

*Задания на I семестр для инженерно-технических специальностей,  
специальностей ПСЖД, СЖД, СТР, ЭЖД, СОДП.*

Контрольная работа № 1(1-50);  
Контрольная работа № 2 (51-100).

Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного или набранную на компьютере в распечатанном виде.

# Содержание курса:

1. Аналитическая геометрия на плоскости.
2. Определители второго и третьего порядка. Матрицы. Линейные операции над матрицами. СЛАУ методы их решения (по формулам Крамера, матричный способ, метод Гаусса)
3. Элементы векторной алгебры. Аналитическая геометрия в пространстве.
4. Комплексные числа.
5. Предел и непрерывность функции.
6. Производная функции одной переменной.

## *Рекомендуемая литература:*

1. Пайметов Н.Г., Баженова Т.И. Высшая математика (методическое пособие);
2. Данко П.Е. высшая математика в упражнениях и задачах;
3. Баврин И.И. Высшая математика;
4. Гусак А.А. Высшая математика;
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.

# Прямая линия на плоскости

Уравнение вида:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Rightarrow y = kx + b, \text{ где}$$

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

$y = kx + b$  – уравнение прямой с угловым коэффициентом,  
 $k = \operatorname{tg}\alpha$ ,

$\alpha$  – угол образованный прямой с положительным направлением оси  $Ox$ ,  
свободный член равен ординате точки пересечения прямой с осью  $Oy$

Если прямая проходит через точку  $M_0(x_0; y_0)$  с заданным угловым коэффициентом  $k$ , то

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Уравнение прямой проходящей через две точки  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами  $y = k_1x + b_1$ ,  $y = k_2x + b_2$ , то один из углов образованный пересечением прямых определяется по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

*Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых*

$k_1 = k_2$  — условие параллельности;

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$  — условие перпендикулярности.

Расстояние между точками  $M_1(x_1; y_1)$  ,  $M_2(x_2; y_2)$  находим:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



• Координаты точки  $C(x, y)$ , делящей отрезок  $AB$  ( $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ) в заданном отношении, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Если  $\lambda = 1$ ,  $C(x, y)$ - середина  $AB$ , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Координаты точки пересечения прямых

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \left( \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \right)$$

*Пример. Даны координаты вершин треугольника :  $A(4;5)$ ,  $B(2;-2)$ ,  $C(7;-4)$*

Найти:

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине  $A$ ;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины  $B$ ;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины  $B$ ;
5. длину высоты, проведенной из вершины  $B$ ;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины  $B$  с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.

Найти:

$A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)$

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине А;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины В;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины В;
5. длину высоты, проведенной из вершины В;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины В с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.

$$1. AB = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{53} \approx 7,28 \text{ ед. длины}$$

$$BC = \sqrt{29} \approx 5,39 \text{ ед. длины}$$

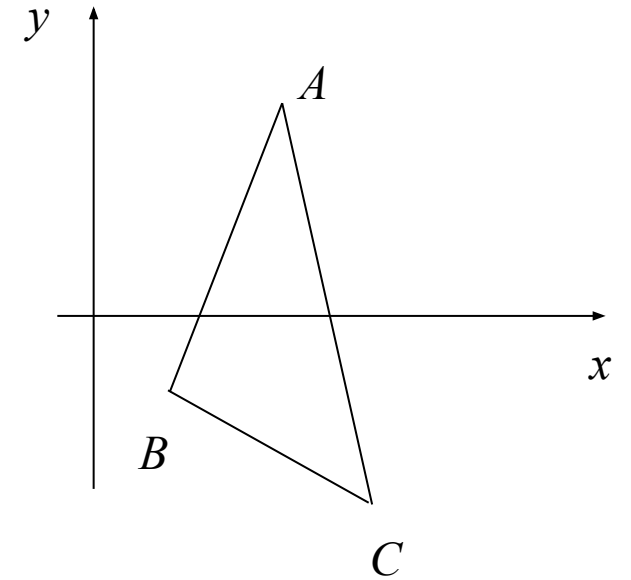
$$AC = \sqrt{90} \approx 9,49 \text{ ед. длины}$$

$$P=22,16 \text{ ед. дл.}$$

$$2. AB: \frac{x-4}{2-4} = \frac{y-5}{-2-5} \Rightarrow 7x - 2y - 18 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{2}x - 9, k_{AB} = \frac{7}{2}$$

$$AC: \frac{x-4}{7-4} = \frac{y-5}{-4-5} \Rightarrow 3x + y - 17 = 0 \Rightarrow y = -3x + 17, k_{AC} = -3$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = -\frac{13}{19}; \angle A = 34,4^\circ$$



Найти:

$$A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)$$

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине А;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины В;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины В;
5. длину высоты, проведенной из вершины В;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины В с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.

3.  $BD \perp AC, k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}} \Rightarrow k_{BD} = \frac{1}{3}$ , уравнение прямой проходящей через точку

с заданным угловым коэффициентом  $y + 2 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow x - 3y - 8 = 0$

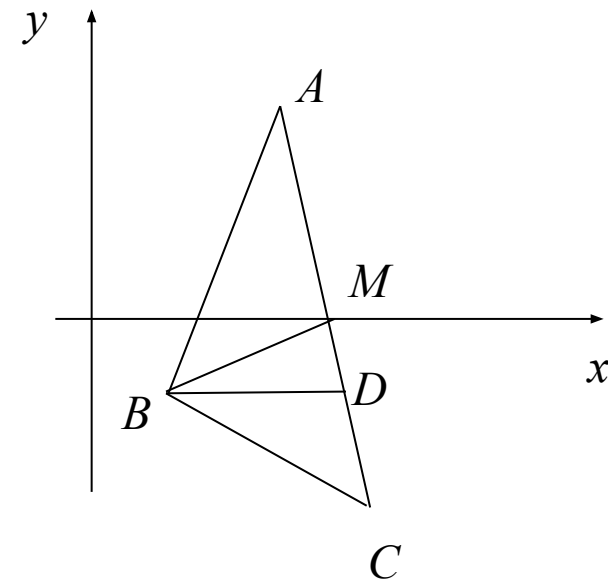
BD:  $x - 3y - 8 = 0$

4. М-середина AC,  $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = 5,5$ ;  $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = 0,5$

BM:  $\frac{x-2}{5,5-2} = \frac{y+2}{0,5+2} \Rightarrow 5x - 10 = 7y + 14 \Rightarrow 5x - 7y - 24 = 0$

5.  $d_{BD} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) - 17|}{\sqrt{10}} \approx 4,1$  ед. дл

AC:  $3x + y - 17 = 0$



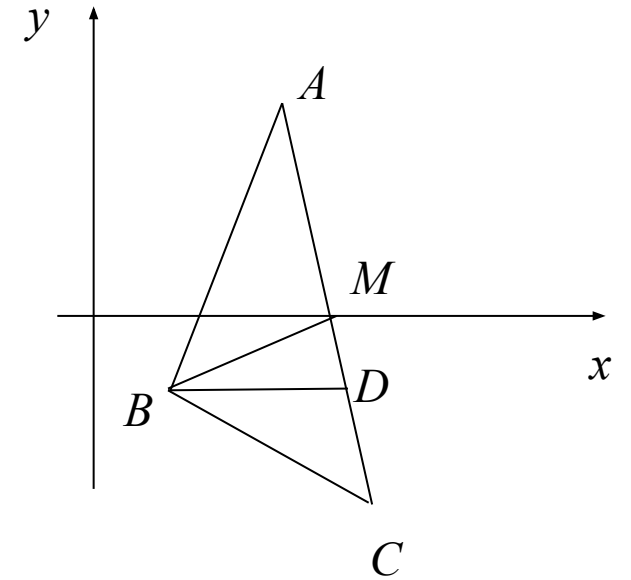
Найти:

$$A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)$$

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине А;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины В;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины В;
5. длину высоты, проведенной из вершины В;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины В с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.

6.  $BD: x - 3y - 8 = 0, AC: 3x + y - 17 = 0$

$$\begin{cases} x - 3y - 8 = 0, \\ 3x + y - 17 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5,9 \\ y = -0,7 \end{cases} \Rightarrow D(5,9; -0,7)$$



# Кривые второго порядка

•  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$  — линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат  $x$  и  $y$ , называются линиями второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола)

Уравнение окружности задается:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Уравнение окружности с центром в точке  $M_0(x_0; y_0)$  задается:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



*Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$a$  — большая полуось,  $b$  — малая полуось,  $c$  — полуфокусное расстояние, причем  $a, b, c$  связаны соотношением:

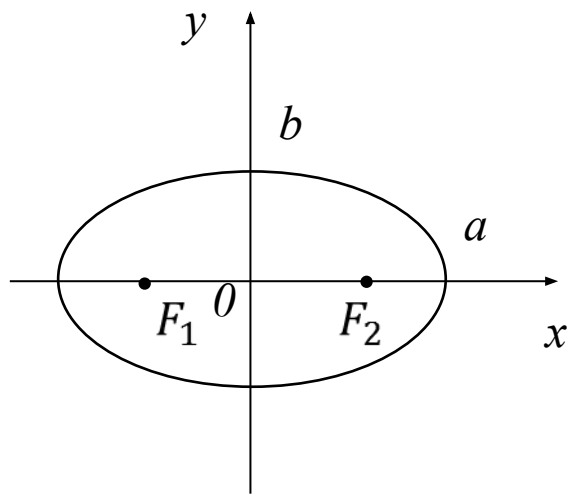
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке  $M(x_0; y_0)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

● Степень сжатия эллипса характеризуется его эксцентриситетом:

$$e = \frac{c}{a} < 1$$



*Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$a$  — действительная полуось,  $b$  — мнимая полуось,  $c$  — полуфокусное расстояние, причем  $a, b, c$  связаны соотношением:

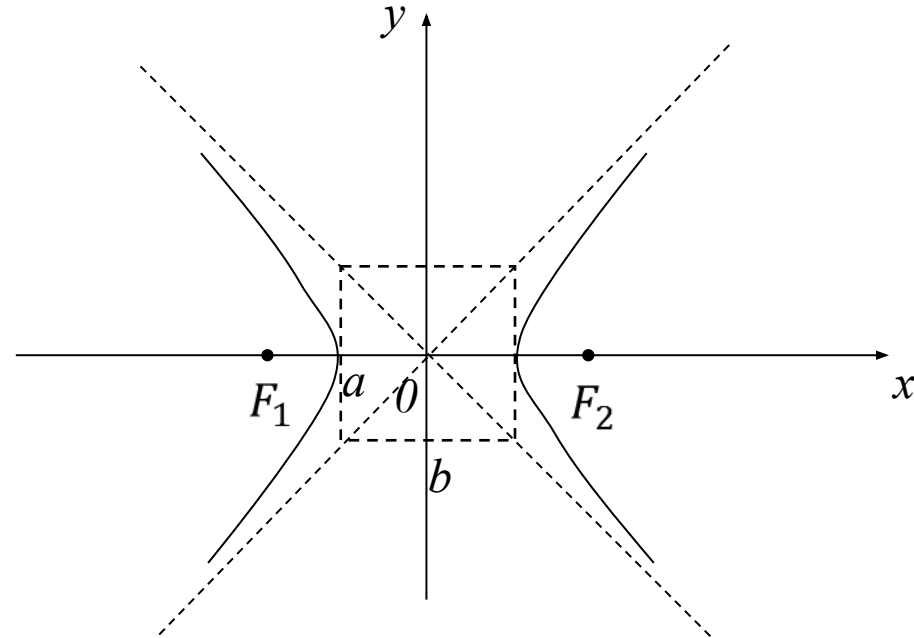
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Сопряженная гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

Прямые  $y = \pm \frac{b}{a}x$  — асимптоты гиперболы

Уравнение гиперболы с центром в точке  $M(x_0; y_0)$ :  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ,



*Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом и данной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px,$$

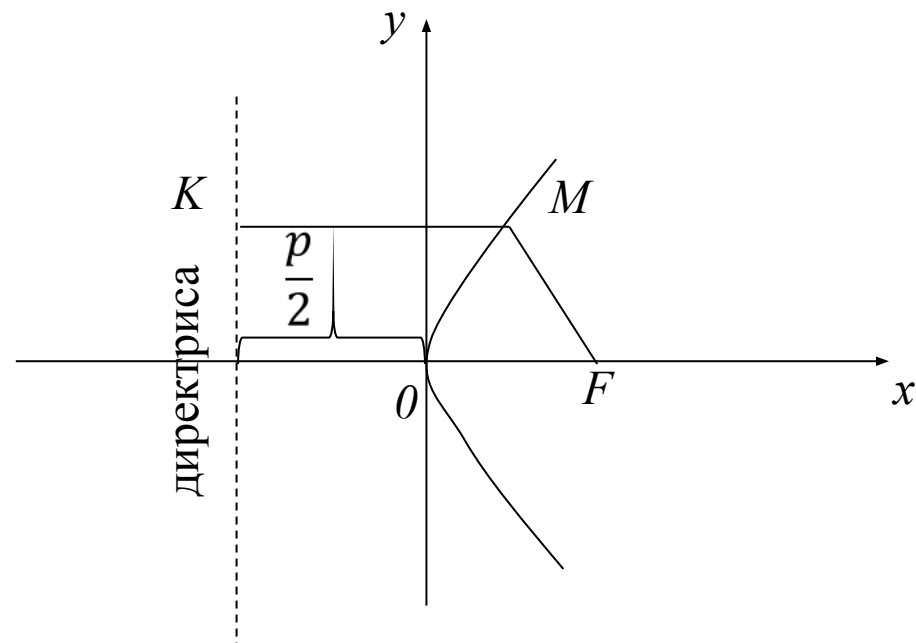
если директрисой является прямая  $x = -\frac{p}{2}$ , а фокусом – точка  $F(\frac{p}{2}; 0)$ ,

если парабола расположена симметрично относительно оси  $Ox$  ( $p > 0$ ), то уравнение параболы задается:

$$x^2 = 2py$$

Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке  $A(x_0; y_0)$ :

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$$



Уравнение вида:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

определяет либо:

окружность ( $A=C$ );

эллипс ( $A \cdot C > 0$ );

гиперболу ( $A \cdot C < 0$ );

параболу ( $A$  или  $C = 0$ .)

Пример. Построить кривые второго порядка, приведя её к каноническому виду:  $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$

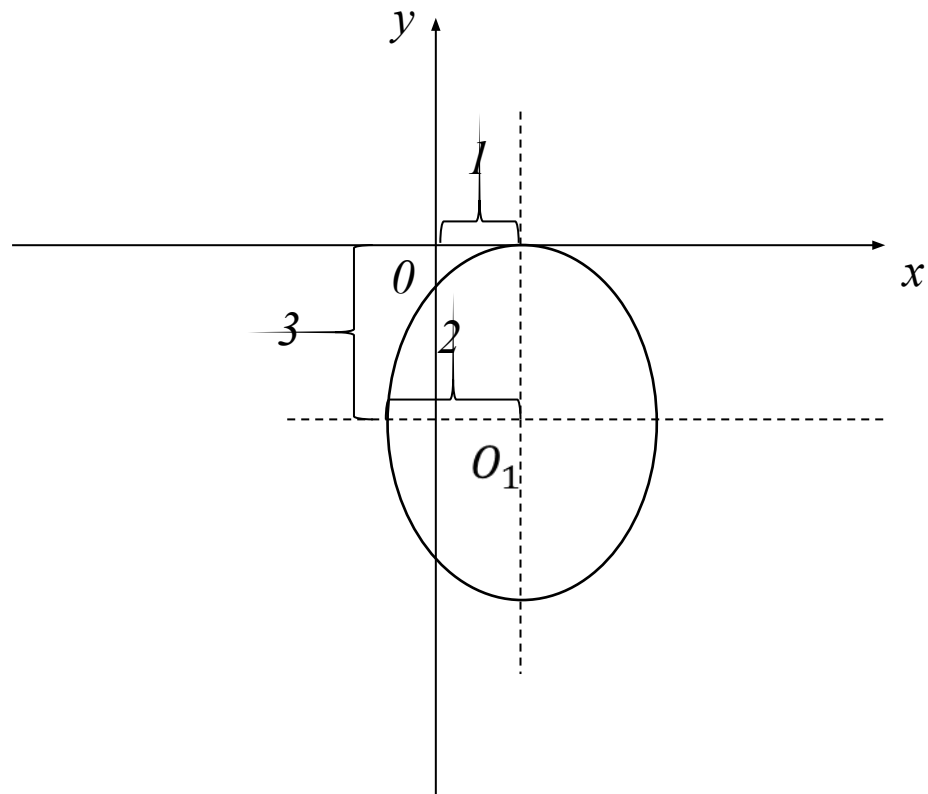
$$9(x^2 - 2x) + (4y^2 + 24y) + 9 = 0,$$

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 6y + 9 - 9) + 9 = 0,$$

$$9(x - 1)^2 - 9 + 4(y + 3)^2 - 36 + 9 = 0,$$

$$9(x - 1)^2 + 4(y + 3)^2 = 36,$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$$





Линейная алгебра.  
Определители 2-го и 3-го порядков.

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Обозначение:  $\Delta, \det A, |A|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

*Минором* элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный путем вычёркивания строки и столбца, содержащий данный элемент.

*Алгебраическим дополнением* элемента  $a_{ij}$  называется его минор умноженный на  $(-1)^{i+j}$

Пример. Найти алгебраическое дополнение элемента  $a_{12}$

$$\begin{vmatrix} \bullet a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## Способы вычисления определителей 3-го порядка:

•

$$1. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33};$$

$$3. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33};$$

Линейная алгебра.  
Матрицы. Линейные операции над матрицами.

Матрица-прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$ -строк и  $n$ -столбцов ( $m \times n$ )

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначается: A, B, C...

Матрица размерности ( $n \times n$ ) называется квадратной

Матрица  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$  состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом, аналогично для матрицы-строки.

Диагональная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице называется единичной матрицей:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

*Сложение матриц* (только для матриц одинаковой размерности).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

*Умножение матриц на число.*

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$



- Умножение матриц. Умножать матрицы  $A$  и  $B$  можно лишь в случае, если *число столбцов первой матрицы равно* числу *строк второй матрицы*.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$$

# Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

- Система
 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$
 совместна и имеет

единственное решение, если определитель из коэффициентов при неизвестных ( $a_{ij}$ ) отличен от нуля.

# Методы решения систем линейных уравнений

## *По формулам Крамера*

- $$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \Delta \neq 0,$$

где  $\Delta x_i$  — дополнительные определители, полученные из определителя  $\Delta$  путем замены столбцов коэффициентов при  $x_i$  столбцом правой части.

Пример. Решить СЛУ по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 1 + 4 - 4 - 2 = 3, \Delta \neq 0, \text{ система имеет единственное решение}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3; \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{3} = 1; x_2 = \frac{6}{3} = 2; x_3 = \frac{-6}{3} = -2$$

Ответ:  $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -2$

## Средствами матричного исчисления

• Систему уравнений  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$  записывают в матричной форме  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

До множим слева матричное уравнение на  $A^{-1}$ :  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ,  $A^{-1}A = E \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{— обратная матрица. } A_{ij} \text{— алгебраическое дополнение матрицы } A$$

## Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \quad AX = B, A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Составим обратную матрицу  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ .

Вычисляем определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -4$ ,  $\Delta \neq 0$ , следовательно, матрица  $A$  является невырожденной и поэтому имеет обратную матрицу.

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = 4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = -3;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$



- $$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:  $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$

## *Метод Гаусса*

*Последовательно исключаем неизвестные путем элементарных преобразований, приводя систему к ступенчатому виду.*

*Если в системе последнее уравнение содержит одно неизвестное, то она имеет единственное решение.*

*Если в системе последнее уравнение будет содержать более одного неизвестного, то она имеет множество решений.*

*Если в системе хотя бы одно из уравнений будет вида  $0=1$ , то она будет несовместна, т.е. не иметь решения.*

Пример. Решить СЛУ методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array} \right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Умножим первую строку на 3} \\ \text{Вторую на 2} \\ \text{сложим первую и третью строки} \end{array} \right| \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 16 & 1 & 0 & 35 \\ 9 & 3 & 0 & 27 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Умножим вторую строку на 3} \\ \text{из третьей строки вычтем вторую} \end{array} \right| \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 16 & 1 & 0 & 35 \\ 39 & 0 & 0 & 78 \end{array} \right) \Rightarrow |\text{Разделим третью строку на 39}|$$

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 16x_1 + x_2 = 35, \\ x_1 = 2, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 5$$

Ответ:  $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 5$

*Элементы векторной алгебры. Аналитическая  
геометрия в пространстве.*

Вектор-направленный отрезок у которого есть начало и конец и обозначается  $\overrightarrow{AB}$  или  $\vec{a}$ .



Если в  $OXYZ$  заданы точки  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то координаты вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Если  $a_x = x_2 - x_1$ ;  $a_y = y_2 - y_1$ ;  $a_z = z_2 - z_1$  - проекции вектора на оси координат, то координаты вектора:

$\overrightarrow{AB} = \{a_x; a_y; a_z\}$  или  $\overrightarrow{AB} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  - разложение вектора по осям координат (ортам),  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - орты (единичные векторы) системы координат.

Модуль (длина вектора):  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Два вектора называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы, параллельные одной плоскости или лежащие в одной плоскости, называются *компланарными*.

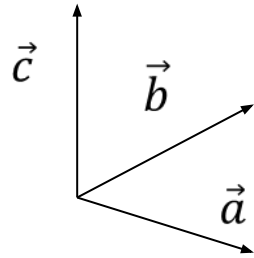
*Скалярным произведением двух векторов* называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} \quad \text{или} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Угол между векторами, заданными в координатной форме, определяется :

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Векторным произведением двух некопланарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  ( $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ), для которого  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , ортогональный векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , и направленный так, что  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют правую тройку



Векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Модуль векторного произведения  $\vec{a} \times \vec{b}$  равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$S_n = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , равен

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Скалярным произведением вектора  $\vec{c}$  на векторное произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется смешанным или скалярно-векторным произведением векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \text{ или } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Смешанное произведение по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

В координатной форме:  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ , если  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ , то вектора компланарны

Объем пирамиды, построенной на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , равен:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$$



*Плоскость*

- $Ax + By + Cz + D = 0$  – уравнение плоскости, причем  $\vec{n} = \{A, B, C\}$  – вектор нормали плоскости.

Уравнение плоскости проходящее через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = \{A, B, C\}$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Уравнение плоскости проходящей через три данные точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

● Если две плоскости параллельны, то коэффициенты общих уравнений:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Если две плоскости перпендикулярны, то  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

# *Прямая в пространстве*

Прямая в пространстве может быть получена пересечением двух плоскостей, поэтому аналитически задается системой двух уравнений плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  — каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и параллельной вектору

$\vec{S} = \{l; m; n\}$  — направляющий вектор

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$  — уравнение прямой,

проходящей через две точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ,

Угол между прямой  $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  и плоскостью  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды ABCD: A(2;1;3), B(-1;0;2), C(1;1;1), D(-2;3;5).

Найти:

1. угол между ребрами AB и AC;
2. площадь грани ABC;
3. уравнение плоскости ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;
6. объем пирамиды.

Решение:

$$1. \overrightarrow{AB} = \{-1 - 2; 0 - 1; 2 - 3\} = \{-3; -1; -1\}; \overrightarrow{AC} = \{1 - 2; 1 - 1; 1 - 3\} = \{-1; 0; -2\}$$

$$\cos(\widehat{ABAC}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{-3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (-2)^2}} = 0,674$$

$$\varphi = 47,6^\circ$$

$$2. S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-1)^2} \approx 2,74 \text{ кв. ед.}$$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды ABCD: A(2;1;3), B(-1;0;2), C(1;1;1), D(-2;3;5).

Найти:

1. угол между ребрами AB и AC;
2. площадь грани ABC;
3. уравнение плоскости ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;
6. объем пирамиды.

$$3. \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, 2(x-2) - 5(y-1) - (z-3) = 0 \Rightarrow 2x - 5y - z + 1 = 0, \\ \varphi =$$

4.  $\overrightarrow{AD} = \{-4; 2; 2\}$  – координаты направляющего вектора  $\vec{S}$ , координаты вектора нормали плоскости ABC  
 $\vec{n} = \{2; -5; -1\}$

$$\sin \varphi = \frac{\vec{S} \cdot \vec{n}}{|\vec{S}| \cdot |\vec{n}|} = -0,745, \varphi = 53,55^\circ$$



Пример. Даны координаты вершин пирамиды ABCD: A(2;1;3), B(-1;0;2), C(1;1;1), D(-2;3;5).

Найти:

1. угол между ребрами AB и AC;
2. площадь грани ABC;
3. уравнение плоскости ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;
6. объем пирамиды.

5. D(-2;3;5), ABC:  $2x - 5y - z + 1 = 0$   $\vec{n} = \{2; -5; -1\}$

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-5}{-1}.$$

6.  $\overrightarrow{AB} = \{-3; -1; -1\}$ ;  $\overrightarrow{AC} = \{-1; 0; -2\}$ ;  $\overrightarrow{AD} = \{-4; 2; 2\}$

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \frac{2}{3} \text{ куб. ед.}$$

*Разложение вектора по базисным векторам*

Пусть  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_m$  - какие-нибудь векторы линейного пространства  $V$ . Согласно аксиомам линейного пространства, вектор

$$\vec{y} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m$$
 -линейная комбинация векторов

Если все элементы линейной комбинации векторов равны нулю, то такая комбинация называется *тривиальной* и представляет собой нулевой вектор. Если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, то комбинация векторов называется *нетривиальной*.

Система векторов называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов является нулевым вектором, и *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая является нулевым вектором.

Из приведенных выше определений следует, что вопрос, является ли данная система векторов  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_m$  линейно зависимой или линейно независимой, сводится к выяснению того, при каких  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  возможно равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = 0 \quad (*)$$

Если это равенство справедливо лишь при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ , то векторы линейно независимы. Если же существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, и для этих чисел имеет место равенство (\*), то векторы линейно зависимы.

Предположим, что в пространстве  $R^3$  заданы три вектора:  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$ . Они образуют базис, если

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда любой вектор  $\vec{d} = (d_x; d_y; d_z)$  можно выразить через  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Допустим, что в базисе этих векторов вектор имеет координаты  $\vec{d} = (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})$ . Компоненты  $\alpha, \beta, \gamma$  находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x = d_x \\ \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y = d_y \\ \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z = d_z \end{cases}$$

**Пример.** Даны векторы:  $\vec{a}(7; 2; 1)$ ,  $\vec{b}(4; 3; 5)$ ,  $\vec{c}(3; 4; -2)$ ,  $\vec{d}(2; -5; -13)$  в некотором базисе. Показать, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{d}$  в этом базисе.

**Решение.** Определим, являются ли векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  линейно независимыми, т. е. образуют ли они базис.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -129 \neq 0.$$

Следовательно, векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют базис пространства.

Определим координаты вектора  $\vec{d}$  в этом базисе, т. е.

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – некоторые числа. Следовательно,

$$(2; -5; -13) = \alpha(7; 2; 1) + \beta(4; 3; 5) + \gamma(3; 4; -2)$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы:

$$\begin{cases} 7\alpha + 4\beta + 3\gamma = 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = -5. \\ \alpha + 5\beta - 2\gamma = -13 \end{cases}$$

Откуда  $\alpha = 2$ ;  $\beta = 3$ ;  $\gamma = 0$ , т. е. координаты вектора  $\vec{d}$  в базисе векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  есть  $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  или  $\vec{d} = (2; 3; 0)$ .

*Задания на I семестр для инженерно-технических специальностей,  
специальностей ЭКО*

Контрольная работа № 2 (51-100).

Библиотека ► Папка «Студентам» ► Папка «Красноперова» ► .pdf  
Контрольные работы №1-6.

Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного или набранную на компьютере в распечатанном виде.



# Содержание курса:

1. Комплексные числа.
2. Предел и непрерывность функции.
3. Производная функции одной переменной.

*Рекомендуемая литература:*

1. Пайметов Н.Г., Баженова Т.И. Высшая математика (методическое пособие);

# *Комплексные числа*

Комплексным числом  $Z$  называется упорядоченная пара  $(a; b)$  чисел, первое из которых называется действительной частью, а второе – мнимой частью. Обозначается  $Z = a + bi$  или  $x + yi$ , где  $a$  – действительная часть,  $bi$  – мнимая часть комплексного числа.  $i$  – мнимая единица, определяемая равенством  $i = \sqrt{-1}$  или  $i^2 = -1$ .

Запись комплексного числа в виде  $a + bi$  называется алгебраической формой.

$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  – тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

## Основные действия над комплексными числами

### 1. Сложение комплексных чисел

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

### 2. Умножение комплексных чисел

$$i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i;$$

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) &= a_1a_2 + a_2b_1i + a_1b_2i + b_1b_2i^2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)i\end{aligned}$$

Умножение сопряженных чисел

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

### 3. Деление комплексных чисел.

Необходимо числитель и знаменатель домножить на сопряженное знаменателю выражение

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{a^2 + b^2} = a + bi.$$

#### 4. Возведение комплексных чисел в степень.

Удобно действие возведения в степень производить с комплексным числом в тригонометрической форме записи

$$(a + bi)^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = a_1 + b_1 i.$$

#### 5. Извлечение корня.

$$\sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

### **Примеры.**

а). Выполнить действия в алгебраической форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i}{2+i}\right)^2 + (1+i)^2 - \frac{1}{i^3} &= \left(\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2 + 1 + 2i + i^2 + \frac{1}{i} = \\ &= \left(\frac{2-3i+i^2}{4-i^2}\right)^2 + 2i + \frac{i}{i^2} = \left(\frac{1-3i}{5}\right)^2 + 2i - i = \frac{1-6i-9}{25} + i = -\frac{8}{25} + \frac{19}{25}i. \end{aligned}$$

б). Найти все корни уравнения  $\omega^3 + z = 0$ , если  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ .

*Решение:* Проведем преобразование уравнения

$$\omega^3 - 2 + 2\sqrt{3}i = 0 \Rightarrow \omega^3 = 2 - 2\sqrt{3}i \Rightarrow \omega = \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}i}.$$

Используя формулу представим комплексное число  $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$  в тригонометрической форме. Для этого найдем модуль и аргумент комплексного числа, где  $a = 2$ ,  $b = -2\sqrt{3}$ .

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = 4;$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\sin \varphi = \frac{b}{r} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{3}\pi$$

$$z_1 = 4 \left( \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) - \text{тригонометрическая форма комплексного числа}$$

Для нахождения корней уравнения используем формулу

$$\omega = \sqrt[3]{4 \left( \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)} = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \quad \omega_1 = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{5}{9}\pi + i \sin \frac{5}{9}\pi \right) = -0,27 + 1,56i;$$

$$k = 1 \quad \omega_2 = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{11}{9}\pi + i \sin \frac{11}{9}\pi \right) = -1,22 - 1,02i;$$

$$k = 2 \quad \omega_3 = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{17}{9}\pi + i \sin \frac{17}{9}\pi \right) = 1,49 - 0,54i.$$



# *Пределы и непрерывность функции*

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x > a$ , если для любого, сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $|f(x) - A| < \varepsilon$  при  $|x - a| < \delta$ . Это записывается так:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , то функция  $f(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ .

Если  $x < a$  и  $x \rightarrow a$ , то употребляется запись  $x \rightarrow a - 0$ ; если  $x > a$  и  $x \rightarrow a$  - запись  $x \rightarrow a + 0$ . Числа  $f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$  и  $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$  называются соответственно *левосторонним* и *правосторонним* пределами функции.

Практическое вычисление пределов основано на следующих теоремах.

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  существуют, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{при } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c, \text{ где } c - \text{const.}$$

Используются также следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (первый замечательный предел);}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e \approx 2,71828... \text{ (второй замечательный предел).}$$

Если  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  две бесконечно малые при  $x \rightarrow a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются эквивалентными и обозначается  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\ln(1+x) \sim x.$$

Некоторые часто встречающиеся пределы функций: ( $c > 0$  – постоянная)

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{c}{x} = -\infty; \quad 2) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{c}{x} = \infty; \quad 3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0;$$

$$4) \quad 0 < c < 1 \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c^x = 0;$$

$$5) \quad c > 1 \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \infty.$$

### Примеры.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \text{/числитель и знаменатель разложим на множители /}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - 7x + 4}{x^3 + 4x^2 + 5x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \text{/разделим числитель и знаменатель на неизвест-$$

ную в старшей степени числителя, т.е. на " $x^3$ " /

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} = 9;$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \text{/умножим числитель и знаменатель на выражение,}$$

сопряженное знаменателю/ =  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(3+\sqrt{2x-1})}{(3-\sqrt{2x-1})(3+\sqrt{2x-1})} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(3+\sqrt{2x-1})}{9-(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(3+\sqrt{2x-1})}{2(5-x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3+\sqrt{2x-1})}{2} = 3.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \text{/сведем функцию к использованию первого замечатель-$$

ного предела/ =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x \cdot \cos 5x \cdot 5x}{x \cdot \sin 5x \cdot 5x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x}{5} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{4x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = /используем эквивалентные бесконечно малые велич-$$

$$ны \ln(x+1) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 / = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-4}{x-1} \right)^{3x} = \left[ 1^\infty \right] = /сведем ко второму замечательному пределу/ =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1-3}{x-1} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-1} - \frac{3}{x-1} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{-\frac{x-1}{3}} \right)^{-\frac{x-1}{3}} \right]^{\frac{3 \cdot 3x}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{9x}{x-1}} = e^{-9}.$$

# *Непрерывность функции*



Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x = a$  тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ .

Для того, чтобы функция  $y = f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $a$ , была непрерывной в точке  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ , равные друг другу и значению функции в точке  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$$

Точка  $a$ , принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции. Они подразделяются на точки разрыва I рода и II рода.

Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* ( когда  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$ , т.е. когда левый и правый пределы функции в точке  $a$  равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* ( когда  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ).

## Примеры.

а) Исследовать функцию  $y = \begin{cases} -x & x < 0 \\ \arctg x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 2 & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$  на непрерывность и

сделать схематический чертеж.

Исследуем исходную функцию на непрерывность в указанных точках.

$x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0-0} (-x) = 0$   $\lim_{x \rightarrow 0+0} \arctg x = 0$ . Функция определена в окрестности точки  $x = 0$ , пределы слева и справа существуют и равны друг другу и равны значению функции в точке, т. е.:  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0)$ . Следовательно, функция в точке  $x = 0$  непрерывна.

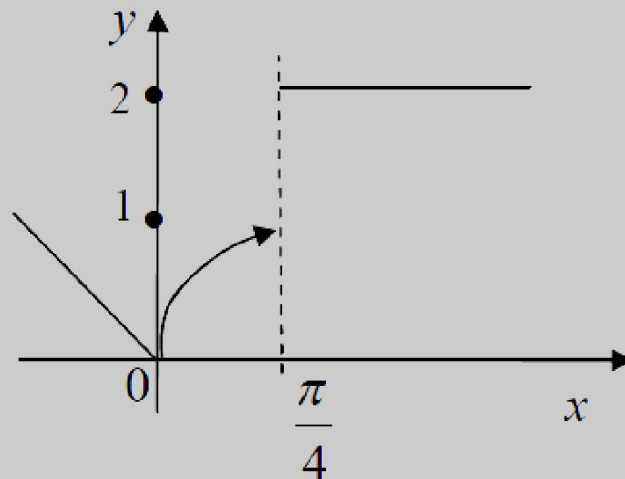
$x = \frac{\pi}{4}$ :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \arctg x = 1$   $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} 2 = 2$ . Пределы в окрестности точки существуют, но не равны друг другу, т.е.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} f(x)$ .

*Примеры.*

a) Исследовать функцию  $y = \begin{cases} -x & x < 0 \\ \operatorname{arctg} x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 2 & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$  на непрерывность и

сделать схематический чертеж.

График функции:



б) Исследовать функцию  $y = 9^{\frac{1}{2-x}}$  на непрерывность и построить график.

Решение: Данная функция определена при всех значениях  $x$ , кроме точки  $x = 2$ , которая является точкой разрыва.

Исследуем характер разрыва. Найдем односторонние пределы.

Левосторонний предел: при  $x < 2$  предел степени  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{2-x} = \infty$ , следова-

тельно,  $\lim_{x \rightarrow 2-0} 9^{\frac{1}{2-x}} = \infty$ .

Правосторонний предел: при  $x > 2$  знаменатель показателя степени  $2-x < 0$ ,

предел степени  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{2-x} = -\infty$ , следовательно,

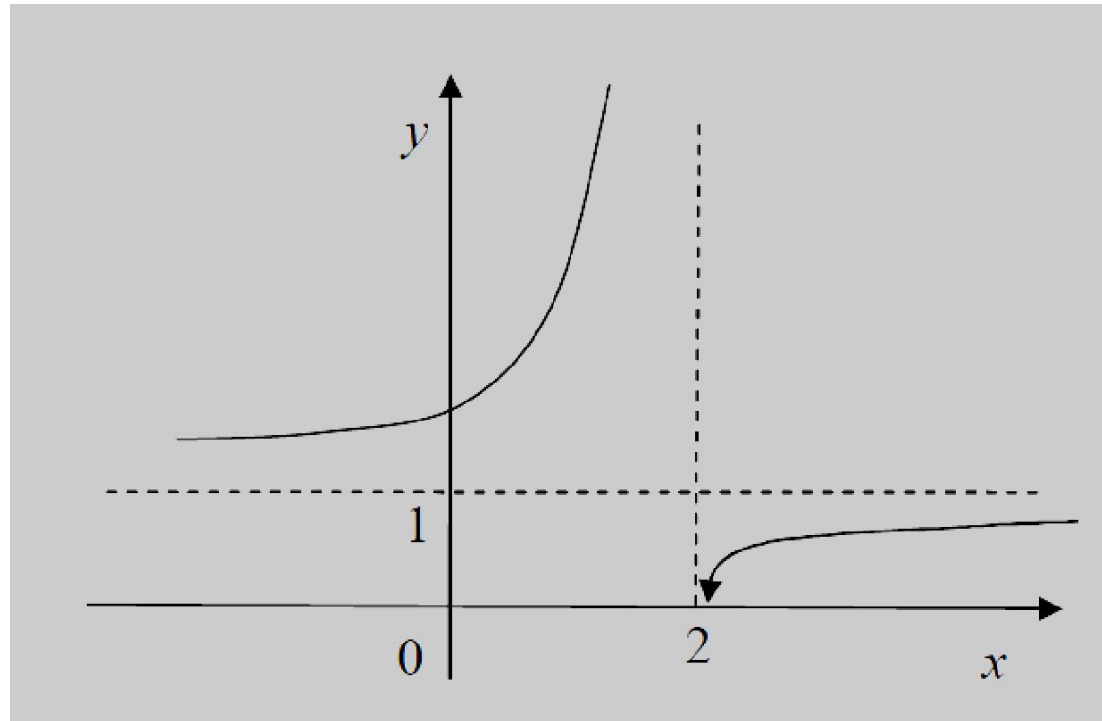
$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 9^{\frac{1}{2-x}} = 0.$$

В точке  $x = 2$  функция имеет бесконечный разрыв, то есть точку разрыва второго рода.

Определим поведение графика при бесконечном удалении от начала координат:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 9^{2-x} = 9^0 = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} 9^{2-x} = 9^0 = 1$$

Следовательно,  $y = 1$  - горизонтальная асимптота.



*Производная функции одной переменной*

Производной функции  $y = f(x)$  по аргументу  $x$  называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последняя стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \left( \text{обозначается также } \frac{dy}{dx} \right)$$

Нахождение производной называется дифференцированием функции.



Таблица производных основных элементарных функций

$$1) \quad (x^m)' = m \cdot x^{m-1};$$

$$2) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$3) \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$4) \quad (x)' = 1;$$

$$5) \quad (c)' = 0, \quad c - const;$$

$$6) \quad (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$7) \quad (e^x)' = e^x;$$

$$8) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$9) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$10) \quad (\sin x)' = \cos x;$$

$$11) \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$12) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$13) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$14) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$15) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$16) \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$17) \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

### *Основные правила дифференцирования*

Пусть  $C$  – постоянная,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  - функции, имеющие производные.

Тогда: 1)  $(Cx)' = Cx'$ ;      2)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;

$$3) (uv)' = u'v + uv'; \quad 4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

5) дифференцирование сложной функции: если  $y = f(u)$ ,  $u = u(x)$ , т.е.  $y = f[u(x)]$ , где функции  $f(u)$  и  $u(x)$  имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

**Примеры.** Найти производные функций:

$$a) \quad y = x^4 - \cos x. \quad y' = 4x^3 + \sin x;$$

$$б) \quad y = \arcsin(4x - 5)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (4x - 5)^2}} \cdot (4x - 5)' = \frac{4}{\sqrt{40x - 16x^2 - 24}};$$

$$в) \quad y = x^5 + \sqrt[4]{x^3} - \frac{\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^4}}{2\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{x^2}.$$

Преобразуем функцию и продифференцируем

$$y = x^5 + x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{5}} + x^{-2} = x^5 + x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{10}} - \frac{3}{2}x^{\frac{11}{20}} + x^{-2}$$

$$y' = 5x^4 + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}x^{-\frac{7}{10}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{20}x^{-\frac{9}{20}} - 2x^{-3} = 5x^4 - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{3}{20\sqrt[10]{x^7}} -$$

$$-\frac{33}{40\sqrt[20]{x^9}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}};$$

### Дифференцирование неявных функций

Уравнение вида  $F(x; y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$ . Продифференцировав по  $x$  обе части уравнения, получим уравнение первой степени относительно  $y'$ . Из этого уравнения легко находится  $y'$ .

**Пример.** Найти производную неявной функции:

$$x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 3$$

Продифференцируем по  $x$  обе части уравнения

$$1 - y' + e^y y' \cdot \operatorname{arctg} x + e^y \frac{1}{1+x^2} = 0;$$

$$y' (e^y \operatorname{arctg} x - 1) = -1 - \frac{e^y}{1+x^2};$$

$$y' (e^y \operatorname{arctg} x - 1) = -\frac{1+x^2 + e^y}{1+x^2};$$

$$y' = -\frac{1+x^2 + e^y}{(1+x^2)(e^y \operatorname{arctg} x - 1)}.$$

## Дифференцирование сложной показательной функции

Функция вида  $y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$  — есть сложная показательная функция.

Сначала логарифмируют функцию, а затем дифференцируют полученное равенство по  $x$ :

$$\ln y = \ln u^v;$$

$$\ln y = v \cdot \ln u;$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u};$$

$$y' = y \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

$$y' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

**Пример.** Найти производную функции:  $y = x^{x^2}$

Решение. Прологарифмируем функцию

$$\ln y = x^2 \ln x$$

Продифференцируем обе части равенства по  $x$ :

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(2x \ln x + x);$$

$$y' = x^{x^2} (2x \ln x + x).$$

## Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция  $y$  от  $x$  задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \text{где } t \text{ — промежуточный аргумент (параметр).}$$

Производные находятся по формулам:

а) первого порядка  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$  или  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ ;

б) второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{\frac{dx}{dt}}$  или  $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ .

**Пример.** Найти производную второго порядка функции

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Найдем производную первого порядка по формуле:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \text{тогда} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{t}{t^2} = -\frac{1}{t}.$$

Найдем производную второго порядка

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t = \frac{1}{t^2}, \quad \text{тогда} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}.$$



*Касательная и нормаль к плоской кривой*

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$  -касательная прямая;

$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$  -нормальная прямая.

**Пример.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой  $y = -x^2 + 4x - 3$ , в точке  $M_0(4; -3)$ , принадлежащей данной кривой.

Решение. Найдем производную функции и ее значение в заданной точке

$$y' = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4; \quad y'(4) = -4$$

Уравнение касательной.

$$y + 3 = -4(x - 4); \quad y = -4x + 13.$$

Уравнение нормали

$$y + 3 = -\frac{1}{4}(x - 4); \quad y = -\frac{1}{4}x - 2.$$