{\xi\xi}. \end{array} \right.$$

Подставив найденные выражения в заданное уравнение, приведем его к каноническому виду:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0$$

Пример. Привести уравнение к каноническому виду

$$x^2 u_{xx}'' + 2xy u_{xy}'' + y^2 u_{yy}'' = 0.$$

Решение. В данном случае  $b^2 - ac = x^2 y^2 - x^2 y^2 = 0$ .

Делаем вывод, что уравнение относится к параболическому типу. Составляем уравнение характеристик:

$$x^2 (dy)^2 + 2xy dx dy + y^2 (dx)^2 = 0$$

$$x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy \left( \frac{dy}{dx} \right) + y^2 = 0.$$

Данное уравнение является квадратным относительно отношения дифференциалов  $dy/dx$ . Решая его получим два дифференциальных уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

$$D = b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow y = \frac{C}{x} \Rightarrow C = yx.$$

Следовательно

$$\xi = xy.$$

Пусть  $\eta = -x$ , тогда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = x \neq 0$$

Находим производные до второго порядка:

$$\xi_x^1 = y; \quad \xi_y^1 = x; \quad \eta_x^1 = -1; \quad \eta_y^1 = 0;$$

$$u_x^1 = u_\xi^1 \cdot y - u_\eta^1 \cdot 1;$$

$$u_y^1 = u_\xi^1 \cdot x + u_\eta^1 \cdot 0 = u_\xi^1 \cdot x;$$

$$\begin{aligned} u_{xx}^1 &= u_{\xi\xi}^1 \cdot y^2 - 2u_{\xi\eta}^1 \cdot y \cdot 1 + u_{\eta\eta}^1 \cdot 1 + u_\xi^1 \cdot 0 + u_\eta^1 \cdot 0 = \\ &= u_{\xi\xi}^1 y^2 - u_{\xi\eta}^1 2y + u_{\eta\eta}^1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= u_{\xi\xi}^1 \cdot x \cdot y + u_{\xi\eta}^1 \cdot 0 \cdot y - u_{\xi\eta}^1 \cdot 1 \\ &\cdot x - u_{\eta\eta}^1 \cdot 1 \cdot 0 + u_\xi^1 \cdot 1 + u_\eta^1 \cdot 0 = u_{\xi\xi}^1 xy - u_{\eta\eta}^1 x + u_\xi^1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy}^1 &= u_{\xi\xi}^1 \cdot x^2 + 2u_{\xi\eta}^1 \cdot x \cdot 0 + u_{\eta\eta}^1 \cdot 0 + u_\xi^1 \cdot 0 + u_\eta^1 \cdot 0 = \\ &= u_{\xi\xi}^1 x^2. \end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в исходное дифференциальное уравнение:

$$x^2 y^2 u_{\xi\xi}^{\eta} - 2x^2 y u_{\xi\eta}^{\eta} + x^2 u_{\eta\eta}^{\eta} + 2x^2 y^2 u_{\xi\xi}^{\eta} - 2x^2 y u_{\eta\eta}^{\eta} + 2xy u_{\xi}^1 + x^2 y^2 u_{\xi\xi}^{\eta} = 0;$$

$$4x^2 y^2 u_{\xi\xi}^{\eta} - 2x^2 y u_{\xi\eta}^{\eta} + x^2 (1 - 2y) u_{\eta\eta}^{\eta} + 2xy u_{\xi}^1 = 0.$$

$$4\xi^2 u_{\xi\xi}^{\eta} - 2\xi\eta u_{\xi\eta}^{\eta} + (\eta^2 - \eta\xi) u_{\eta\eta}^{\eta} + 2\xi u_{\xi}^1 = 0.$$