

Тригонометрические тождества



Цели занятия:

- формирование понятия тождества,
 - умения доказывать тождества
 - упрощать тригонометрические выражения с использованием изученных формул.
- 

- *Тождеством* называется равенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв.
- *Допустимые значения букв* – это значения, которые могут принимать буквы в данном выражении.
- Выражения, находящиеся в левой и правой частях тождества, называются *тождественными*.
- Замена некоторого выражения другим, ему тождественным, называется *тождественным преобразованием* данного выражения

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Упростите выражение:

- а) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
- б) $\cos^2 \beta - 1 = -\sin^2 \beta$
- в) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 4 = 5$
- г) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$
- д) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
- е) $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$

□ 2. Выразите через $\sin^2 \alpha$:

□ а) $(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = 2\sin^2 \alpha$

□ б)
$$3 + 3\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{3}{\sin^2 \alpha}$$

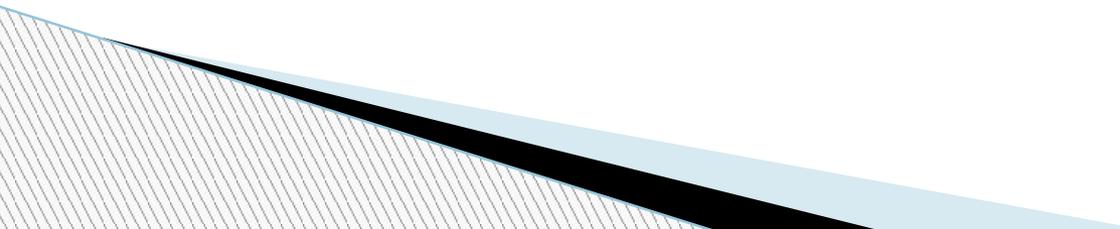
□ 3) Выразите через $\operatorname{tg} \alpha$:

а)
$$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

б)
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Способы доказательства

ТОЖДЕСТВ:

- - преобразование правой части к левой;
 - - преобразование левой части к правой;
 - - установление того, что разность между правой и левой частями
равна нулю;
 - - преобразование левой и правой части к одному и тому же выражению.
- 

Задача 1

Доказать

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Задача 1. Способ

1 Доказать

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

**Докажем, что разность
левой и правой части
равны 0.**

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = 0$$

Задача 1. Способ

Доказать

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Преобразование левой части так, чтобы она равнялась

правой

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} &= \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) : \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} : \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha) * \sin \alpha}{\cos \alpha * (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Задача 1. Способ

3 Доказать

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

**Докажем, что разность
левой и правой части
равны 0.**

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = 0$$

Доказать тождество

$$\frac{\overset{\text{A)}}{\cos \alpha}}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{B)}$$

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha}$$



Задача 3. Доказать тождество:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Доказательство:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)} = \frac{0}{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)} = 0 \end{aligned}$$

$0=0$. Что и требовалось доказать.

Задача 4. Доказать тождество:

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha}$$

Доказательство:

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Что и требовалось доказать.

Подведем предварительные ИТОГИ



**Сколько
существует
способов
доказательства
тождеств**

4



Какие это способы?

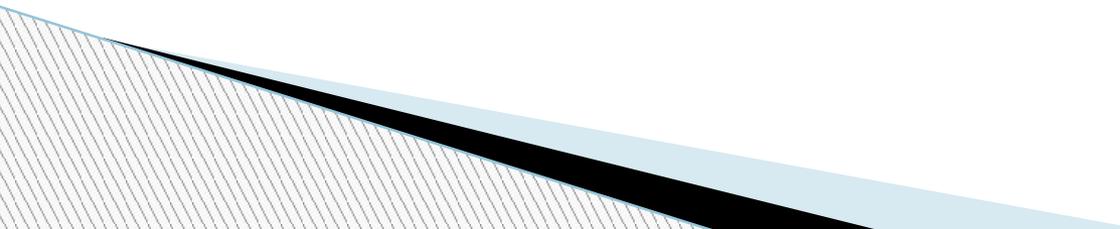
1. Докажем, что разность левой и правой части равны 0.
2. Преобразование левой части так, чтобы она равнялась правой.
3. Преобразование правой части так, чтобы она равнялась левой.
4. Левую и правую часть преобразуем к одному выражению.

Рефлексия

- Пришло время подвести итоги работы.
Продолжите фразу:
 - ▣ «Сегодня на уроке я повторил...»
 - ▣ «Сегодня на уроке я узнал...»
 - ▣ «Сегодня на уроке я научился...»
 - ▣ «Сегодня на уроке я закрепил...»
- 

**«В математике следует
помнить не формулы, а
процессы мышления».**

□ Ермаков В.П.





**Спасибо за
внимание**