Теория вероятностей и математическая статистика

Кракашова Ольга Анатольевна

доцент, канд. экон. наук,

доцент кафедры Статистики, эконометрики и оценки рисков РГЭУ (РИНХ)

Лекция № 3

Основные теоремы теории вероятностей

Зависимые и независимые события

Пример 2.3 В урне два белых и три черных шара. Чему равна вероятность появления белого шара при первом извлечении из урны? При втором извлечении из урны?

Здесь возможны два случая.

Первый случай. ***Схема возвращенного шара***, то есть шар после первого испытания возвращается в урну. Пусть событие $\boldsymbol{A}$ - “появление белого шара при первом испытании”. Так как $\boldsymbol{N} = 5$, а $\boldsymbol{M} = 2$, то $\boldsymbol{P(A)} = 2/5$. Пусть событие В - “появление белого шара при втором извлечении”. Так как шар после первого испытания возвратился в урну, то $\boldsymbol{N} = 5$, а $\boldsymbol{M} = 2$ и $\boldsymbol{P(B)} = 2/5$.

Таким образом, вероятность каждого из событий не зависит от того, произошло или не произошло другое событие. События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в этом случае называются **независимыми**.

Зависимые и независимые события

События A, B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.

Вероятности независимых событий называются ***безусловными***.

Второй случай. ***Схема невозвращенного шара***, то есть шар после первого испытания в урну не возвращается.

Вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A) = 2/5$. Белый шар в урну не возвращается, следовательно, в урне остались один белый и три черных шара.

Зависимые и независимые события

Чему равна вероятность события ***B*** при условии, что событие ***A*** произошло? ***N*** = 4, ***M*** = 1.

Искомую вероятность обозначают ***P(B/A)*** или ***P(B)***$_A$ или ***P***$_A$***(B)***. Итак, ***P(B/A)***=1/4 называют ***условной вероятностью***, а события ***A***, ***B*** называются зависимыми.

События *A*, *B* называются *зависимыми*, если вероятность каждого из них зависит от того произошло или нет другое событие. Вероятность события *B*, вычисленная в предположении, что другое событие *A* уже осуществилось, называется *условной вероятностью*.

Очевидно, что если два события ***A*** и ***B*** - независимые, то справедливы равенства: ***P(B) = P(B/A), P(A) = P(A/B)***, **или** ***P(B/A) - P(B) = 0***

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

или

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot (B/A)$$

Вероятность события B при условии появления события A:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (2.8)$$

$P(A) \neq 0$.

Пример 2.4. Консультационная фирма претендует на два заказа от двух крупных корпораций. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения консультационной работы в Эксперты также полагают, что если фирма получит заказ у корпорации ***A***, то вероятность того, что и корпорация ***B*** обратится к ним, равна 0,9. Какова вероятность, что консультационная фирма получит оба заказа?

Решение. Мы имеем $\boldsymbol{P(A)}$=0,45, а также знаем, что $\boldsymbol{P(B/A)}$=0,9.

Необходимо найти $\boldsymbol{P(AB)}$**,** которая является вероятностью того, что оба события (и событие ***A***, и событие ***B***) произойдут. Из формулы (2.7) имеем: $\boldsymbol{P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)} = 0{,}45 \cdot 0{,}9 = 0{,}405$.

Если события А, В - независимы, то имеет место следующая теорема:

Вероятность произведения двух независимых событий А, В равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Независимость событий в совокупности

Если несколько событий попарно независимы, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. Поэтому введем понятие независимых событий в совокупности.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n > 2$) называются **независимыми в совокупности**, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошли или нет любые события из числа остальных.

Распространим теоремы умножения на случаи n независимых и зависимых в совокупности событий.

Независимость событий в совокупности

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Вероятность совместного наступления конечного числа зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили, т.е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$
$$P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления хотя бы одного события из n независимых в совокупности, равна разности между 1 и произведением вероятностей событий, противоположных данным, то есть

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \ldots\ldots P(\bar{A}_n)$$

Если события A_1, A_2, ... An - зависимые в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из них соответственно равна:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{n-1})$$