

# Лекция 6. Механические колебания

## *1. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение собственных гармонических колебаний материальной точки*

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Большинство реальных колебательных процессов не являются строго периодическими. Однако, экспериментально любые сложные колебания можно представить в виде совокупности гармонических колебаний с помощью специальных приборов, называемых спектральными анализаторами.

Очень многие колебательные и волновые процессы самой различной физической природы при достаточно малых амплитудах могут с высокой точностью считаться гармоническими..

Теоретически сложные колебания можно представить с помощью *рядов (и интегралов) Фурье*. Согласно теореме Ж. Фурье (1822 г.) «любое повторяющееся движение можно рассматривать как результат наложения простых гармонических движений; любую волну независимо от ее формы можно рассматривать как сумму простых гармонических волн». Следовательно, и сложным колебаниям присущи основные закономерности гармонических колебаний.

Согласно теории рядов Фурье, всякая периодическая функция  $f(t)$ , ограниченная на отрезке и имеющая конечное число экстремумов и точек разрыва первого рода (условия Дирихле), может быть представлена в виде тригонометрического ряда:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t), \quad (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt, \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt. \quad (3)$$

Постоянная составляющая ряда Фурье  $a_0$  является средним значением функции  $f(t)$  за период:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt. \quad (4)$$

Для четной функции  $f(-t) = f(t)$  все коэффициенты  $a_k$  равны нулю. Для нечетной  $f(-t) = -f(t)$  равны нулю коэффициенты  $a_0$  и любое периодическое колебание может быть представлено в виде суммы гармонических колебаний кратных частот  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ ;

Частота  $\omega$  называется основной частотой, остальные — гармониками. Количество и амплитуды гармоник тем больше, чем сильнее данное колебание отличается от простого гармонического колебания с частотой  $\omega$ .

Совокупность гармонических составляющих сложного колебания называется его спектром.

Нахождение амплитуд и частот гармоник сложного периодического процесса с помощью рядов Фурье носит название гармонического анализа.

Для решения этой задачи могут использоваться комплексные ряды Фурье в виде:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega t}, \quad (5)$$

где  $n$  принимает целочисленные положительные и отрицательные значения в интервале от  $-\infty$  до  $\infty$ , коэффициенты  $a_n$  выражаются как

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

В разложении (5) представлен дискретный спектр частот:

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, n\omega.$$

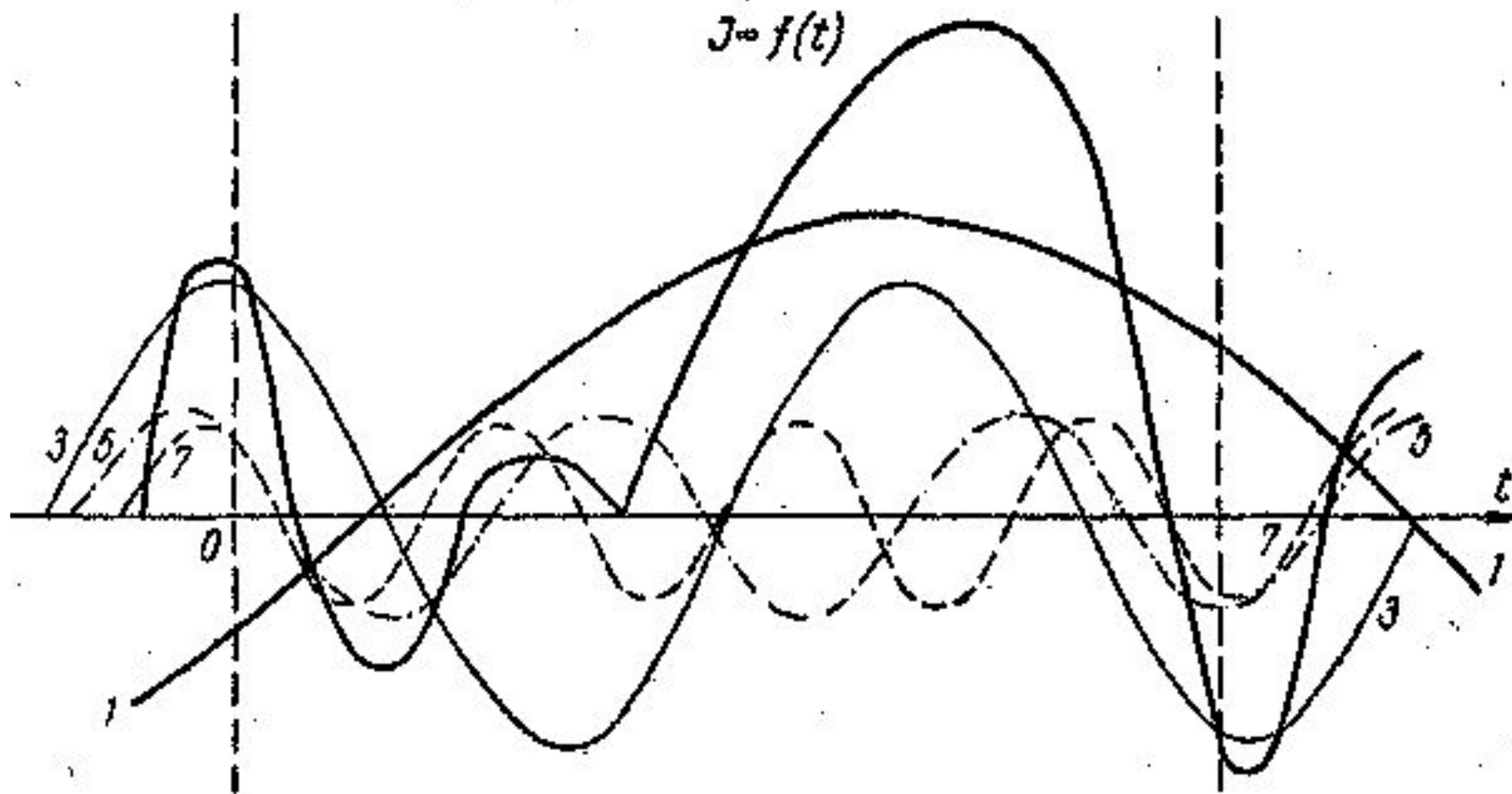
Непериодическая функция  $f(t)$  представляется в виде комплексного интеграла Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6)$$

являющегося обобщением ряда Фурье на случай непрерывного спектра частот:  $-\infty$  до  $\infty$ . Амплитудная функция  $a(\omega)$  выражается формулой

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Когда частоты колебаний неодинаковые, то при различных амплитудах и начальных фазах получается сложное колебание, как это можно видеть на рисунке.





*Разложение сложного колебательного движения на составляющие простые гармоники с кратными частотами:*

1—1,— основная гармоника ( $\beta_1 = -24^0$ );

3—3— третья гармоника ( $\omega_3 = 3\omega_1, a_3 = 0,77a_1, \beta_3 = 99^0$ );

5—5— пятая гармоника ( $\omega_5 = 5\omega_1, a_5 = 0,34a_1, \beta_5 = 139^0$ );

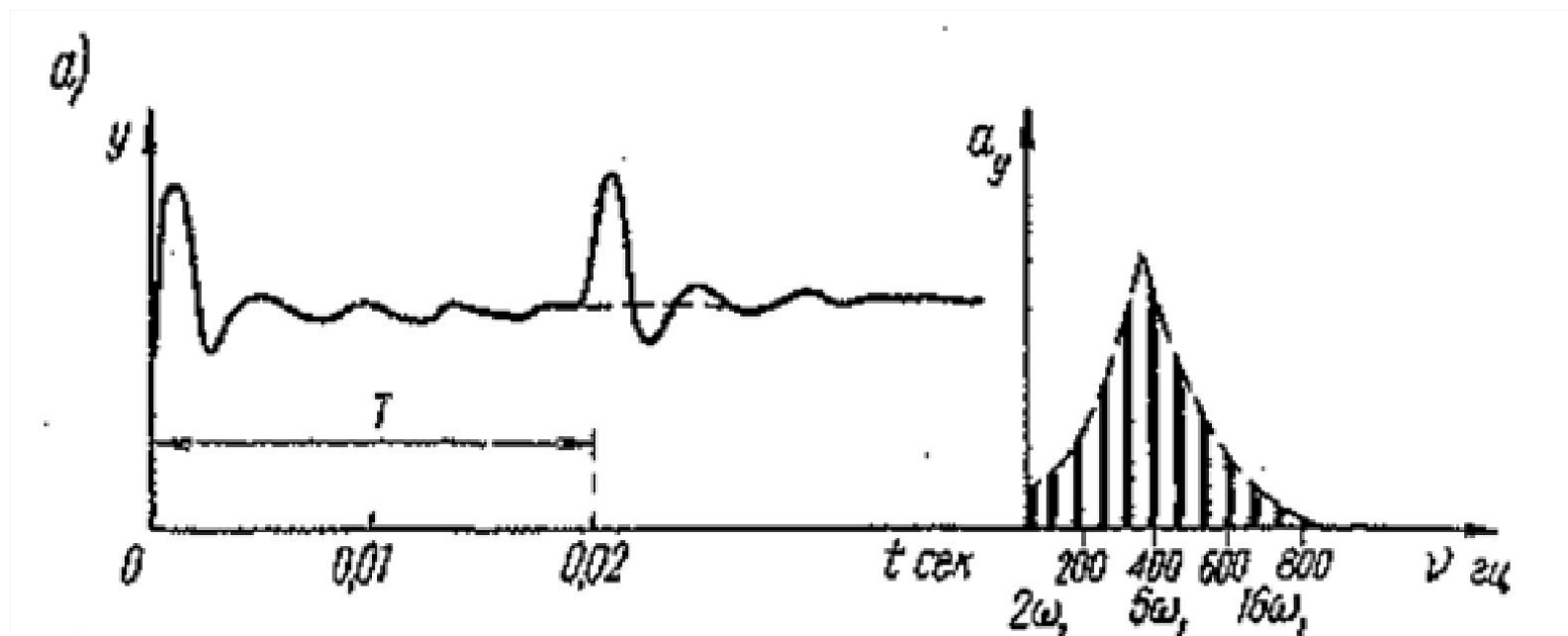
7—7 — седьмая гармоника ( $\omega_7 = 5\omega_1, a_7 = 0,28a_1, \beta_7 = 128^0$ );

По теореме Фурье любую периодическую функцию можно представить в виде суммы нескольких гармонических функций с кратными частотами и соответственно подобранными амплитудами и начальными фазами (как на рисунке), так что

$$f(t) = a_0 + a_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \beta_1) + \dots + a_n \cdot \sin(n\omega_1 t + \beta_n),$$

где  $\omega_1$  — циклическая частота основной гармоники.

Сложный периодический процесс, например ряд чередующихся импульсов затухающих колебаний от периодических толчков (биение вала), представляется сериальным спектром, состоящим из дискретного ряда простых гармонических колебаний кратных частот (рисунок *a*)

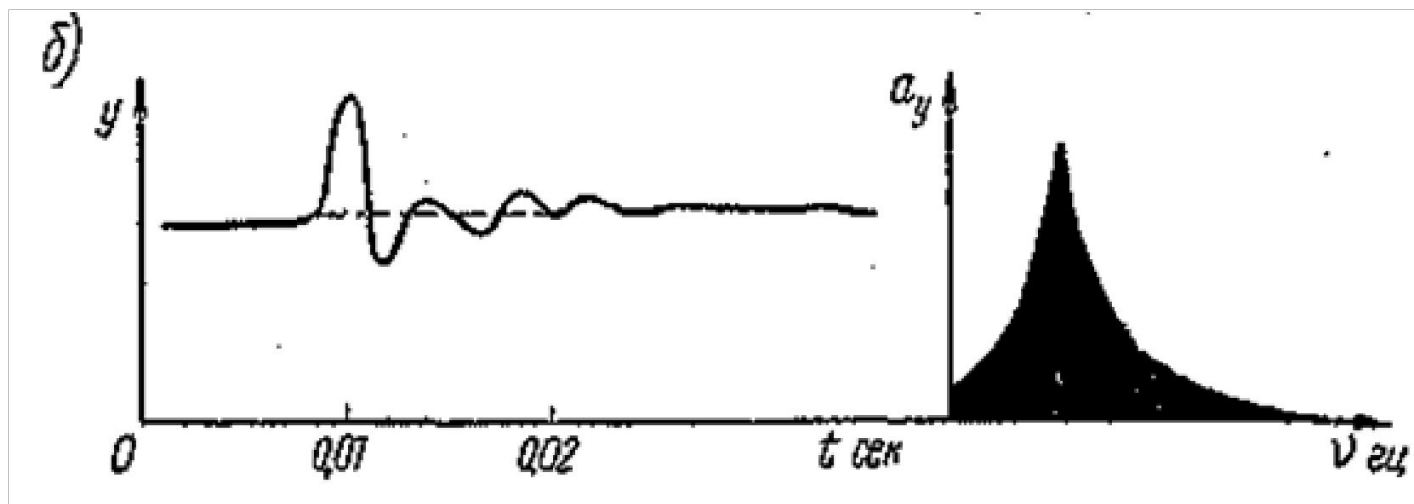


Амплитудный спектр колебательных импульсов:

*a*) линейчатый для серии затухающих колебаний,

Чем реже толчки, тем ниже частота основной гармоники и тем больше может быть число кратных частот.

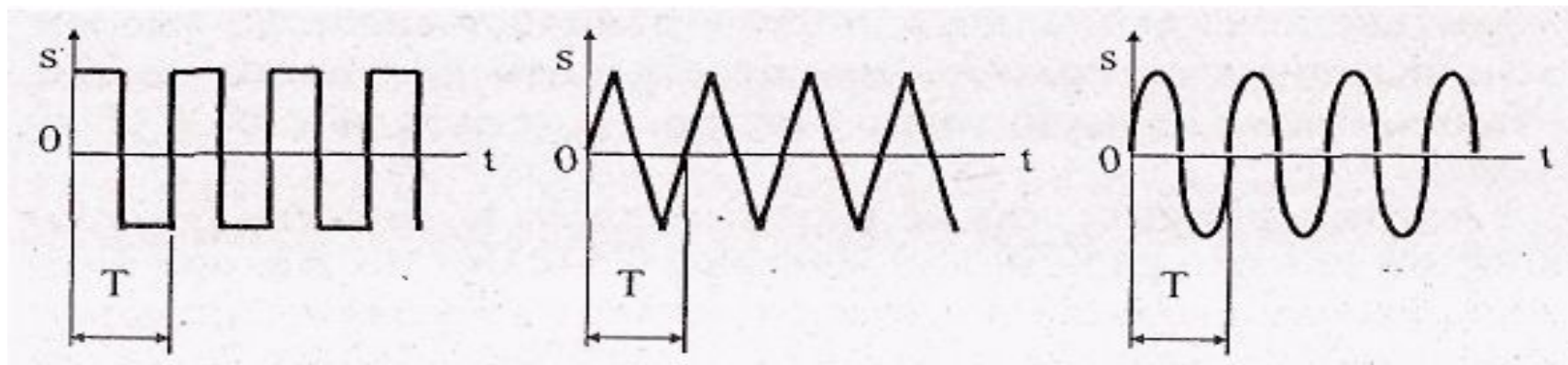
Отдельный аperiodический, затухающий импульс от удара (непериодическая функция времени) представляется сплошным, или непрерывным, спектром, т. е. таким спектром, в котором амплитуды составляющих простых гармонических колебаний не равны нулю для любой частоты в интервале всего спектра (рисунок б).



Амплитудный спектр колебательных импульсов:  
б) сплошной для отдельного колебательного импульса

В зависимости от характера воздействия, вызывающего и поддерживающего колебательный процесс, колебания классифицируют как *свободные (или собственные), вынужденные, автоколебания и параметрические.*

По форме колебания могут быть разделены на прямоугольные, треугольные и синусоидальные



## ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармонические колебания представляют собой наиболее простой вид колебаний. Пусть  $x$  — динамическая переменная, характеризующая отклонение некоторой физической величины от состояния равновесия, при котором

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Тогда по определению гармоническим колебанием называется такое, которое происходит либо по закону косинуса

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_{01}),$$

либо по закону синуса

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{02}).$$

$A$  — амплитуда колебаний, т. е. наибольшее положительное отклонение величины  $x$  от ее значения в состоянии равновесия; — круговая или циклическая частота. Существуют связи)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad \nu = \frac{1}{T},$$

$\nu$  - частота колебаний или количество полных колебаний в единицу времени  
,  $T$ - период или время одного полного колебания.

Величины  $\phi = \omega t + \phi_{01}$  и  $\phi = \omega t + \phi_{02}$  называются фазами колебаний. Фаза характеризует текущее отклонение  $X$  от состояния равновесия при

$$t = 0, \quad \phi = \phi_{01} \text{ или } \phi = \phi_{02},$$

т.е.  $\phi_{01}$  или  $\phi_{02}$  есть начальные фазы колебаний.

Почему в определении гармонических колебаний говорится о том, что эти колебания осуществляются либо по закону синуса, либо по закону косинуса?

Это связано со свойствами тригонометрических функций. Выбирая соответственным образом начальную фазу и используя формулы приведения, мы можем пользоваться для описания колебаний или законом синуса, или законом косинуса.



Произвольное гармоническое колебание может быть представлено и иным образом. Преобразуем, например,

$$x = A \sin(\omega t + \phi_{02}),,$$

используя формулу для синуса суммы:

$$x = A \cos \phi_{02} \cdot \sin \omega t + A \sin \phi_{02} \cdot \cos \omega t.$$

Обозначая  $a = A \cos \phi_{02}$ ,  $b = A \sin \phi_{02}$ , получим

$$x = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t.$$

Возможен также и еще один вариант представления гармонических колебаний.

Учитывая формулу Эйлера  $\exp(j\varphi) = \cos \varphi + j \sin \varphi$

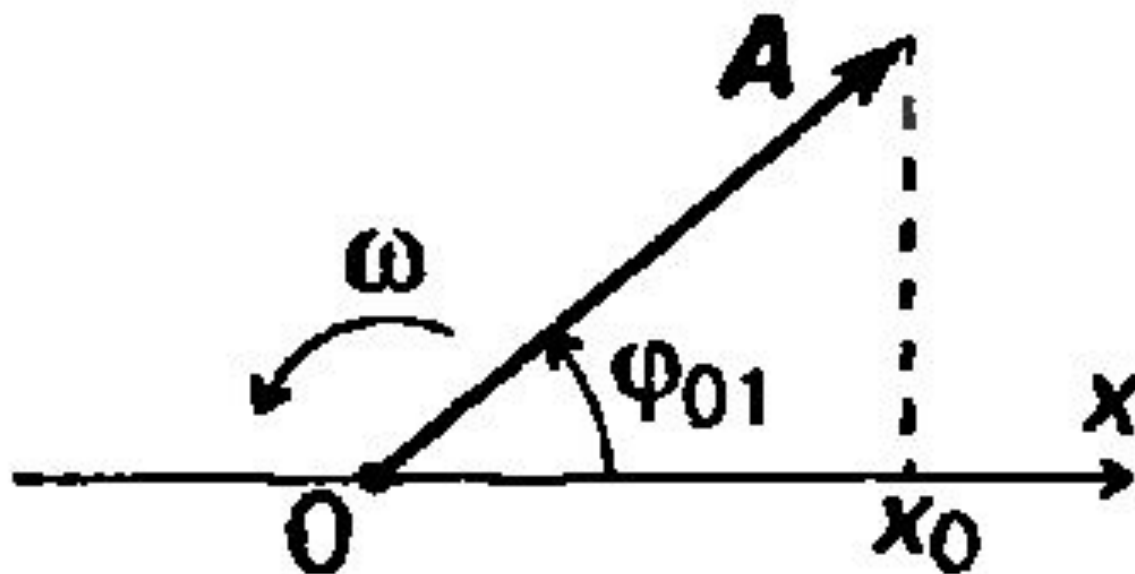
$$, \quad e^{j\varphi} = \exp(j\varphi)$$

и формулу (15), можно представить произвольное гармоническое колебание как действительную часть некоторого комплексного выражения, а именно:

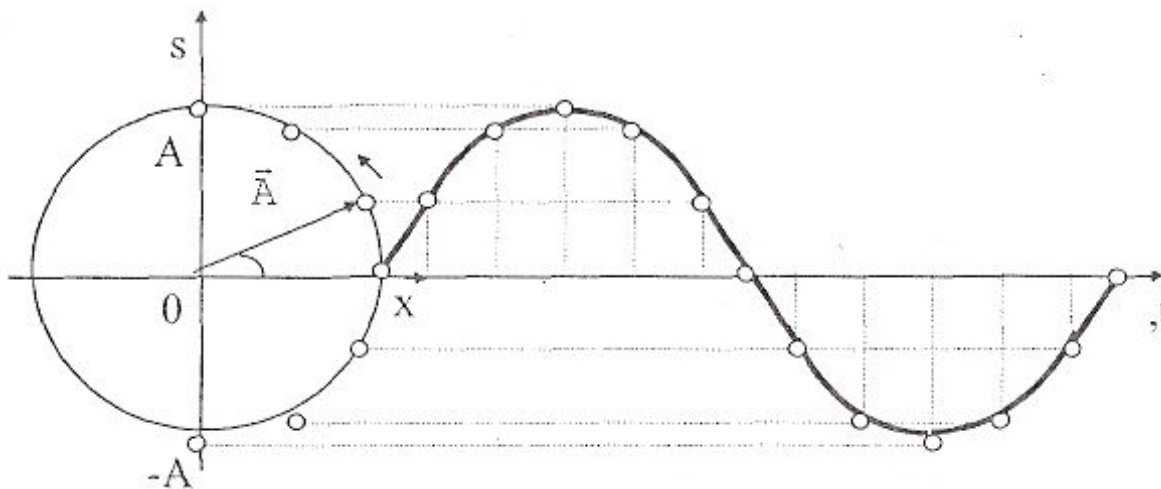
$$\hat{x} = \hat{a}e^{j\omega t} + \hat{b}e^{-j\omega t},$$

$$x = \operatorname{Re} \hat{x},$$

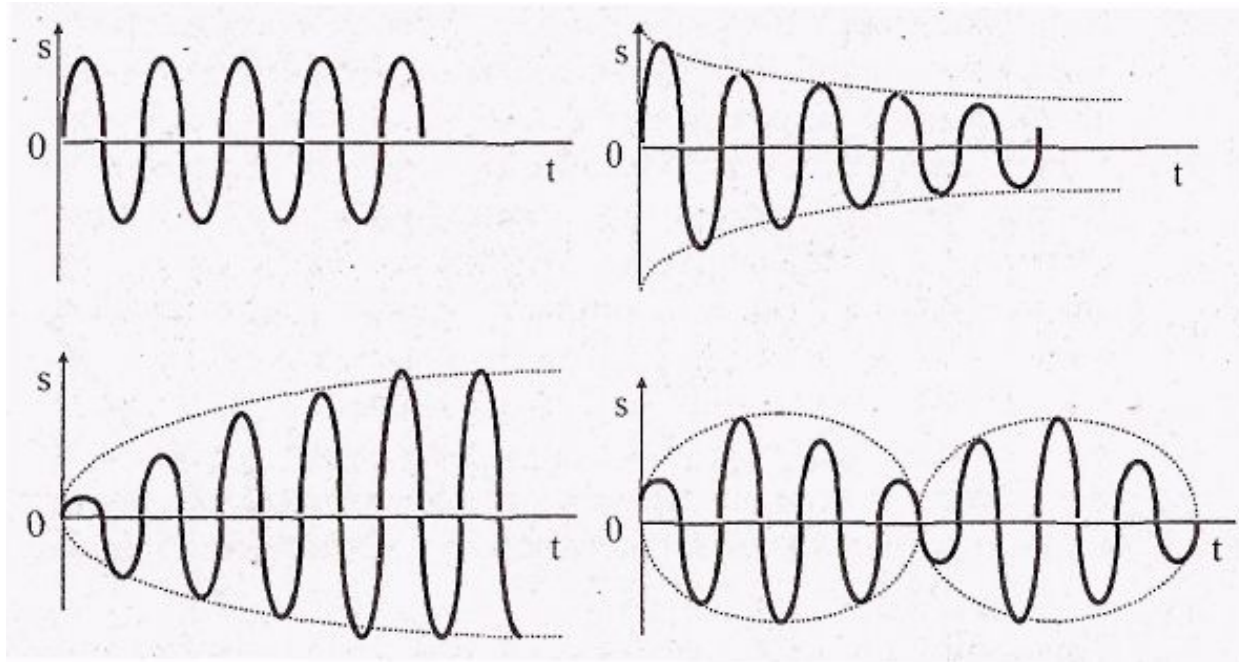
Решение многих вопросов, в частности, сложение нескольких колебаний одинакового направления, облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде вектора на плоскости. Полученная таким образом схема называется векторной диаграммой .



Для этого из точки  $O$ , взятой на оси  $x$ , под углом  $\varphi$  откладывается вектор  $A$ , модуль которого равен амплитуде  $A$  рассматриваемого колебания. Если вектор  $A$  движется против часовой, стрелки с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ , то проекция конца вектора на ось  $x$  или  $s$  будет перемещаться вдоль оси и принимать значения от  $+A$  до  $-A$ . Отклонение колеблющейся величины  $x$  со временем определяется, соотношением  $x = A \cos \varphi$ , а применительно к оси  $s$  —  $s = A \sin \varphi$ . На рисунке дано графическое построение синусоиды. Таким образом, гармоническое колебание может быть представлено изменением проекции вектора амплитуды  $A$  на произвольно выбранную ось. Именно такое изображение гармонического колебательного процесса воспроизводится регистрирующими приборами.



По характеру изменения амплитуды различают *незатухающие, затухающие, нарастающие, амплитудно-модулированные колебания*, а также *частотно-модулированные колебания*. Амплитудно-модулированные это колебания, в которых амплитуда периодически изменяется.



Основные кинематические параметры гармонических колебаний.

1) Отклонение (смещение  $s = f(t)$ ) — мгновенное вертикальное перемещение относительно положения равновесия, м.

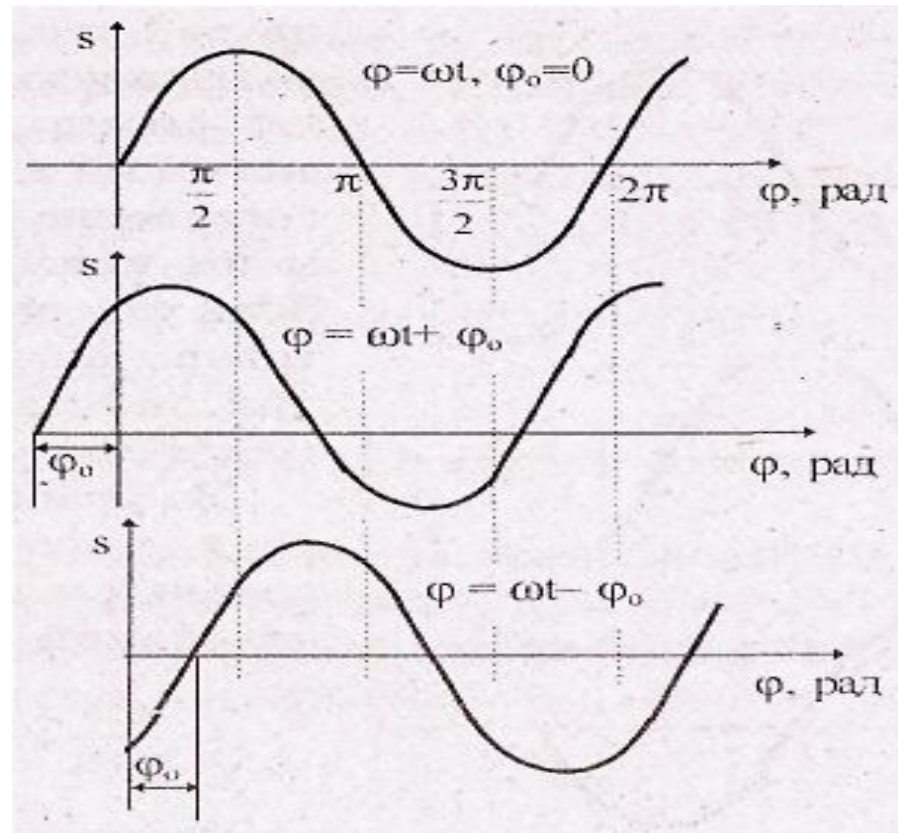
2) Амплитуда  $A$  — максимальное отклонение (смещение), м.

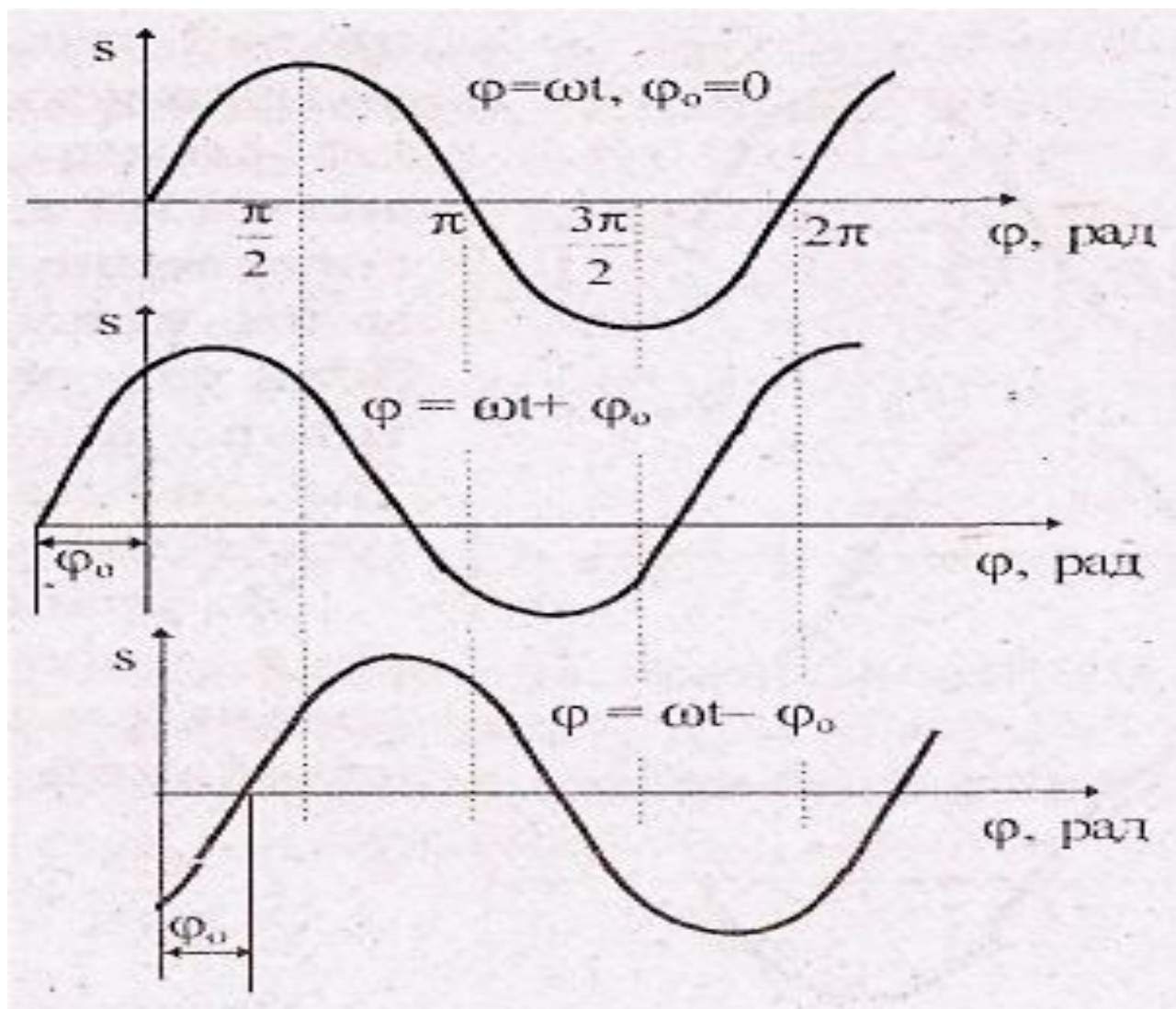
- 3) Период  $T = 1/\gamma$ , с, – длительность полного колебания.
- 4) Число колебаний к моменту времени  $t$  равно  $n = t/T$ . Количество повторений процесса  $n$  в течение времени  $t$  называют частотой, в данном случае колебательного процесса,  $\gamma = n/t$ , с<sup>-1</sup>. Следовательно, частота колебаний  $\gamma = 1/T$ , с<sup>-1</sup> = Гц,

5) Угловая, круговая или циклическая частота,  $\omega = \Delta\varphi / \Delta t$

6) Фаза –  $\omega t + \varphi_0$  – Физический смысл фазы состоит в том, что она определяет смещение в любой момент времени

7) Начальная фаза –  $\varphi_0$  – значение фазы в момент начала колебаний





Для гармонического движения системы мгновенная скорость

$$v = \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \text{ м/с.}$$

Мгновенное ускорение колебательной системы определяется второй производной  $s = A \cos \varphi$  по времени

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = \\ = -\omega^2 s, \text{ м/с}^2.$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$$

Решение этого уравнения  $S = A \cos (\omega t + \varphi_0).$



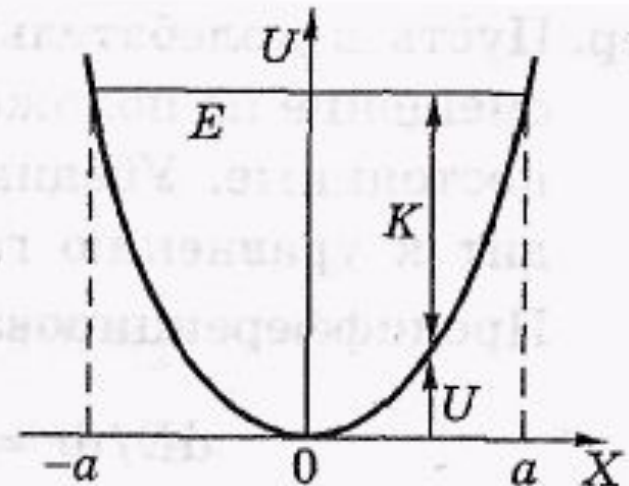
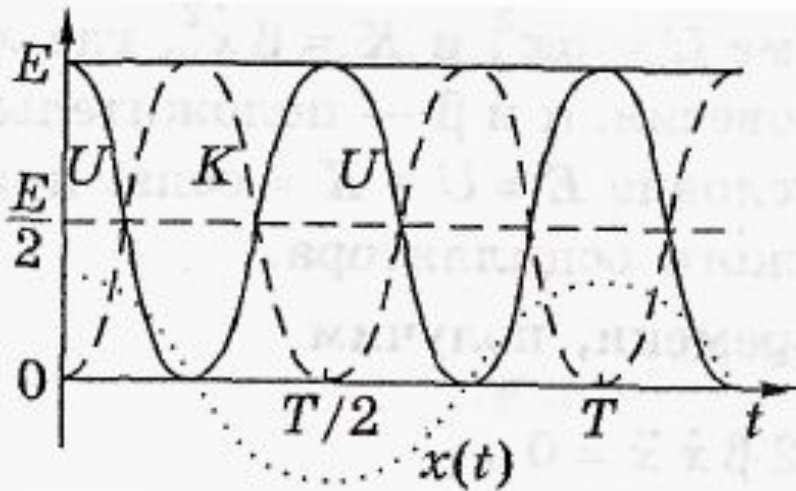
## 2. Энергия гармонического колебания

Энергия системы, колеблющейся без затухания, постоянна. Она складывается из кинетической  $E_k$  и потенциальной  $E_n$  составляющих.

В каждый момент времени  $E = E_k + E_n$

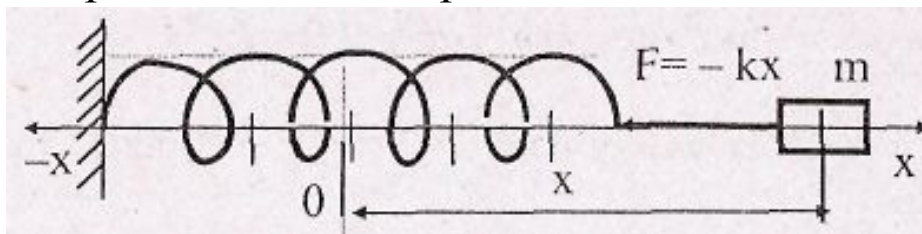
$$E_k = \frac{mA^2\omega^2}{4}(1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)), \text{ Дж.} \quad E_n = \frac{mA^2\omega^2}{4}(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)), \text{ Дж.}$$

$$E = E_k + E_n = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0) + 1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)] =$$

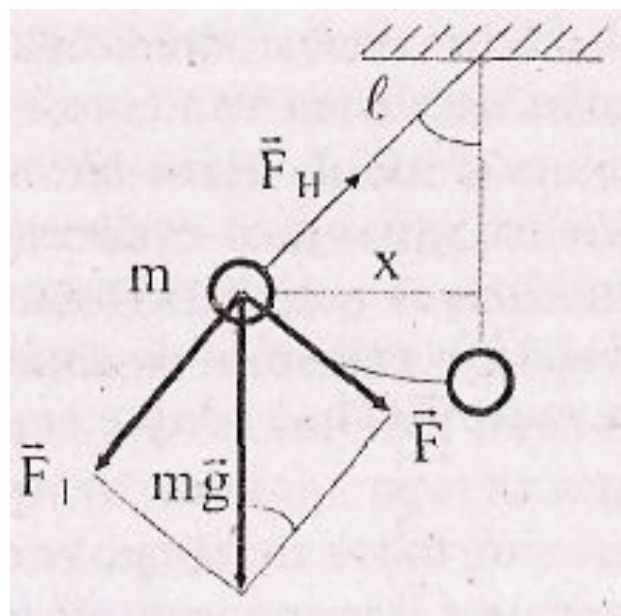


### 3. Гармонический и ангармонический осциллятор

Пружинный маятник является примером свободного механического осциллятора, без энергетических потерь

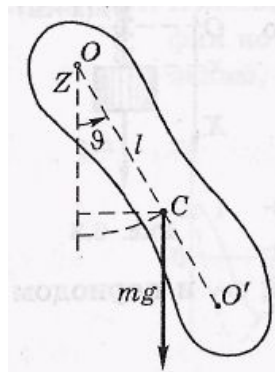


#### Математический маятник



$$\omega = \sqrt{g/l}, \text{ рад/с.}$$

Физический маятник — это твердое тело с распределенной массой, совершающее гармонические колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$  подвеса, не совпадающей с центром масс  $O'$  маятника.

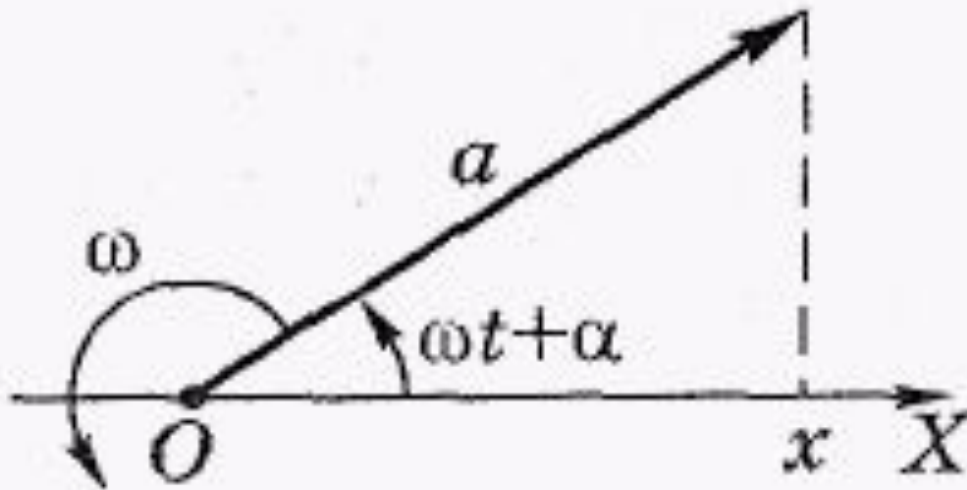


$$\omega_0 = \sqrt{mgl/I}, \quad T = 2\pi\sqrt{I/mgl}.$$

Наряду с гармоническим осциллятором существует понятие ангармонического (нелинейного) осциллятора. Его колебания отличаются от гармонических. Их основная особенность состоит в том, что частота и период колебаний ангармонического осциллятора зависят от амплитуды.

### *Сложение гармонических колебаний*

1) *Сложение колебаний одного направления. Векторная диаграмма.*

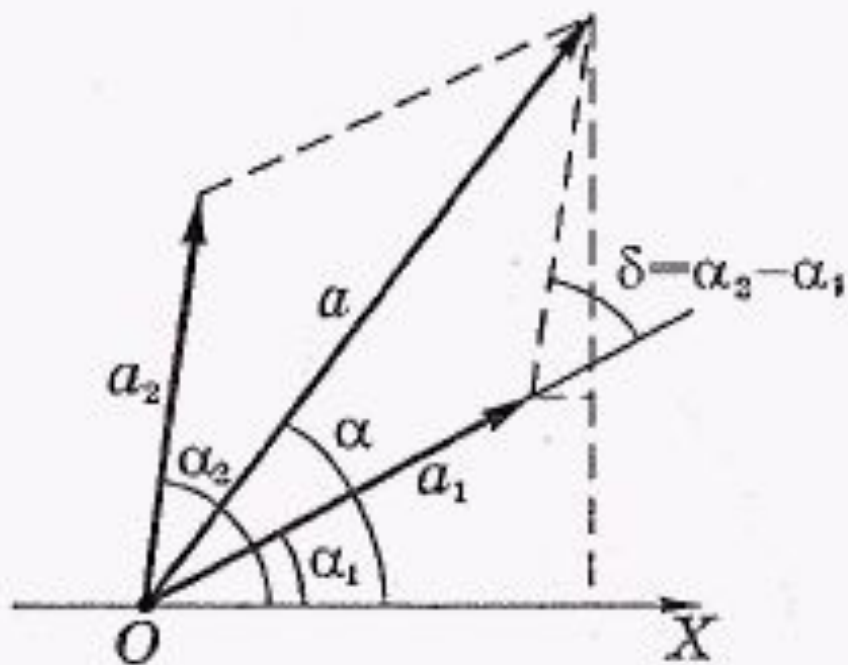


$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}.$$

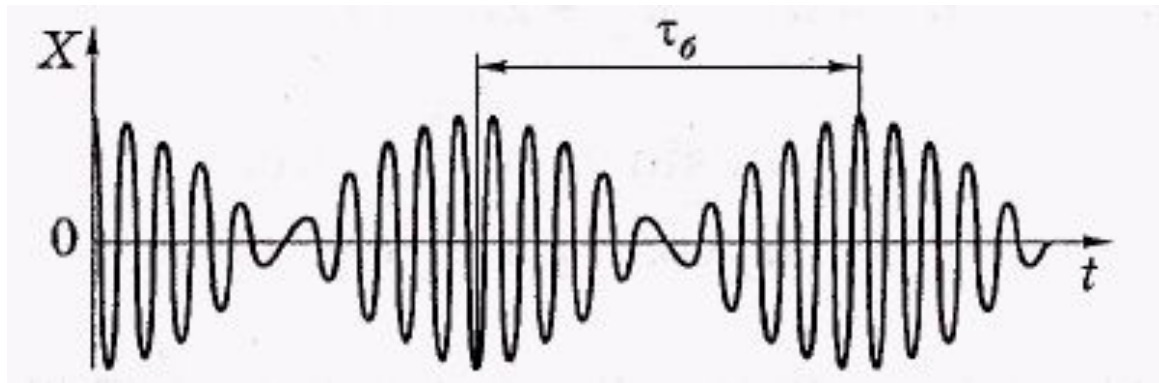


Разность фаз  $\delta$  не зависит от времени и равна

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Когда  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$

Результирующее колебание, с медленно и периодически меняющейся амплитудой, называется биения.



Амплитуда колебаний описывается формулой для  $a^2$ , но в данном случае входящая в нее разность фаз  $\delta$  зависит от времени:

$$\delta = (\alpha_2 + \omega_2 t) - (\alpha_1 + \omega_1 t) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\omega_2 - \omega_1)t.$$

Промежуток времени между соседними моментами, когда амплитуда  $a$  максимальна, называют периодом биений  $\tau_{\text{б}}$ . За это время разность фаз  $\delta$  изменяется на  $2\pi$  (это следует и из векторной диаграммы).

Значит,  $|\omega_1 - \omega_2| \cdot \tau_{\text{б}} = 2\pi$ . Отсюда период и частота биений:

$$\tau_{\text{б}} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{1}{|\nu_2 - \nu_1|}, \quad \nu_{\text{б}} = \frac{1}{\tau_{\text{б}}} = |\nu_2 - \nu_1|.$$

*Рассмотренный случай сложения гармонических колебаний называют интерференцией колебаний.*

При сложении двух гармонических колебаний одинакового периода и одного направления результирующее движение есть также гармоническое колебание с тем же периодом и амплитудой  $A$ , находящейся в интервале значений  $A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2$



**2) Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты**

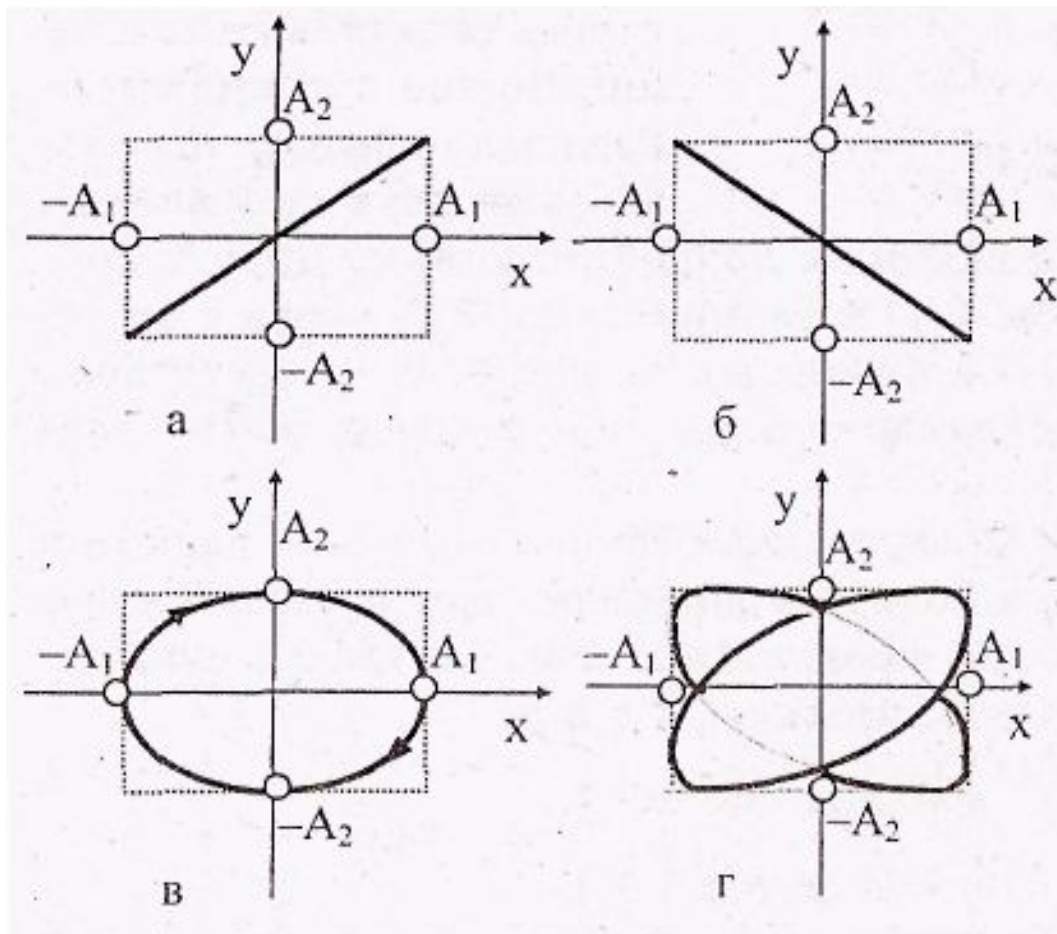
$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_1) + \sin^2(\omega t + \varphi_1) \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Фигура Лиссажу есть траектория, получаемая от соединения линией результирующих смещений в различные моменты времени на плоскости с координатами  $x$ ,  $y$ .

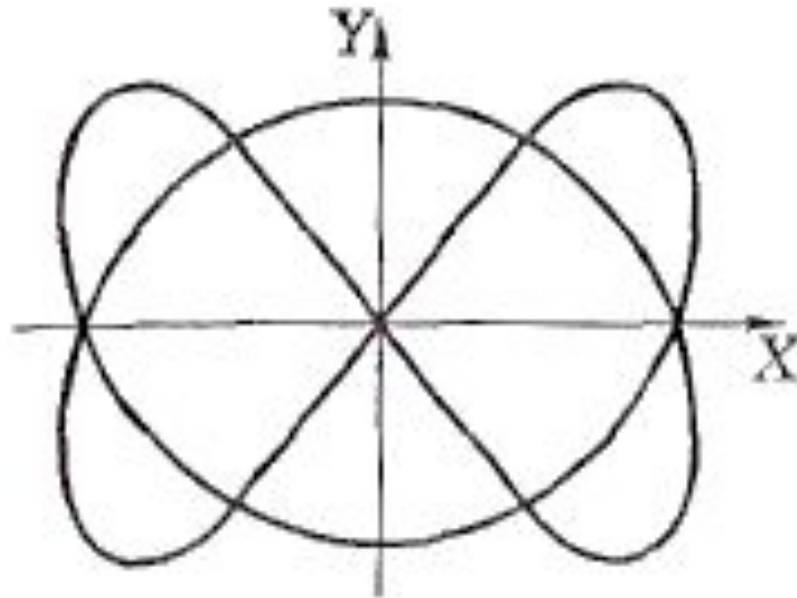
Например, в случае одинаковых частот  $\omega_1 : \omega_2 = 1:1$  получаются эллипсы, прямые и окружности.



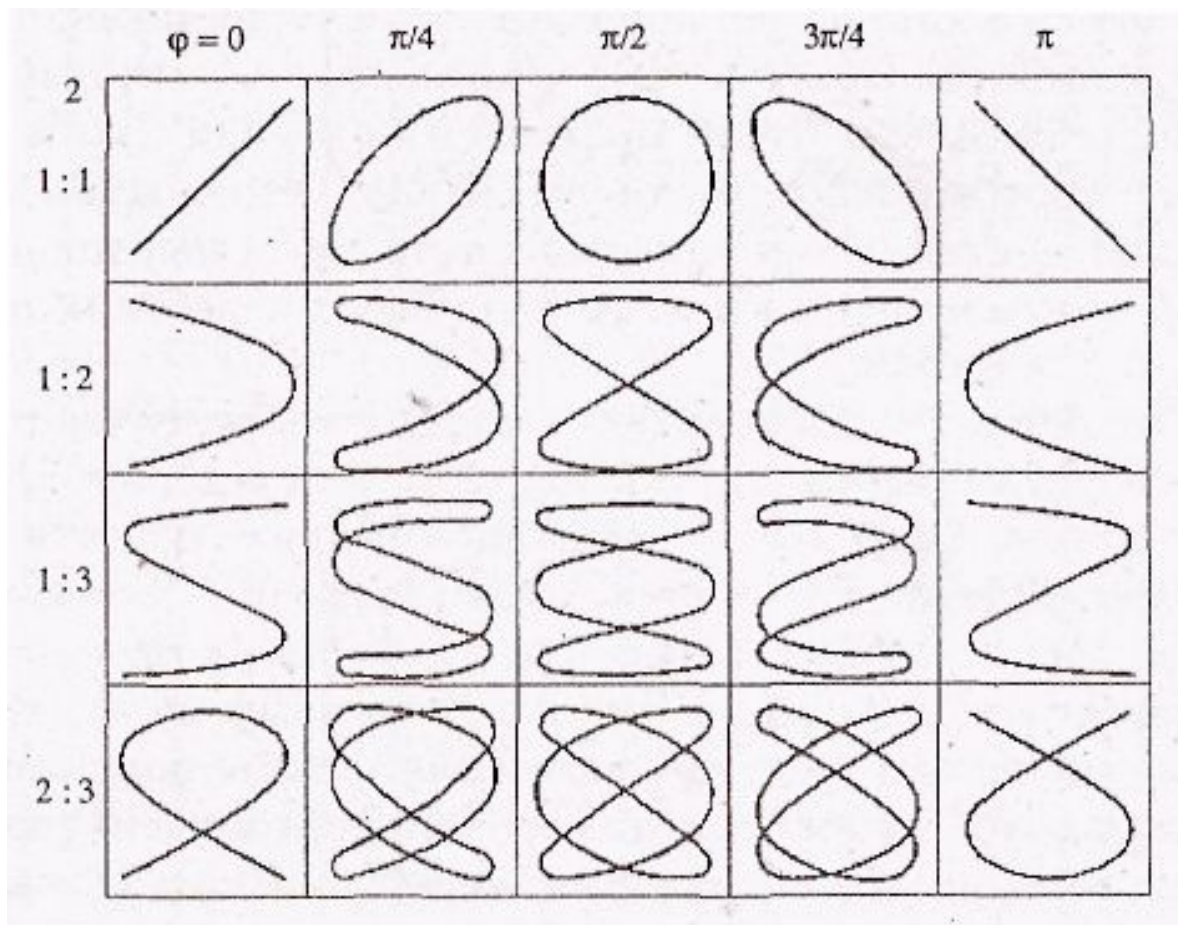


Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы и относятся как целые числа, то траектории результирующего движения имеют более сложные формы. Одна из этих фигур, соответствующая отношению частот

$$\omega_y : \omega_x = 3 : 2$$



Фигуры Ж. Лиссажу можно наблюдать при подаче на пластины осциллографа двух электрических сигналов, один из которых имеет некоторую фиксированную частоту, например  $\omega_1$ , а другой — частоту  $\omega_2$ , близкую значению к фиксированной. Формы фигур определяются соотношением этих частот  $\omega_1 : \omega_2$ , и разностью начальных фаз  $\varphi$  исходных колебаний.



При сложении взаимно-перпендикулярных колебаний полная энергия

$$E = \left( \frac{\kappa_1 x^2}{2} + \frac{\kappa_2 y^2}{2} \right) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E_x + E_y ,$$

т. е. складывается из энергий каждого колебания (в отличие от сложения колебаний одного направления). Эта энергия равна

$$E = \frac{m}{2} (a^2 \omega_x^2 + b^2 \omega_y^2) .$$

## *Затухающие колебания*

Из основного уравнения динамики следует, что на частицу массы  $m$  действует кроме силы упругости  $(-kx)$ , сила сопротивления, пропорциональная скорости частицы,

$$F_x = -r \frac{\partial x}{\partial t}$$

где  $r$  — коэффициент сопротивления (величина размерная).

Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx - r \frac{\partial x}{\partial t}$$

или

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 = 0$$

$$\beta = r/2m$$

$\omega_0$  - частота свободных колебаний без трения – собственная частота осциллятора.  $\beta$  — коэфф. затухания.

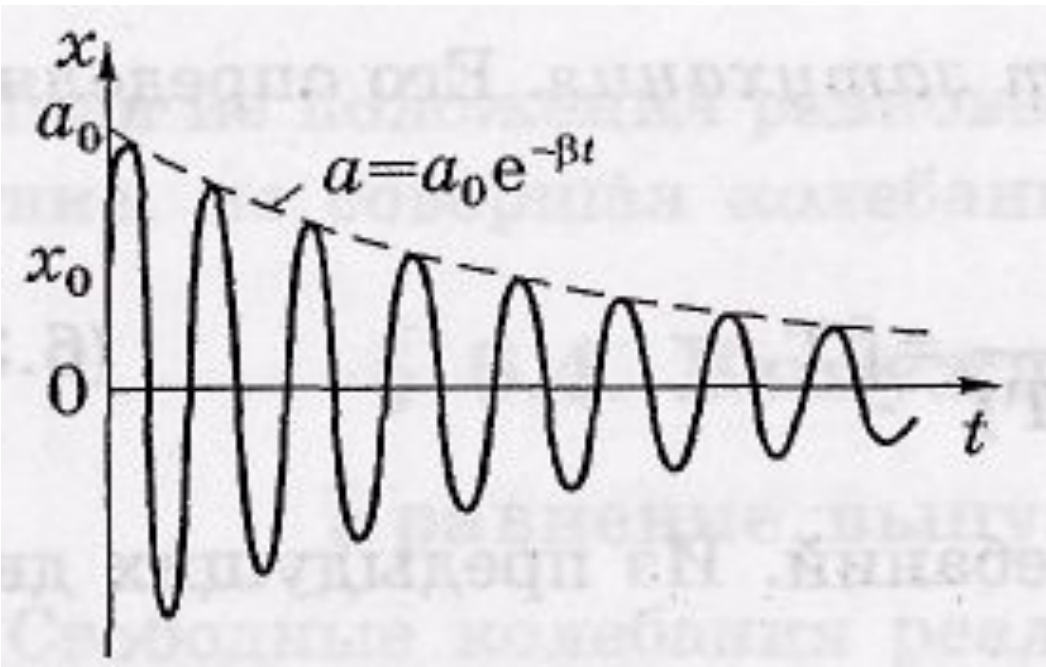
Это уравнение при условии  $\beta < \omega_0$  описывает затухающие колебания. Его решение имеет вид

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $a_0$  и  $\alpha$  — постоянные, определяемые начальными условиями

$$x(0) = x_0$$

График функции  $x(t)$  показан на рисунке для случая  $x_0 > 0$  и  $\frac{\partial x}{\partial t} > 0$ .



$\omega$ -частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

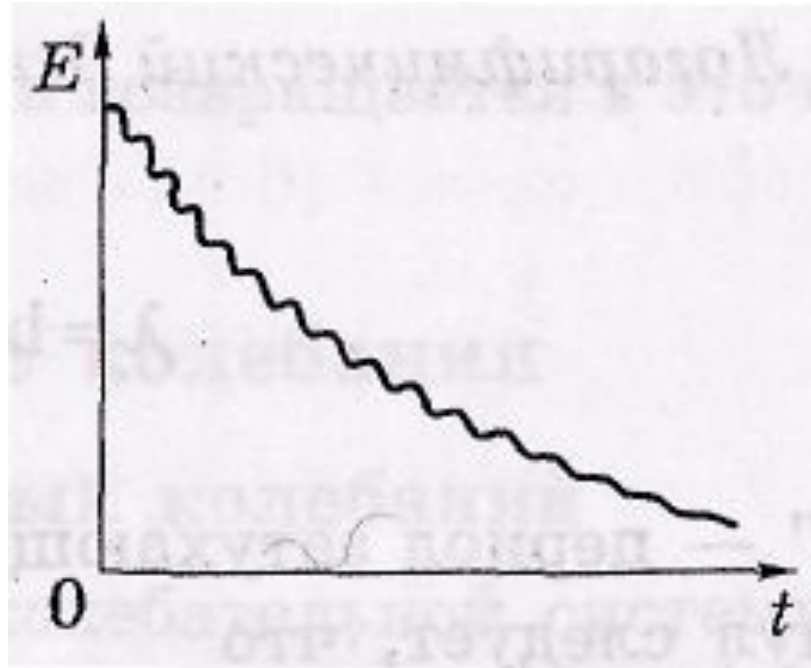
$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

## Энергия затухающих колебаний

Эта энергия складывается из потенциальной и кинетической:

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2$$

После подстановки сюда выражений  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$ , соответствующих затухающим колебаниям, получается зависимость  $E(t)$ , которая графически показана на рисунке.



## Характеристики затухания.

Кроме коэффициента  $\beta$ , затухание колебаний характеризуют величинами:

1) *Время релаксации*  $\tau$  — это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Из выражения

$$a = a_0 \cdot e^{-\beta t} \quad \text{следует, что} \quad \tau = 1/\beta.$$

2) *Логарифмический декремент затухания*. Его определяют как

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t + T)} = \beta T,$$

где  $T$  — период затухающих колебаний. Из предыдущих двух формул следует, что

Возможен также и еще один вариант представления гармонических колебаний. Учитывая формулу Эйлера  $e^{j\varphi} = \exp(j\varphi)$  и формулу (15), можно представить произвольное гармоническое колебание как действительную часть некоторого комплексного выражения, а именно:

$N_e$  — число колебаний за время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

( $e$ - основание натурального логарифма)

# Логарифмический декремент затухания $\lambda$

(при малом затухании  $\beta \ll \omega_0$ )

характеризует относительное уменьшение амплитуды колебаний за период.

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T,$$

При  $\beta \ll \omega_0$  относительное уменьшение энергии колебаний за период равно

Возможен также и еще один вариант представления гармонических колебаний.  
Учитывая формулу Эйлера

$e^{j\varphi} = \exp(j\varphi)$   
и формулу (15), можно представить произвольное гармоническое колебание как действительную часть некоторого комплексного выражения, а именно:

возможен также и еще один вариант представления гармонических колебаний.  
Учитывая формулу Эйлера

$e^{j\varphi} = \exp(j\varphi)$   
формулу (15), можно представить произвольное гармоническое колебание как действительную часть некоторого комплексного выражения, а именно:

отсюда

Возможен также и еще один вариант представления гармонических колебаний.  
Учитывая формулу Эйлера

$e^{j\varphi} = \exp(j\varphi)$   
и формулу (15), можно представить произвольное гармоническое колебание как действительную часть некоторого комплексного выражения, а именно:

3) *Добротность осциллятора* —

При малом затухании  $\beta \ll \omega_0$  добротность равна

Возможен также и еще один вариант представления гармонических колебаний.  
Учитывая формулу Эйлера

$e^{j\varphi} = \exp(j\varphi)$   
и формулу (15), можно представить произвольное гармоническое колебание как действительную часть некоторого комплексного выражения, а именно:



## *Вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний*

Потери энергии, обусловленные силами сопротивления (трения), можно компенсировать, воздействуя на систему переменной внешней силой  $F$ , изменяющейся — в простейшем и практически наиболее важном случае — по гармоническому закону

$$F_x = F_m \cos \omega t.$$

Возникающие при этом колебания и называют вынужденными.

Если на колеблющуюся частицу будут действовать одновременно три силы: квазиупругая (  $-kx$  ), сила сопротивления (  $-r\dot{x}$  ) и внешняя вынуждающая )  $F_x$  , то, согласно основному уравнению динамики,

$$m \ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_m \cos \omega t,$$

или в более удобной форме

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t,$$

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad f_m = F_m/m.$$

Опыт показывает, что по истечении некоторого времени с момента начала действия вынуждающей силы в системе устанавливаются гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, но отстающие по фазе от последней на  $\varphi$ :

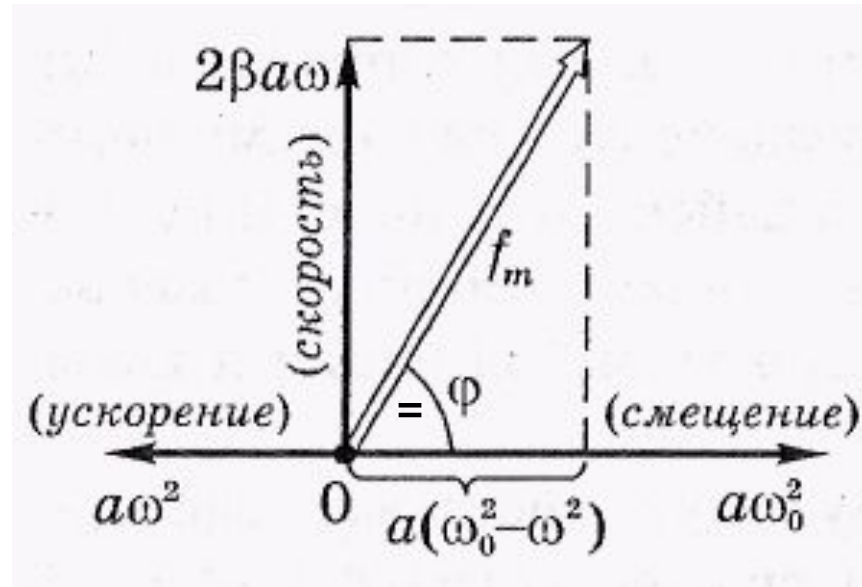
$$x = a \cos(\omega t - \varphi).$$

Для определения постоянных  $a$  и  $\varphi$  продифференцируем это выражение дважды по времени:

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = a\omega \cos(\omega t - \varphi + \pi/2),$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

Учитывая фазовые сдвиги между  $x$ ,  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$ , представим это равенство с помощью векторной диаграммы для случая  $\omega < \omega_0$ .



по теореме Пифагора

$$a^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_m^2$$

$$a = f_m / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} .$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\beta\omega / (\omega_0^2 - \omega^2) .$$

по теореме Пифагора

$$a^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_m^2$$

$$a = f_m / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} .$$

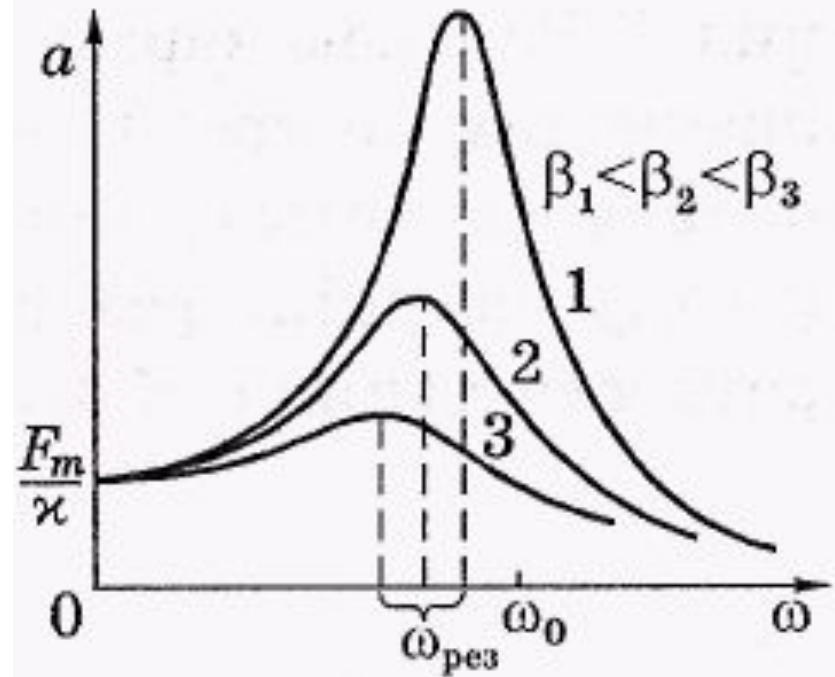
$$\operatorname{tg} \varphi = 2\beta\omega / (\omega_0^2 - \omega^2) .$$

## Резонанс

На рисунке приведены графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы  $a(\omega)$  для трех коэффициентов затухания.

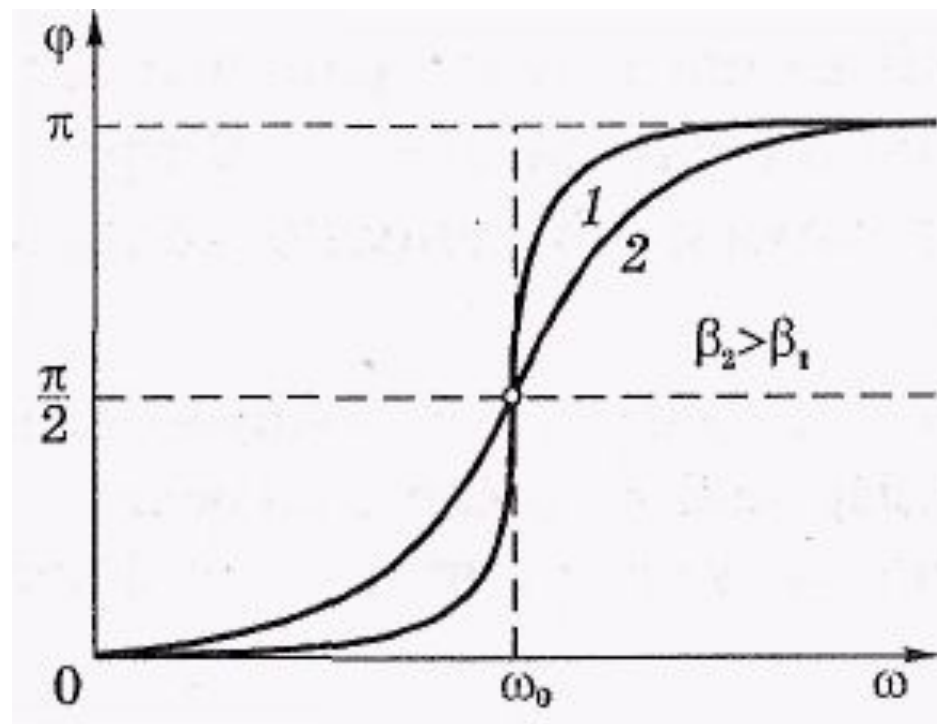
$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

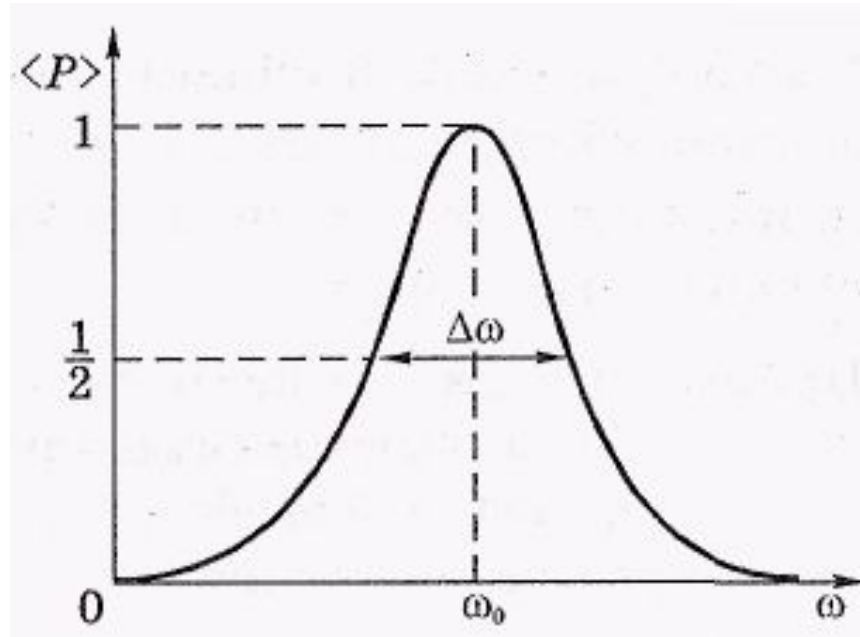
$$a_{\text{макс}} = \frac{f_m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$



Эти графики называются *резонансными кривыми*.

Зависимость фазового сдвига  $\varphi$  от частоты  $\omega$  показана для двух значений коэффициента затухания  $\beta$ .





Среднее значение мощности колебаний за период  $\langle P \rangle$  равно максимальному значению при  $\omega = \omega_0$  независимо от коэффициента затухания  $\beta$ .

Важным параметром резонансной кривой  $\langle P(\omega) \rangle$ , характеризующим «остроту» резонанса, является её ширина на половине «высоты».

При малом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) «острота» резонанса, т. е. отношение  $\omega_0 / \Delta\omega$ , равно добротности осциллятора:

$$\omega_0 / \Delta\omega = Q.$$



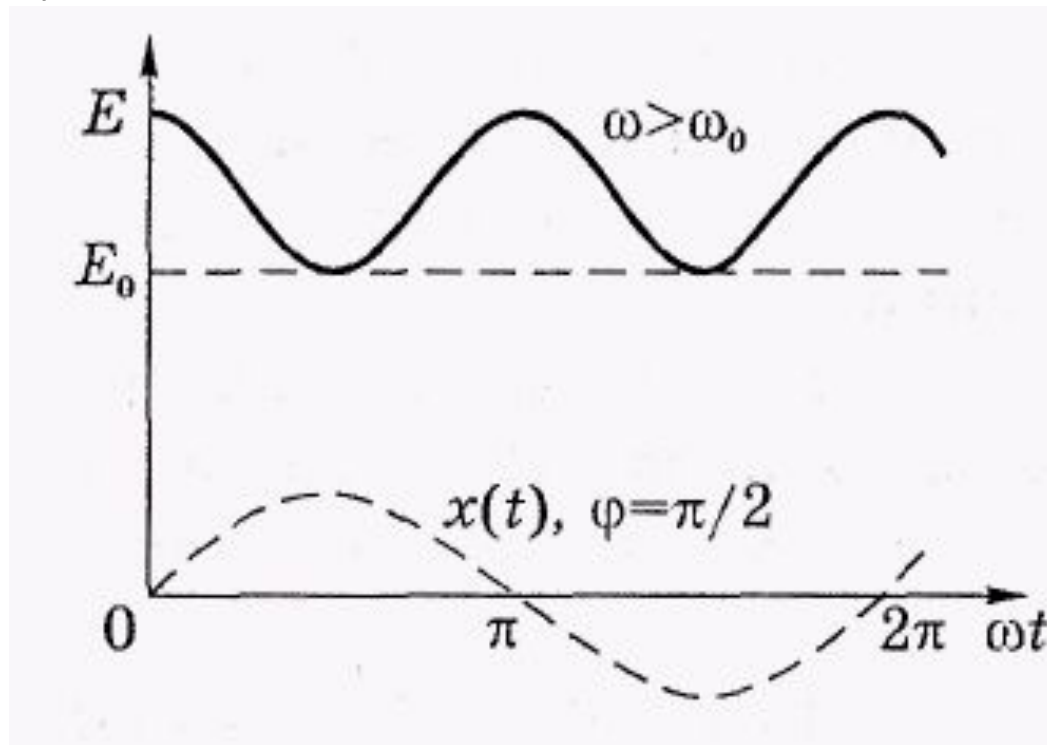
## *Энергия вынужденных колебаний.*

Так как  $E = U + K$ , то

$$E = \kappa x^2/2 + m\dot{x}^2/2 = \\ = ma^2[\omega_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi)]/2,$$

учтено, что  $\kappa = m\omega_0^2$ .

График зависимости  $E(t)$  для случая  $\omega > \omega_0$  показан на следующем рисунке.



Амплитуда колебаний энергии  $E$  будет тем меньше, чем ближе частота  $\omega$  к  $\omega_0$ , и при  $\omega = \omega_0$  энергия  $E$  не будет зависеть от времени  $t$ :

## Зависимость полной энергии механической системы от времени

$$\frac{dW}{dt} = -2\Phi + \dot{x} F_0 \cos \omega t$$

$$\Phi = \frac{r\dot{x}^2}{2} \quad \text{– диссипативная функция,}$$

$\dot{x} F_0 \cos \omega t$  – мощность внешнего источника энергии, вызывающего вынужденные колебания системы.

Мощность вынуждающей силы в каждый момент будет равна модулю мощности сил сопротивления только в случае  $\omega = \omega_0$ .

При  $\omega \neq \omega_0$  эти мощности будут равны по модулю только в среднем за период.

Амплитуда колебаний энергии  $E$  будет тем меньше, чем ближе частота  $\omega$  к  $\omega_0$ , и при  $\omega = \omega_0$  энергия  $E$  не будет зависеть от времени  $t$ :

*В установившихся колебаниях при  $\omega \neq \omega_0$  работа вынуждающей силы за период будет компенсировать потери энергии в системе за счет работы сил сопротивления.*