Задания на I семестр для инженерно-технических специальностей, специальностей *ПСЖД, СЖД, СТР, ЭЖД, СОДП.*

Контрольная работа № 1(1-50);

Контрольная работа № 2 (51-100).

Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного или набранную на компьютере в распечатанном виде.

Содержание курса:

1. Аналитическая геометрия на плоскости.
2. Определители второго и третьего порядка. Матрицы. Линейные операции над матрицами. СЛАУ методы их решения (по формулам Крамера, матричный способ, метод Гаусса)
3. Элементы векторной алгебры. Аналитическая геометрия в пространстве.
4. Комплексные числа.
5. Предел и непрерывность функции.
6. Производная функции одной переменной.

Рекомендуемая литература:

1. Пайметов Н.Г., Баженова Т.И. Высшая математика (методическое пособие);
2. Данко П.Е. высшая математика в упражнениях и задачах;
3. Баврин И.И. Высшая математика;
4. Гусак А.А. Высшая математика;
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.

Прямая линия на плоскости

Уравнение вида:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Longrightarrow y = kx + b, \text{ где}$$

$$k = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}$$

$y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом,

$$k = tg\alpha,$$

α –угол образованный прямой с положительным направлением оси Ox,

свободный член равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy

Если прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k, то

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1, y = k_2 x + b_2$, то один из углов образованный пересечением прямых определяется по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

$k_1 = k_2$ – *условие параллельности;*

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – *условие перпендикулярности.*

Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ находим:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Координаты точки С (x, y), делящий отрезок АВ (А$(x_1; y_1)$, В $(x_2; y_2)$) в заданном отношении, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Если $\lambda = 1$, С (x, y)- середина АВ, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Координаты точки пересечения прямых

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}\right)$$

Пример. Даны координаты вершин треугольника : A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)

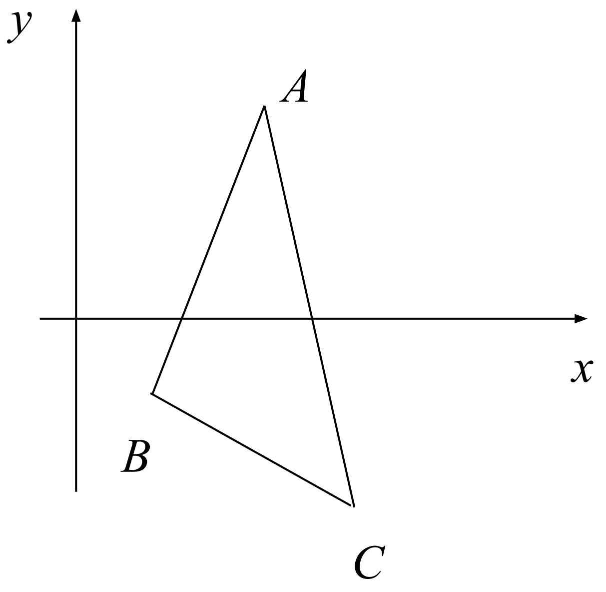
Найти:

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине А;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины В;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины В;
5. длину высоты, проведенной из вершины В;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины В с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.

Найти:

A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине А;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины В;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины В;
5. длину высоты, проведенной из вершины В;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины В с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.



1. $\mathrm{AB} = \sqrt{(2-4)^2+(-2-5)^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}28$ ед. длины

$\mathrm{BC} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$ ед. длины

$\mathrm{AC} = \sqrt{90} \approx 9{,}49$ ед. длины

P=22,16 ед. дл.

2. $\mathrm{AB}: \frac{x-4}{2-4} = \frac{y-5}{-2-5} \Rightarrow 7x-2y-18=0 \Rightarrow y=\frac{7}{2}x-9, k_{AB}=\frac{7}{2}$

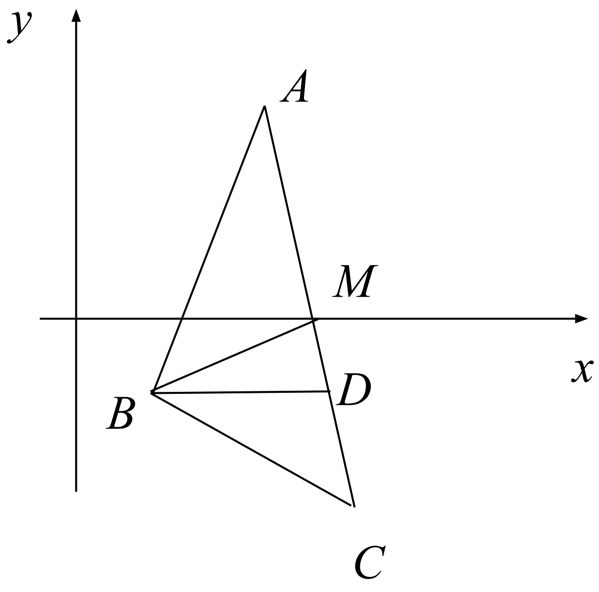
$\mathrm{AC}: \frac{x-4}{7-4} = \frac{y-5}{-4-5} \Rightarrow 3x+y-17=0 \Rightarrow y=-3x+17, k_{AC}=-3$

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = -\frac{13}{19};\ \angle A = 34{,}4°$$

Найти:

A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине А;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины В;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины В;
5. длину высоты, проведенной из вершины В;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины В с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.



3. BD$\perp AC$, $k_{BD} = -\frac{1}{K_{AC}} \Rightarrow k_{BD} = \frac{1}{3}$, уравнение прямой проходящей через точку

с заданным угловым коэффициентом $y + 2 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow x - 3y - 8 = 0$

BD: $x - 3y - 8 = 0$

4. М-середина АС, $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = 5{,}5;\ y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = 0{,}5$

BM: $\frac{x-2}{5{,}5-2} = \frac{y+2}{0{,}5+2} \Rightarrow 5x - 10 = 7y + 14 \Rightarrow 5x - 7y - 24 = 0$

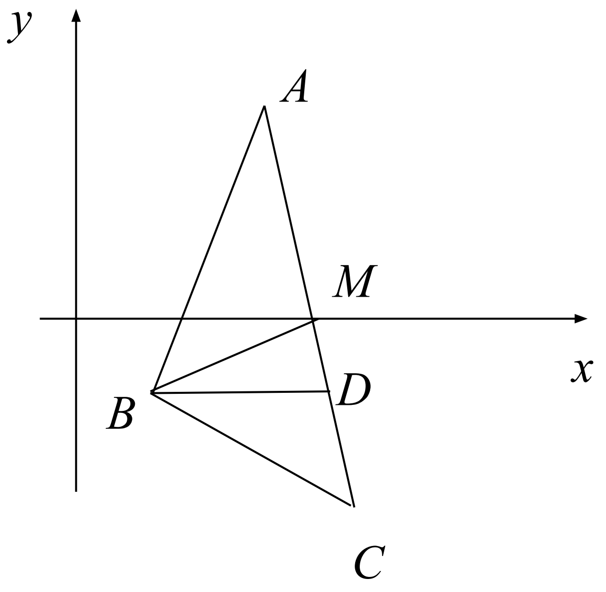
5. $d_{BD} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3\cdot 2+1\cdot(-2)-17|}{\sqrt{10}} \approx 4{,}1$ ед. дл

AC: $3x + y - 17 = 0$

Найти:

A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)

1. периметр треугольника;
2. угол при вершине А;
3. уравнение высоты, проведенной из вершины В;
4. уравнение медианы, проведенной из вершины В;
5. длину высоты, проведенной из вершины В;
6. точку пересечения высоты, проведенной из вершины В с противоположной стороной треугольника;
7. сделать чертеж.



6. BD: $x - 3y - 8 = 0, AC\colon\ 3x + y - 17 = 0$

$$\begin{cases} x - 3y - 8 = 0, \\ 3x + y - 17 = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5{,}9 \\ y = -0{,}7 \end{cases} \Longrightarrow D(5{,}9; -0{,}7)$$

Кривые второго порядка

- $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ –линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат x и y, называются линиями второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола)

Уравнение окружности задается:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ задается:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

- *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$a-$ большая полуось, $b-$ малая полуось, с $-$полуфокусное расстояние, причем a, b, c связаны соотношением:

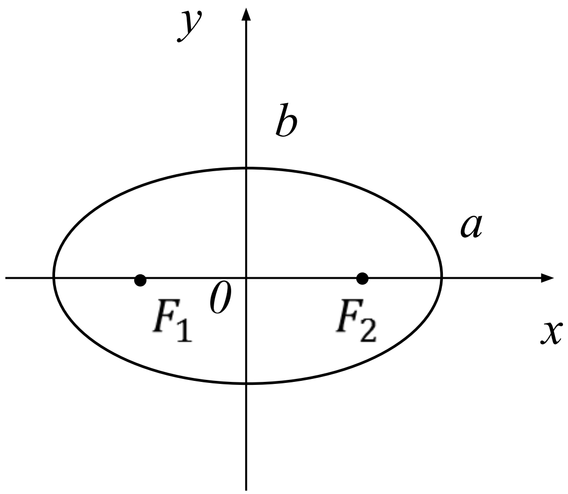
$$a^2=b^2+c^2$$

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $M(x_0; y_0)$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

- Степень сжатия эллипса характеризуется его эксцентриситетом:

$$e = \frac{c}{a} < 1$$



Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a – действительная полуось, b – мнимая полуось, с – полуфокусное расстояние, причем a, b, c связаны соотношением:

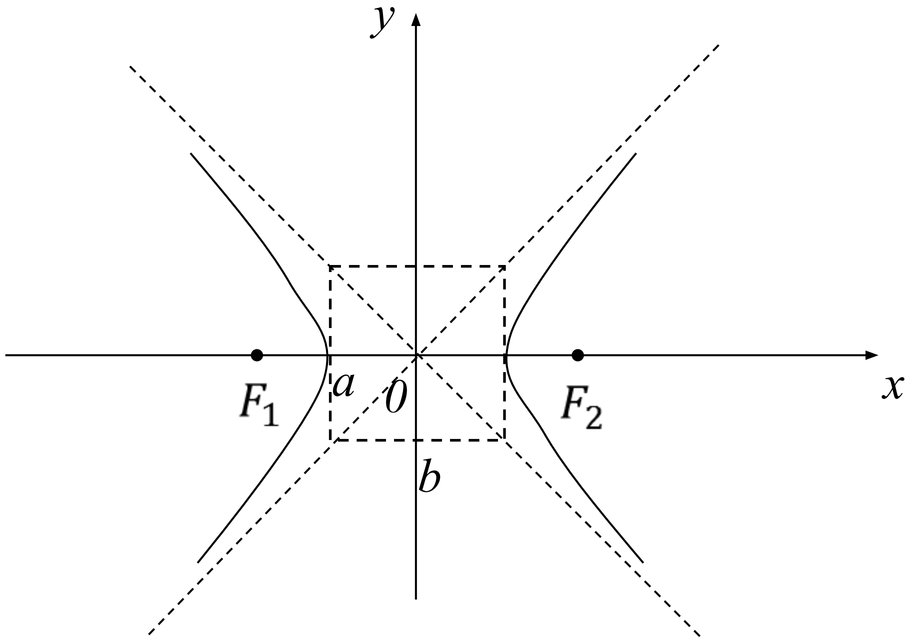
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Сопряженная гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ −асимптоты гиперболы

Уравнение гиперболы с центром в точке $M(x_0; y_0)$: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$



Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом и данной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px,$$

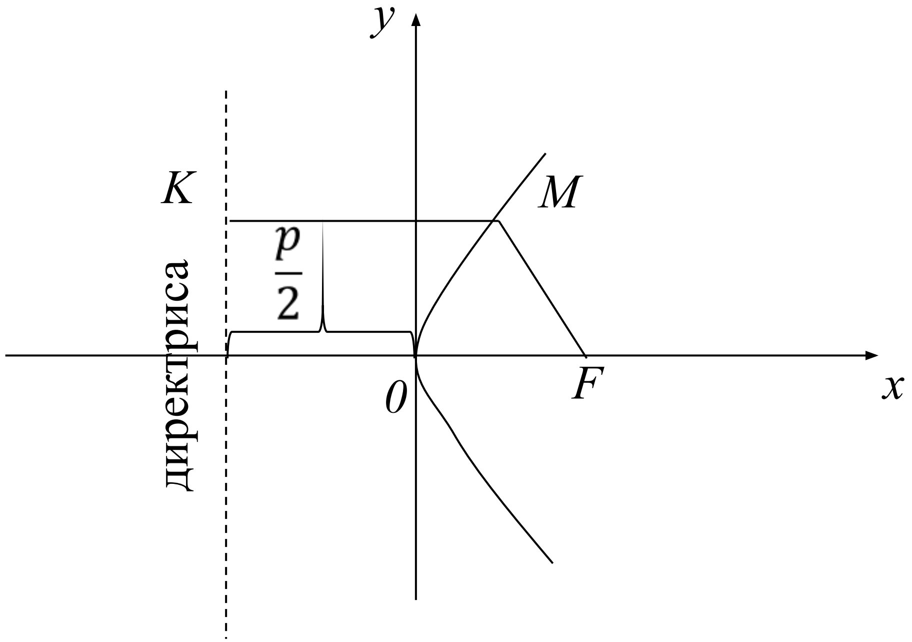
если директрисой является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F(\frac{p}{2}; 0)$,

если парабола расположена симметрично относительно оси Ox ($p > 0$), то уравнение параболы задается:

$$x^2 = 2py$$

Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке А$(x_0; y_0)$:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$$



Уравнение вида:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

определяет либо:

окружность ($A=C$);

эллипс ($A \cdot C > 0$);

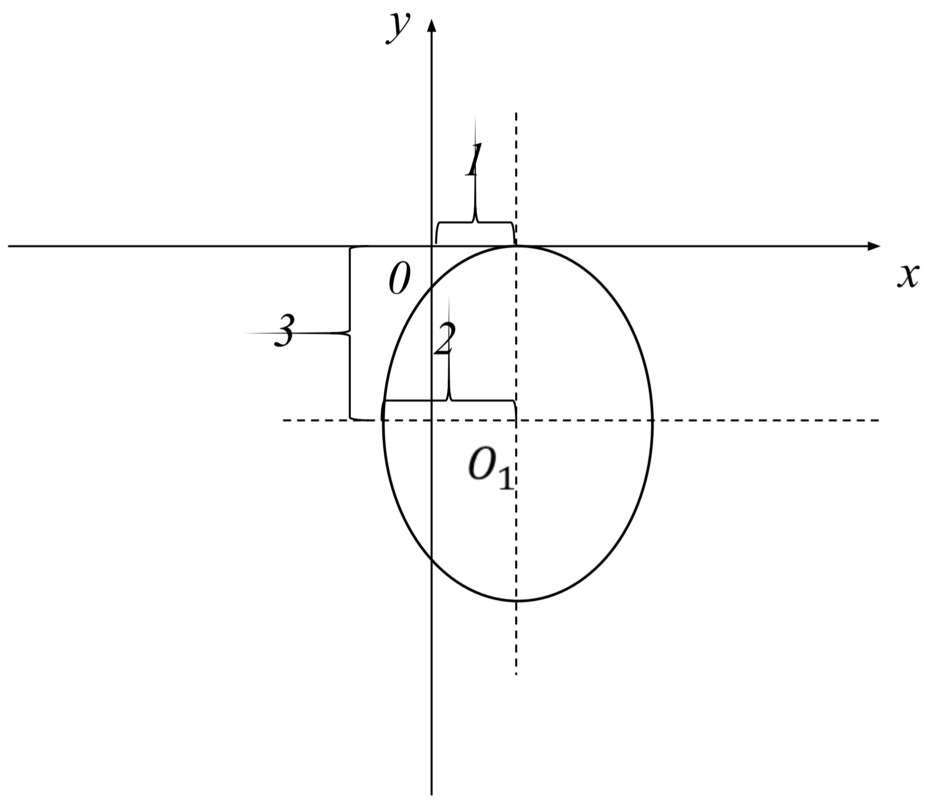
гиперболу ($A \cdot C < 0$);

параболу (A или $C = 0$,)

Пример. Построить кривые второго порядка, приведя её к каноническому виду: $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$

- $(9x^2 - 18x) + (4y^2 + 24y) + 9 = 0,$

$9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 6y + 9 - 9) + 9 = 0,$
$9(x - 1)^2 - 9 + 4(y + 3)^2 - 36 + 9 = 0,$
$9(x - 1)^2 + 4(y + 3)^2 = 36,$
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$



Линейная алгебра.
Определители 2-го и 3-го порядков.

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Обозначение: $\Delta, detA, |A|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Минором элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный путем вычёркивания строки и столбца, содержащий данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор умноженный на $(-1)^{i+j}$

Пример. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{12}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Способы вычисления определителей 3-го порядка:

-

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33};$$

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33};$$

Линейная алгебра.
Матрицы. Линейный операции над матрицами.

- Матрица-прямоугольная таблица чисел, состоящая из m-строк и n-столбцов $(m \times n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначается: А, В,С…

Матрица размерности $(n \times n)$ называется квадратной

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом, аналогично для матрицы-строки.

- Диагональная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице называется единичной матрицей:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

- *Сложение матриц* (только для матриц одинаковой размерности).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц на число.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Умножение матриц. Умножать матрицы А и В можно лишь в случае, если *число столбцов первой матрицы* равно *числу строк второй матрицы*.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

- Система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$ совместна и имеет единственное решение, если определитель из коэффициентов при неизвестных(a_{ij}) отличен от нуля.

Методы решения систем линейных уравнений

По формулам Крамера

- $$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \Delta \neq 0,$$

где Δx_i – дополнительные определители, полученные из определителя Δ путем замены столбцов коэффициентов при x_i столбцом правой части.

Пример. Решить СЛУ по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 1 + 4 - 4 - 2 = 3, \Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3;\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 6;\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \Longrightarrow x_1 = \frac{3}{3} = 1;\ x_2 = \frac{6}{3} = 2;\ x_3 = \frac{-6}{3} = -2$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2$

Средствами матричного исчисления

- Систему уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$ записывают в матричной форме $AX = B,$ где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

До множим слева матричное уравнение на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B,\quad A^{-1}A = E \Longrightarrow X = A^{-1}B$

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$ −обратная матрица. A_{ij} −алгебраическое дополнение матрицы А

Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \quad AX = B, A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Составим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{21} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Вычисляем определить системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -4$, $\Delta \neq 0$, следовательно, матрица А является невырожденной и поэтому имеет обратную матрицу.

Вычисляем алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8;$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0;$ $\quad A_{31} = 4;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2;$ $\quad A_{32} = 2;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 1;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3;$ $\quad A_{33} = -3;$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

-

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\text{X} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 1; x_3 = 1$

Метод Гаусса

Последовательно исключаем неизвестные путем элементарных преобразований, приводя систему к ступенчатому виду.

Если в системе последнее уравнение содержит одно неизвестное, то она имеет единственное решение.

Если в системе последнее уравнение будет содержать более одного неизвестного, то она имеет множество решений.

Если в системе хотя бы одно из уравнений будет вида 0=1, то она будет несовместна, т.е. не иметь решения.

Пример. Решить СЛУ методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{Умножим первую строку на 3} \\ \text{Вторую на 2} \\ \text{сложим первую и третью строки} \end{array} \right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 16 & 1 & 0 & 35 \\ 9 & 3 & 0 & 27 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{Умножим вторую стоку на 3} \\ \text{из третьей строки вычтем вторую} \end{array} \right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 16 & 1 & 0 & 35 \\ 39 & 0 & 0 & 78 \end{array}\right) \Rightarrow |\text{Разделим третью строку на 39}|$$

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 16x_1 + x_2 = 35, \\ x_1 = 2, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 3; x_3 = 5$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = 3; x_3 = 5$

Элементы векторной алгебры. Аналитическая геометрия в пространстве.

- Вектор-направленный отрезок у которого есть начало и конец и обозначается $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ или $\vec{a}$.

Если в OXYZ заданы точки $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Если $a_x = x_2 - x_1;\ a_y = y_2 - y_1; a_z = z_2 - z_1$- проекции вектора на оси координат, то координаты вектора:

$\overrightarrow{AB} = \{a_x; a_y; a_z\}$ или $\overrightarrow{AB} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ $-$разложение вектора по осям координат (ортам), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $-$ орты (единичные векторы) системы координат.

Модуль (длина вектора): $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы, параллельные одной плоскости или лежащие в одной плоскости, называются *компланарными.*

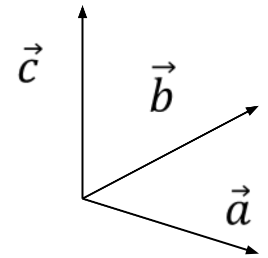
Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{|a|} \cdot \overrightarrow{|b|} \cdot \cos\widehat{\vec{a}\vec{b}} \;\; или \; \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} \;\; или \; \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Угол между векторами, заданными в координатной форме, определяется :

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Векторным произведение двух некомпланарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ ($\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), для которого $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направленный так, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку



Векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Модуль векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} \times \vec{b}$

$$S_n = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равен

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Скалярным произведением вектора $\vec{c}$ на векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется смешанным или скалярно-векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \text{ или } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Смешанное произведение по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

В координатной форме: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, то вектора компаланарны

Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен:

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$$

Плоскость

- $Ax + By + Cz + D = 0$ –уравнение плоскости, причем $\vec{n} = \{A, B, C\}$ –вектор нормали плоскости.

Уравнение плоскости проходящее через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Уравнение плоскости проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Если две плоскости параллельны, то коэффициенты общих уравнений:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Если две плоскости перпендикулярны, то $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Прямая в пространстве

- Прямая в пространстве может быть получена пресечением двух плоскостей, поэтому аналитически задается системой двух уравнений плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ —каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и параллельной вектору

$\vec{S} = \{l; m; n\}$ —направляющий вектор

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ —уравнение прямой,

проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, Угол между прямой $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды ABCD: A(2;1;3), B(-1;0;2), C(1;1;1), D(-2;3;5).
Найти:
1. угол между ребрами AB и AC;
2. площадь грани ABC;
3. уравнение плоскости ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;
6. объем пирамиды.

Решение:

1. $\overrightarrow{AB} = \{-1-2; 0-1; 2-3\} = \{-3; -1; -1\}$; $\overrightarrow{AC} = \{1-2; 1-1; 1-3\} = \{-1; 0; -2\}$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{-3 \cdot (1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (-2)^2}} = 0{,}674$$

$$\varphi = 47{,}6°$$

2. $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-1)^2} \approx 2{,}74$ кв. ед.

Пример. Даны координаты вершин пирамиды ABCD: A(2;1;3), B(-1;0;2), C(1;1;1), D(-2;3;5).
Найти:
1. угол между ребрами AB и AC;
2. площадь грани ABC;
3. уравнение плоскости ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;
6. объем пирамиды.

3. $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, 2(x-2)-5(y-1)-(z-3)=0 \Rightarrow 2x-5y-z+1=0,$
$\varphi =$

4. $\overrightarrow{AD} = \{-4; 2; 2\}$ – координаты направляющего вектора $\vec{S}$, координаты вектора нормали плоскости ABC $\vec{n} = \{2; -5; -1\}$

$$\sin\varphi = \frac{\vec{S}\cdot\vec{n}}{|\vec{S}|\cdot|\vec{n}|} = -0{,}745, \varphi = 53{,}55°$$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды ABCD: A(2;1;3), B(-1;0;2), C(1;1;1), D(-2;3;5).
Найти:
1. угол между ребрами AB и AC;
2. площадь грани ABC;
3. уравнение плоскости ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;
6. объем пирамиды.

5. D(-2;3;5), ABC: $2x - 5y - z + 1 = 0$ $\vec{n} = \{2; -5; -1\}$

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-5}{-1}.$$

6. $\overrightarrow{AB} = \{-3; -1; -1\}$; $\overrightarrow{AC} = \{-1; 0; -2\}$; $\overrightarrow{AD} = \{-4; 2; 2\}$

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\,\frac{2}{3}$$ куб. ед.

Разложение вектора по базисным векторам

Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_m$ - какие-нибудь векторы линейного пространства V.

Согласно аксиомам линейного пространства, вектор

$$\vec{y} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + ... + \alpha_m \vec{x}_m$$ -линейная комбинация векторов

Если все элементы линейной комбинации векторов равны нулю, то такая комбинация называется *тривиальной* и представляет собой нулевой вектор. Если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, то комбинация векторов называется *нетривиальной*.

Система векторов называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов является нулевым вектором, и *линейно зависимой,* если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая является нулевым вектором.

Из приведенных выше определений следует, что вопрос, является ли данная система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_m$ линейно зависимой или линейно независимой, сводится к выяснению того, при каких $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ возможно равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + ... + \alpha_m \vec{x} = 0 \qquad (*)$$

Если это равенство справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, то векторы линейно независимы. Если же существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, и для этих чисел имеет место равенство (*), то векторы линейно зависимы.

Предположим, что в пространстве R^3 заданы три вектора: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Они образуют базис, если

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда любой вектор $\vec{d} = (d_x; d_y; d_z)$ можно выразить через $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Допустим, что в базисе этих векторов вектор имеет координаты $\vec{d} = (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})$. Компоненты α, β, γ находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x = d_x \\ \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y = d_y \\ \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z = d_z \end{cases}.$$

Пример. Даны векторы: $\vec{a}(7;2;1)$, $\vec{b}(4;3;5)$, $\vec{c}(3;4;-2)$, $\vec{d}(2;-5;-13)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Определим, являются ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимыми, т. е. образуют ли они базис.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-129\neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис пространства.

Определим координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе, т. е.

$$\vec{d}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c},$$

где α, β, γ – некоторые числа. Следовательно,

$$(2;-5;-13)=\alpha\,(7;2;1)+\beta\,(4;3;5)+\gamma\,(3;4;-2)$$

$$\alpha\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-13\end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы:

$$\begin{cases}7\alpha+4\beta+3\gamma=2\\2\alpha+3\beta+4\gamma=-5\\\alpha+5\beta-2\gamma=-13\end{cases}.$$

Откуда $\alpha=2;\quad \beta=3;\quad \gamma=0$, т. е. координаты вектора $\vec{d}$ в базисе векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ есть $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}$ или $\vec{d}=(2;\ 3;\ 0)$.

Задания на I семестр для инженерно-технических специальностей, специальностей *ЭКО*

Контрольная работа № 2 (51-100).

Библиотека ► Папка «Студентам» ►Папка «Красноперова» ► .pdf

Контрольные работы №1-6.

Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного или набранную на компьютере в распечатанном виде.

Содержание курса:

1. Комплексные числа.

2. Предел и непрерывность функции.

3. Производная функции одной переменной.

Рекомендуемая литература:

1. Пайметов Н.Г., Баженова Т.И. Высшая математика (методическое пособие);

Комплексные числа

Комплексным числом Z называется упорядоченная пара $(a; b)$ чисел, первое из которых называется действительной частью, а второе – мнимой частью. Обозначается $Z = a + bi$ или $x + yi$, где $a-$ действительная часть, $bi-$ мнимая часть комплексного числа. $i-$ мнимая единица, определяемая равенством $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называется алгебраической формой.

$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$-тригонометрическая форма записи комплексного числа

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$

Основные действия над комплексными числами

1. Сложение комплексных чисел

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\ .$$

2. Умножение комплексных чисел

$$i^2=-1;\quad i^3=i^2\cdot i=-i;$$

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_2b_1i+a_1b_2i+b_1b_2i^2=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)i$$

Умножение сопряженных чисел

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

3. Деление комплексных чисел.

Необходимо числитель и знаменатель домножить на сопряженное знаменателю выражение

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a^2+b^2}=a+bi.$$

4. Возведение комплексных чисел в степень.

Удобно действие возведения в степень производить с комплексным числом в тригонометрической форме записи

$$(a+bi)^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = a_1 + b_1 i.$$

5. Извлечение корня.

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Примеры.

а). Выполнить действия в алгебраической форме

$$\left(\frac{1-i}{2+i}\right)^2+(1+i)^2-\frac{1}{i^3}=\left(\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2+1+2i+i^2+\frac{1}{i}=$$

$$=\left(\frac{2-3i+i^2}{4-i^2}\right)^2+2i+\frac{i}{i^2}=\left(\frac{1-3i}{5}\right)^2+2i-i=\frac{1-6i-9}{25}+i=-\frac{8}{25}+\frac{19}{25}i.$$

б). Найти все корни уравнения $\omega^3 + z = 0$, если $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

Решение: Проведем преобразование уравнения

$$\omega^3 - 2 + 2\sqrt{3}\,i = 0 \;\Rightarrow\; \omega^3 = 2 - 2\sqrt{3}\,i \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}\,i}.$$

Используя формулу представим комплексное число $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме. Для этого найдем модуль и аргумент комплексного числа, где $a = 2$, $b = -2\sqrt{3}$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = 4;$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \quad \varphi = \frac{5}{3}\pi$$

$z_1 = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа

Для нахождения корней уравнения используем формулу

$$\omega = \sqrt[3]{4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \quad \omega_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5}{9}\pi + i\sin\frac{5}{9}\pi\right) = -0{,}27 + 1{,}56i;$$

$$k = 1 \quad \omega_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{11}{9}\pi + i\sin\frac{11}{9}\pi\right) = -1{,}22 - 1{,}02i;$$

$$k = 2 \quad \omega_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{17}{9}\pi + i\sin\frac{17}{9}\pi\right) = 1{,}49 - 0{,}54i.$$

Пределы и непрерывность функции

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x > a$, если для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$.

Если $x < a$ и $x \to a$, то употребляется запись $x \to a - 0$; если $x > a$ и $x \to a$ - запись $x \to a + 0$. Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ называются соответственно *левосторонним и правосторонним пределами* функции.

Практическое вычисление пределов основано на следующих теоремах.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют, то

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$);

$\lim\limits_{x\to a} c=c$, где $c-const$.

Используются также следующие пределы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*первый замечательный предел*);

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e\approx 2{,}71828\ldots$ (*второй замечательный предел*).

Если $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ две бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ называются эквивалентными и обозначается $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x);\ \ tg\alpha(x) \sim \alpha(x);\ \ \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);\ \ arctg\alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\ln(1+x) \sim x.$$

Некоторые часто встречающие пределы функций: ($c > 0$ – постоянная)

1) $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{c}{x} = -\infty;$ 2) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{c}{x} = \infty;$ 3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{c}{x} = 0;$

4) $0 < c < 1$ то $\lim\limits_{x\to -\infty} c^x = \infty,$ $\lim\limits_{x\to +\infty} c^x = 0;$

5) $c > 0$ то $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0,$ $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = \infty.$

Примеры.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$/числитель и знаменатель разложим на множители /

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x}=\frac{4}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-7x+4}{x^3+4x^2+5x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$/разделим числитель и знаменатель на неизвестную в старшей степени числителя, т.е. на "x^3"/ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=9;$

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ /домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю/$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(5-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{\left(3-\sqrt{2x-1}\right)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{9-(2x-1)}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{2(5-x)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{2}=3.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x\cdot tg5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ /сведем функцию к использованию первого замечательного предела/ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin x\cdot\cos 5x\cdot 5x}{x\cdot\sin 5x\cdot 5x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{5}=1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5};$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(x+1)}{4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$/используем эквивалентные бесконечно малые величины $ln(x+1)\sim x$ при $x\to 0$/ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-1}\right)^{3x}=\left[1^{\infty}\right]=$ /сведем ко второму замечательному пределу/ =

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1-3}{x-1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-1}-\frac{3}{x-1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x-1}{3}}\right)^{-\frac{x-1}{3}}\right]^{-\frac{3\cdot 3x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{9x}{x-1}}=e^{-9}.$$

Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = a$ тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, равные друг другу и значению функции в точке a:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

Точка a, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции. Они подразделяются на точки разрыва I рода и II рода.

Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* (когда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* (когда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Примеры.

а) Исследовать функцию $y=\begin{cases}-x & x<0\\ arctg\,x & 0\le x<\dfrac{\pi}{4}\\ 2 & x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ на непрерывность и сделать схематический чертеж.

Исследуем исходную функцию на непрерывность в указанных точках.

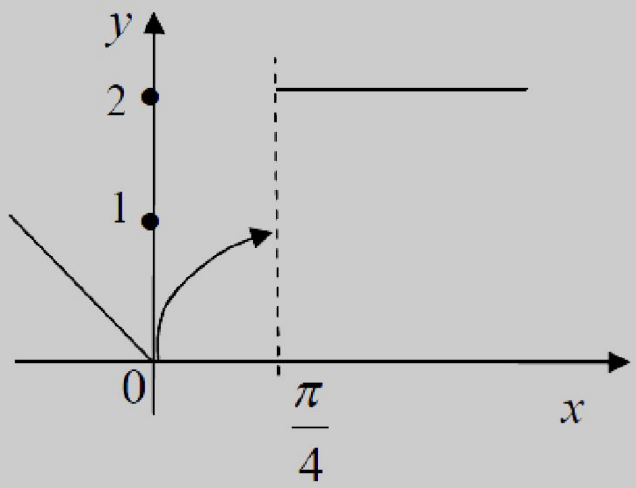
$x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}(-x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0+0} arctg\,x=0$. Функция определена в окрестности точки $x=0$, пределы слева и справа существуют и равны друг другу и равны значению функции в точке, т. е.: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$. Следовательно, функция в точке $x=0$ непрерывна.

$x=\dfrac{\pi}{4}$: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}-0} arctg\,x=1$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0} 2=2$. Пределы в окрестности точки существуют, но не равны друг другу, т.е. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}-0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0} f(x)$.

Примеры.

а) Исследовать функцию $y = \begin{cases} -x & x < 0 \\ arctg\, x & 0 \le x < \dfrac{\pi}{4} \\ 2 & x \ge \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ на непрерывность и сделать схематический чертеж.

График функции:



б) Исследовать функцию $y = 9^{\frac{1}{2-x}}$ на непрерывность и построить график.

Решение: Данная функция определена при всех значениях x, кроме точки $x = 2$, которая является точкой разрыва.

Исследуем характер разрыва. Найдем односторонние пределы.

Левосторонний предел: при $x < 2$ предел степени $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{1}{2-x} = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{x \to 2-0} 9^{\frac{1}{2-x}} = \infty$.

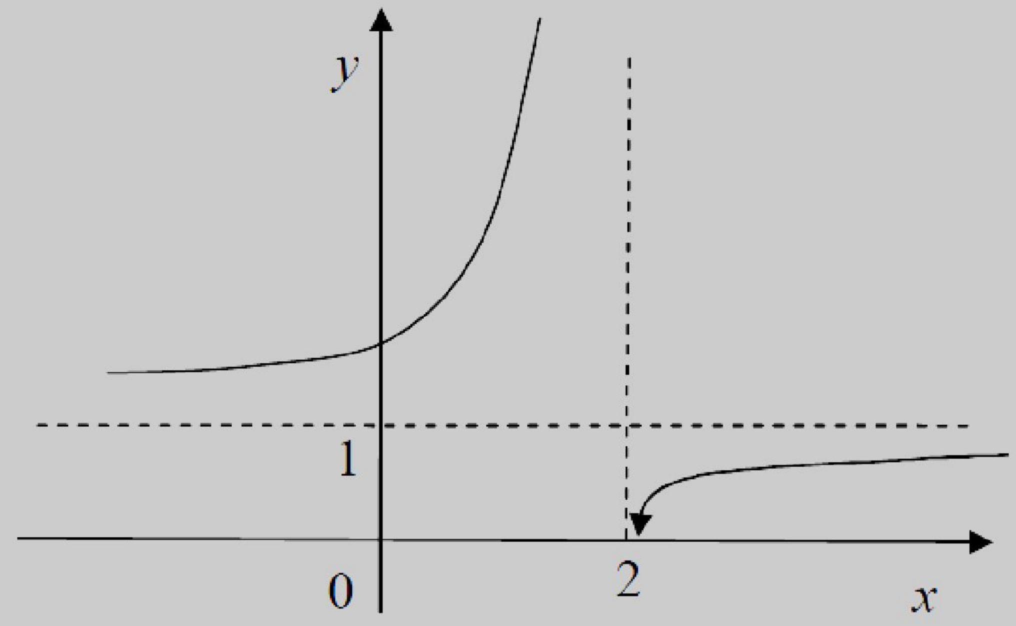
Правосторонний предел: при $x > 2$ знаменатель показателя степени $2 - x < 0$, предел степени $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1}{2-x} = -\infty$, следовательно,

$$\lim_{x \to 2+0} 9^{\frac{1}{2-x}} = 0.$$

В точке $x = 2$ функция имеет бесконечный разрыв, то есть точку разрыва второго рода.

Определим поведение графика при бесконечном удалении от начала координат: $\lim\limits_{x \to -\infty} 9^{\frac{1}{2-x}} = 9^0 = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 9^{\frac{1}{2-x}} = 9^0 = 1$

Следовательно, $y = 1$ - горизонтальная асимптота.



Производная функции одной переменной

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последняя стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{(обозначается также } \frac{dy}{dx}\text{)}$$

Нахождение производной называется дифференцированием функции.

Таблица производных основных элементарных функций

1) $\left(x^{m}\right)' = m \cdot x^{m-1};$

2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

3) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^{2}};$

4) $(x)' = 1;$

5) $(c)' = 0, \quad c - const;$

6) $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a;$

7) $\left(e^{x}\right)' = e^{x};$

8) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

9) $(\log_{a} x)' = \frac{1}{x \ln a};$

10) $(\sin x)' = \cos x;$

11) $(\cos x)' = -\sin x;$

12) $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^{2} x};$

13) $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^{2} x};$

14) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};$

15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};$

16) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^{2}};$

17) $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$

Основные правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ - функции, имеющие производные. Тогда: 1) $(Cx)' = Cx'$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(uv)' = u'v + uv'$; 4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

5) дифференцирование сложной функции: если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

Примеры. Найти производные функций:

а) $y = x^4 - \cos x.$ $y' = 4x^3 + \sin x;$

б) $y = \arcsin(4x - 5)$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(4x-5)^2}} \cdot (4x-5)' = \frac{4}{\sqrt{40x - 16x^2 - 24}};$$

в) $y = x^5 + \sqrt[4]{x^3} - \dfrac{\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^4}}{2\sqrt[5]{x}} + \dfrac{1}{x^2}.$

Преобразуем функцию и продифференцируем

$$y = x^5 + x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{5}} + x^{-2} = x^5 + x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{10}} - \frac{3}{2}x^{\frac{11}{20}} + x^{-2}$$

$$y' = 5x^4 + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}x^{-\frac{7}{10}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{11}{20}x^{-\frac{9}{20}} - 2x^{-3} = 5x^4 - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{3}{20\sqrt[10]{x^7}} -$$

$$-\frac{33}{40\sqrt[20]{x^9}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}};$$

Дифференцирование неявных функций

Уравнение вида $F(x;y)=0$ определяет y как неявную функцию от x. Продифференцировав по x обе части уравнения, получим уравнение первой степени относительно y'. Из этого уравнения легко находится y'.

Пример. Найти производную неявной функции:

$$x-y+e^{y}\,arctg\,x=3$$

Продифференцируем по x обе части уравнения

$$1-y'+e^{y}y'\cdot arctg\,x+e^{y}\,\frac{1}{1+x^{2}}=0;$$

$$y'\left(e^{y}arctg\,x-1\right)=-1-\frac{e^{y}}{1+x^{2}};$$

$$y'\left(e^{y}arctg\,x-1\right)=-\frac{1+x^{2}+e^{y}}{1+x^{2}};$$

$$y'=-\frac{1+x^{2}+e^{y}}{\left(1+x^{2}\right)\left(e^{y}arctg\,x-1\right)}.$$

Дифференцирование сложной показательной функции

Функция вида $y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$ – есть сложная показательная функция. Сначала логарифмируют функцию, а затем дифференцируют полученное равенство по x:

$$\ln y = \ln u^v;$$

$$\ln y = v \cdot \ln u;$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u};$$

$$y' = y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$$

$$y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Пример. Найти производную функции: $y = x^{x^2}$

Решение. Прологарифмируем функцию

$$\ln y = x^2 \ln x$$

Продифференцируем обе части равенства по x :

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = y(2x \ln x + x);$$

$$y' = x^{x^2} (2x \ln x + x).$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$ где t – промежуточный аргумент (параметр).

Производные находятся по формулам:

а) первого порядка $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$ или $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$;

б) второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{\dfrac{dx}{dt}}$ или $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Пример. Найти производную второго порядка функции

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Найдем производную первого порядка по формуле: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \text{ тогда } \frac{dy}{dx} = -\frac{t}{t^2} = -\frac{1}{t}.$$

Найдем производную второго порядка

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t = \frac{1}{t^2}, \text{ тогда } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}.$$

Касательная и нормаль к плоской кривой

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ -касательная прямая;

$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ -нормальная прямая.

Пример. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 + 4x - 3$, в точке $M_0(4;-3)$, принадлежащей данной кривой.

Решение. Найдем производную функции и ее значение в заданной точке

$y' = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4; \qquad y'(4) = -4$

Уравнение касательной.

$y + 3 = -4(x - 4); \qquad y = -4x + 13.$

Уравнение нормали

$y + 3 = -\frac{1}{4}(x - 4); \qquad y = -\frac{1}{4}x - 2.$