Теория вероятностей и математическая статистика

Кракашова Ольга Анатольевна

доцент, канд. экон. наук,

доцент кафедры Статистики, эконометрики и оценки рисков РГЭУ (РИНХ)

Лекция № 3

Основные теоремы теории вероятностей

Зависимые и независимые события

Пример 2.3 В урне два белых и три черных шара. Чему равна вероятность появления белого шара при первом извлечении из урны? При втором извлечении из урны?

Здесь возможны два случая.

Первый случай. ***Схема возвращенного шара***, то есть шар после первого испытания возвращается в урну. Пусть событие A - "появление белого шара при первом испытании". Так как $N = 5$, а $M = 2$, то $P(A) = 2/5$. Пусть событие B - "появление белого шара при втором извлечении". Так как шар после первого испытания возвратился в урну, то $N = 5$, а $M = 2$ и $P(B) = 2/5$.

Таким образом, вероятность каждого из событий не зависит от того, произошло или не произошло другое событие. События A и B в этом случае называются **независимыми**.

Зависимые и независимые события

СобытияA, B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.

Вероятности независимых событий называются ***безусловными***.

Второй случай. ***Схема невозвращенного шара***, то есть шар после первого испытания в урну не возвращается.

Вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A) = 2/5$. Белый шар в урну не возвращается, следовательно, в урне остались один белый и три черных шара.

Зависимые и независимые события

Чему равна вероятность события B при условии, что событие A произошло? $N = 4$, $M = 1$.

Искомую вероятность обозначают $P(B/A)$ или $P(B)_A$ или $P_A(B)$. Итак, $P(B/A)=1/4$ называют ***условной вероятностью***, а события A, B называются зависимыми.

События A, B называются *зависимыми*, если вероятность каждого из них зависит от того произошло или нет другое событие. Вероятность события B, вычисленная в предположении, что другое событие A уже осуществилось, называется *условной вероятностью*.

Очевидно, что если два события A и B - независимые, то справедливы равенства: $P(B) = P(B/A)$, $P(A) = P(A/B)$, **или** $P(B/A) - P(B) = 0$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

или

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot (B/A)$$

Вероятность события B при условии появления события A:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (2.8)$$

$P(A) \neq 0$.

Пример 2.4. Консультационная фирма претендует на два заказа от двух крупных корпораций. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения консультационной работы в Эксперты также полагают, что если фирма получит заказ у корпорации A, то вероятность того, что и корпорация B обратится к ним, равна 0,9. Какова вероятность, что консультационная фирма получит оба заказа?

Решение. Мы имеем $P(A)=0,45$, а также знаем, что $P(B/A)=0,9$.

Необходимо найти $P(AB)$, которая является вероятностью того, что оба события (и событие A, и событие B) произойдут. Из формулы (2.7) имеем: $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,45 \cdot 0,9 = 0,405$.

Если события А, В - независимы, то имеет место следующая теорема:

Вероятность произведения двух независимых событий А, В равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Независимость событий в совокупности

Если несколько событий попарно независимы, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. Поэтому введем понятие независимых событий в совокупности.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n > 2$) называются **независимыми в совокупности**, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошли или нет любые события из числа остальных.

Распространим теоремы умножения на случаи n независимых и зависимых в совокупности событий.

Независимость событий в совокупности

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Вероятность совместного наступления конечного числа зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили, т.е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления хотя бы одного события из n независимых в совокупности, равна разности между 1 и произведением вероятностей событий, противоположных данным, то есть

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \ldots\ldots P(\bar{A}_n)$$

Если события A_1, A_2, ... An - зависимые в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из них соответственно равна:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{n-1})$$