# Дифференциальные уравнения в частных производных

Если $u = u(x;y)$, то в общем случае ДУ с частными производными второго порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

# Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + 2y.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x + 2y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int (x + 2y)dx = \frac{x^2}{2} + 2yx + C_1(y).$$

$$u(x;y) = \int \left( \frac{x^2}{2} + 2yx + C_1(y) \right) dy =$$

$$= \frac{x^2}{2} y + y^2 x + C_1^*(y) + C_2(x)$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{y}u\right) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{y}u = C_1(y).$$

$$u = wv,\ \frac{\partial u}{\partial y} = w^{1}v + wv^{1};$$

$$w'v + wv' + \frac{1}{y}wv = C_1(y)\ ;$$

$$w'v + w\left(v' + \frac{1}{y}v\right) = C_1(y) \Longrightarrow \begin{cases} v' + \frac{1}{y}v = 0 \\ w'v = C_1(y) \end{cases};$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y} \Longrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Longrightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln|v| = -\ln|y| \Longrightarrow v = \frac{1}{y}.$$

$$w' \frac{1}{y} = C_1(y) \Rightarrow w' = y \cdot C_1(y) \Rightarrow w = \int y \cdot C_1(y) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = C_1^*(y) + C_2(x).$$

$$u(x; y) = \left(C_1^*(y) + C_2(x)\right)\frac{1}{y}.$$

Дифференциальное уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее частных производных.

- Любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка (при двух независимых переменных) может быть записано в следующем виде:

$$a \cdot u''_{xx} + 2b \cdot u''_{xy} + c \cdot u''_{yy} + d \cdot u'_x + e \cdot u'_y + f \cdot u + g = 0$$

Для упрощения исходного дифференциального уравнения, необходимо сделать замену для независимых переменных:

$$\xi = \varphi(x;t);$$
$$\eta = \psi(x;t).$$

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta'_x;$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi'_y + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta'_y$$

$$u''_{xx} = \left(u'_x\right)'_x =$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta'_x \right)'_x = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)'_x \cdot \xi'_x + \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \xi''_{xx} + \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)'_x \cdot \eta'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_x =$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \eta'_x \right] \cdot \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{xx} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \eta'_x \right] + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{xx}$$

$$u''_{xx} = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot (\xi'_x)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot (\eta'_x)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{xx} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{xx}$$

$$ {}_{y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \xi'_y \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \eta'_y \cdot \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \eta'_x \cdot \xi_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \eta'_x \cdot \eta'_y + $$

$$ + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{xy} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{xy} $$

$$ u''_{yy} = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\xi'_y\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi'_y \cdot \eta'_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\eta'_y\right)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \xi''_{yy} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \eta''_{yy} $$

Подставляя теперь найденные частные производные в исходное уравнение, получим уравнение (2):

$$\bar{a}u''_{\xi\xi} + 2\bar{b}\,u''_{\xi\eta} + \bar{c}u''_{\eta\eta} + \bar{F}\left(u'_{\xi}, u'_{\eta}, u, \xi, \eta\right) = 0$$

$$\bar{a} = a\left(\xi'_x\right)^2 + 2b\xi'_x\xi'_y + c\left(\xi'_y\right)^2$$

$$\bar{b} = a\xi'_x\eta'_x + b\left(\xi'_x\eta'_y + \xi'_y\eta'_x\right) + c\xi'_y\eta'_y$$

$$\bar{c} = a\left(\eta'_x\right)^2 + 2b\eta'_x\eta'_y + c\left(\eta'_y\right)^2$$

Чтобы уравнение (2) приобрело более простой вид, функции  и  подбираются так, чтобы они являлись решениями уравнения (3):

$$a\left(z'_x\right)^2 + 2bz'_x z'_y + c\left(z'_y\right)^2 = 0$$

# Теорема:

- Для того чтобы функция $z = f(x; y)$ во всех точках области G удовлетворяла уравнению (3), необходимо и достаточно, чтобы семейство

$$f(x; y) = k$$

было общим интегралом уравнения

$$a(dy)^2 - 2bdydx + c(dx)^2 = 0$$

***Пример***. Найти решение уравнения $x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} = 0$

- Решение. В данном уравнении $a = x^2 \quad b = 0 \quad c = -y^2$

Составим характеристическое уравнение:

$$x^2 (dy)^2 - y^2 (dx)^2 = 0 \Rightarrow y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = k \qquad y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow yx = k$$

$$\xi = \frac{y}{x} \qquad \eta = xy$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_{\xi} \cdot \xi''_{xx} + u'_{\eta} \cdot \eta''_{xx} =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 2u''_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot y + u''_{\eta\eta} \cdot y^2 + u'_{\xi} \cdot \frac{2y}{x^3} + u'_{\eta} \cdot 0$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{x^2} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{x} \cdot x + u''_{\eta\eta} \cdot x^2$$

$$-4y^2 u''_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u'_{\xi} = 0$$

$$-4\xi\eta\, u''_{\xi\eta} + 2\xi\, u'_{\xi} = 0 \Rightarrow 2\eta\, u''_{\xi\eta} = u'_{\xi}$$

$$u'_{\xi} = v$$

$$2\eta\, v_{\eta}{}' = v \Rightarrow v = c(\xi)\sqrt{\eta}$$

$$u'_{\xi} = c(\xi)\sqrt{\eta} \Rightarrow u = \int c(\xi)\sqrt{\eta}\, d\xi = \sqrt{\eta}\int c(\xi)\, d\xi + C_1 = \sqrt{\eta}\, C_2(\xi) + C_1(\eta)$$

$$u = \sqrt{xy}\, C_2\left(\frac{y}{x}\right) + C_1(xy)$$

Линейное уравнение второго порядка

$$a \cdot u''_{xx} + 2b \cdot u''_{xy} + c \cdot u''_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

имеет в точке $(x; y)$ гиперболический тип, если $b^2 - ac > 0$, параболический тип, если $b^2 - ac = 0$, эллиптический тип, если $b^2 - ac < 0$.

Для того, чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно составить уравнение характеристик

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$$

которое распадается на два уравнения (5) и (6):

$$ady - \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)dx = 0, \quad ady - \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)dx = 0$$

# Уравнения гиперболического типа:

- Общие интегралы уравнений (5) и (6)

$$\varphi(x;y)=c_1 \qquad \psi(x;y)=c_2$$

будут вещественными и различными.

Они определяют два различных семейства характеристик.

Вводя новые независимые переменные, по правилу

$$\xi=\varphi(x;y) \qquad \eta=\psi(x;y)$$

уравнение приведется каноническому виду: $v_{\xi\eta}=F_1(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta)$

# Уравнения параболического типа

- В этом случае уравнения (5) и (6) совпадают, и их общий интеграл будет иметь вид: $\varphi(x,y)=c_1$

Введем новые независимые переменные, по правилу

$$\xi=\varphi(x;y) \qquad \eta=\eta(x;y)$$

где функцию $\eta=\eta(x,y)$ выбираем таким образом, чтобы якобиан преобразования

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$$

Уравнение в новых переменных примет вид:

$$v_{\eta\eta} = F_2\left(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\right)$$

# Уравнения эллиптического типа

- Общие интегралы уравнений (5) и (6) – комплексно-сопряженные: $$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=c_1$$

Полагая $\xi=\varphi(x;y) \quad \eta=\psi(x;y)$

исходное уравнение приведется к каноническому виду:

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=F_3(\xi,\eta,v,v_{\xi},v_{\eta})$$

При построении канонического вида уравнения используются формулы преобразования производных функции $u(x, y)$ к новым переменным:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} \xi_x{}^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x{}^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} \xi_y{}^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y{}^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} \left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x\right) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v\eta \eta_{xy}$$

Пример. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$$

- Решение. Имеем $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = -2 \Rightarrow b^2 - ac = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$

следовательно, уравнение имеет гиперболический тип на всей плоскости.

Составим уравнение характеристик:

- $$(dy)^2 - dy \cdot dx - 2(dx)^2 = 0$$

$$dy - 2dx = 0 \Rightarrow y = 2x + c_1$$

$$dy + dx = 0 \Rightarrow y = -x + c_2$$

Характеристиками заданного уравнения будут функции:

$$\varphi_1 = y - 2x \qquad \varphi_2 = y + x$$

Выполним замену: $\xi = \varphi_1 = y - 2x, \eta = y + x$

$$\xi_x = -2, \xi_y = 1, \eta_x = 1, \eta_y = 1$$

$$\xi_{xx} = 0, \xi_{yy} = 0, \xi_{xy} = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{yy} = 0, \eta_{xy} = 0$$

Построим выражения для производных функции u при переходе к новым переменным, указав слева от вертикальной черты коэффициенты, с которыми производные входят в уравнение:

$$
\begin{array}{r|c}
-3 & u_x = -2v_\xi + v_\eta, \\
-15 & u_y = v_\xi + v_\eta, \\
1 & u_{xx} = 4v_{\xi\xi} - 4v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\
-2 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\
1 & u_{xy} = -2v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}.
\end{array}
$$

Подставляя производные в исходное уравнение, находим коэффициенты:

| $v_{\xi\xi}$ | $v_{\eta\eta}$ | $v_{\xi\eta}$ | $v_{\xi}$ | $v_{\eta}$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $-9$ | $-9$ | $-18$ | $0$ |

Построим выражение для неоднородного члена уравнения:

$$27x = 27\frac{\xi - \eta}{3} = 9(\xi - \eta)$$

Подставляя построенные выражения в заданное уравнение, приведем его к каноническому вид:

$$v_{\eta\eta} - 9v_{\xi\eta} - 9v_{\xi} - 18v_{\eta} + 9(\xi - \eta) = 0$$

**Пример**. Привести к каноническому виду уравнение:

$$\left(1+x^2\right)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x\left(1+x^2\right)u_x = 0$$

Решение. Имеем $\quad a=\left(1+x^2\right)^2, b=0, c=1$

$$b^2 - ac = -\left(1+x^2\right)^2 < 0$$

Это уравнение эллиптического типа.

Составим уравнения характеристик:

$$\left(1+x^2\right)^2 (dy)^2 + (dx)^2 = 0$$

$$\left(1+x^2\right)^2 dy \pm i\left(1+x^2\right)dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} dy = \dfrac{-i}{1+x^2}dx, \\ dy = \dfrac{i}{1+x^2}dx. \end{cases}$$

$$\varphi = y + i \cdot \mathrm{arctg}x = c_1$$

$$\overline{\varphi} = y - i \cdot \mathrm{arctg}x = c_2$$

$$\xi = \mathrm{Re}(\varphi) = y$$

$$\eta = \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{arctg}x$$

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \eta_x = \frac{1}{1+x^2}, \eta_y = 0, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_{xx} = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0$$

$$\begin{array}{c|l}
2x\left(1+x^2\right) & u_x = \frac{1}{1+x^2} v_\eta , \\
0 & u_y = v_\xi , \\
\left(1+x^2\right)^2 & u_{xx} = \frac{1}{1+x^2} v_{\eta\eta} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} v_\eta , \\
1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} .
\end{array}$$

Подставив найденные выражения в заданное уравнение, приведем его к каноническому виду:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0$$

Пример. Привести уравнение к каноническому виду

$$x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy} = 0.$$

Решение. В данном случае $b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0.$

Делаем вывод, что уравнение относится к параболическому типу. Составляем уравнение характеристик:

$$x^2(dy)^2 + 2xydxdy + y^2(dx)^2 = 0$$

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = 0.$$

Данное уравнение является квадратным относительно отношения дифференциалов dy/dx. Решая его получим два дифференциальных уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

$$D = b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C \Longrightarrow y = \frac{C}{x} \Longrightarrow C = yx.$$

Следовательно
$$\xi = xy.$$

- Пусть $\eta = -x$, тогда
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = x \neq 0$$

Находим производные до второго порядка:

$$\xi'_x = y;\ \xi'_y = x;\ \eta'_x = -1;\ \eta'_y = 0;$$

$$u'_x = u'_\xi \cdot y - u'_\eta \cdot 1;$$

$$u'_y = u'_\xi \cdot x + u'_\eta \cdot 0 = u'_\xi \cdot x;$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot y^2 - 2u''_{\xi\eta} \cdot y \cdot 1 + u''_{\eta\eta} \cdot 1 + u'_\xi \cdot 0 + u'_\eta \cdot 0 =$$

$$= u''_{\xi\xi} y^2 - u''_{\xi\eta} 2y + u''_{\eta\eta};$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} \cdot x \cdot y + u''_{\xi\eta} \cdot 0 \cdot y - u''_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot x - u''_{\eta\eta} \cdot 1 \cdot 0 + u'_\xi \cdot 1 + u'_\eta \cdot 0 = = u''_{\xi\xi} xy - u''_{\eta\eta} x + u'_\xi;$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot x^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot x \cdot 0 + u''_{\eta\eta} \cdot 0 + u'_\xi \cdot 0 + u'_\eta \cdot 0 =$$

$$= u''_{\xi\xi} x^2.$$

Подставляем найденные производные в исходное дифференциальное уравнение:

$$x^2y^2u''_{\xi\xi} - 2x^2yu''_{\xi\eta} + x^2u''_{\eta\eta}$$
$$+ 2x^2y^2u''_{\xi\xi} - 2x^2yu''_{\eta\eta} + 2xyu'_{\xi} + x^2y^2u''_{\xi\xi} = 0;$$

$$4x^2y^2u''_{\xi\xi} - 2x^2yu''_{\xi\eta} + x^2(1-2y)u''_{\eta\eta} + 2xyu'_{\xi} = 0.$$

$$4\xi^2u''_{\xi\xi} - 2\xi\eta u''_{\xi\eta} + (\eta^2 - \eta\xi)u''_{\eta\eta} + 2\xi u'_{\xi} = 0.$$