Тригонометрические тождества

Цели занятия:

- формирование понятия тождества,
- умения доказывать тождества
- упрощать тригонометрические выражения с использованием изученных формул.

- *Тождеством* называется равенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв.
- *Допустимые значения букв* – это значения, которые могут принимать буквы в данном выражении.
- Выражения, находящиеся в левой и правой частях тождества, называются *тождественными*.
- Замена некоторого выражения другим, ему тождественным, называется *тождественным преобразованием* данного выражения

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Упростите выражение:

- а) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
- б) $\cos^2 \beta - 1 = -\sin^2 \beta$
- в) $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x + 4 = 5$
- г) $\cos \alpha \cdot \mathrm{tg}\, \alpha = \sin \alpha$
- д) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
- е) $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$

- 2. Выразите через $sin^2\alpha$:
- а) $(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = 2\sin^2 \alpha$
- б) $$3 + 3ctg^2\alpha = \frac{3}{\sin^2 \alpha}$$
- 3) Выразите через $\mathrm{tg}\, \alpha$:

а) $$\frac{1}{ctg\alpha} = tg\alpha$$

б) $$\frac{tg\alpha}{ctg\alpha} = tg^2\alpha$$

Способы доказательства тождеств:

- \- преобразование правой части к левой;
- \- преобразование левой части к правой;
- \- установление того, что разность между правой и левой частями

равна нулю;

- \- преобразование левой и правой части к одному и тому же выражению.

Задача 1

Доказать

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha},\textit{при}\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\textit{где}\ \mathrm{k}\in \mathrm{Z}$$

Задача 1. Способ 1.

Доказать

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}, при \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, где\ \mathrm{k}\in Z$$

Докажем, что разность левой и правой части равны 0.

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=0$$

Задача 1. Способ 2.

Доказать

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}, при \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, где\ \mathrm{k}\in Z$$

Преобразование левой части так, чтобы она равнялась правой

$$\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}=tg\alpha$$

$$\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}=(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}):(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}:\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)*\sin\alpha}{\cos\alpha*(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$$

Задача 1. Способ 3.

Доказать

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}, при \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, где\ \mathrm{k}\in Z$$

Докажем, что разность левой и правой части равны 0.

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=0$$

Доказать тождество

- А) $$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
- Б) $$\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$

Задача 3. *Доказать тождество:*

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Доказательство:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$$

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{0}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0$$

0=0. Что и требовалось доказать.

Задача 4. *Доказать тождество:*

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$

Доказательство:

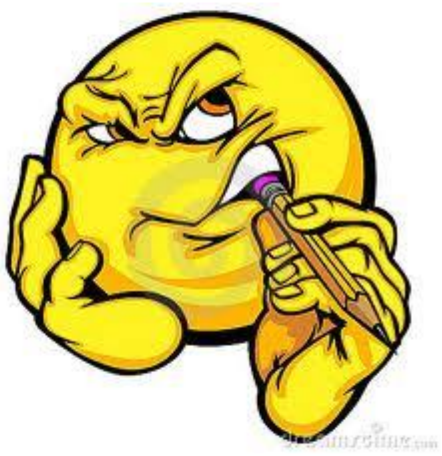
$$\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

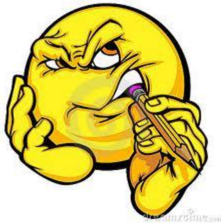
Что и требовалось доказать.

Подведем предварительные итоги



Сколько существует способов доказательства тождеств

4



Какие это способы?

1. Докажем, что разность левой и правой части равны 0.

2. Преобразование левой части так, чтобы она равнялась правой.

3. Преобразование правой части так, чтобы она равнялась левой.

4. Левую и правую часть преобразуем к одному выражению.

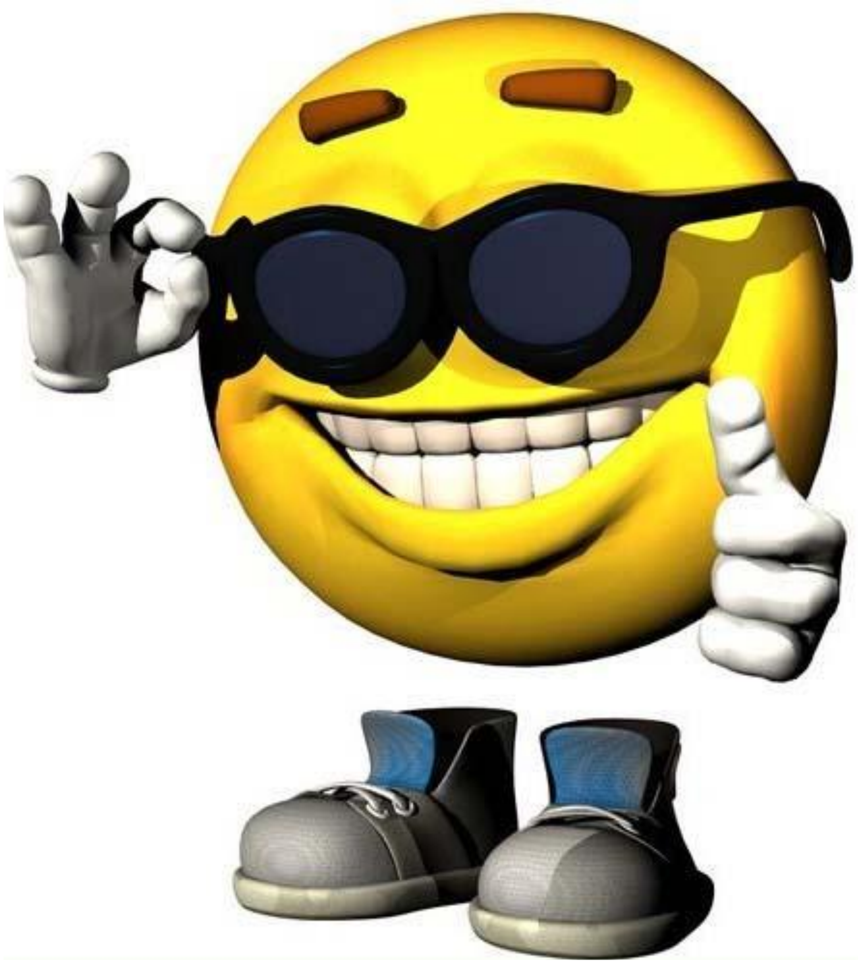
Рефлексия

- Пришло время подвести итоги работы. Продолжите фразу:

- «Сегодня на уроке я повторил…»
- «Сегодня на уроке я узнал…»
- «Сегодня на уроке я научился…»
- «Сегодня на уроке я закрепил…»

«В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления».

- Ермаков В.П.



Спасибо за внимание