

Преобразование выражений, содержащих модуль

Цель: научиться упрощать
выражения, содержащие модуль

Понятие модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля.

Модулем числа **a** называется расстояние
(в единичных отрезках)
от **0** до точки, изображающей число **a**.



$$|5| = 5;$$

$$|-5| = -(-5) = 5$$

1.1. Определение модуля. Решение по определению.

По определению, модуль, или абсолютная величина, неотрицательного числа a совпадает с самим числом, а модуль отрицательного числа равен противоположному числу, то есть $-a$:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Запишем решение простейших уравнений в общем виде:

$$|x| = b \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm b, & b > 0 \\ x = 0, & b = 0 \\ \emptyset, & b < 0 \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $|x - 3| = 3 - 2x$.

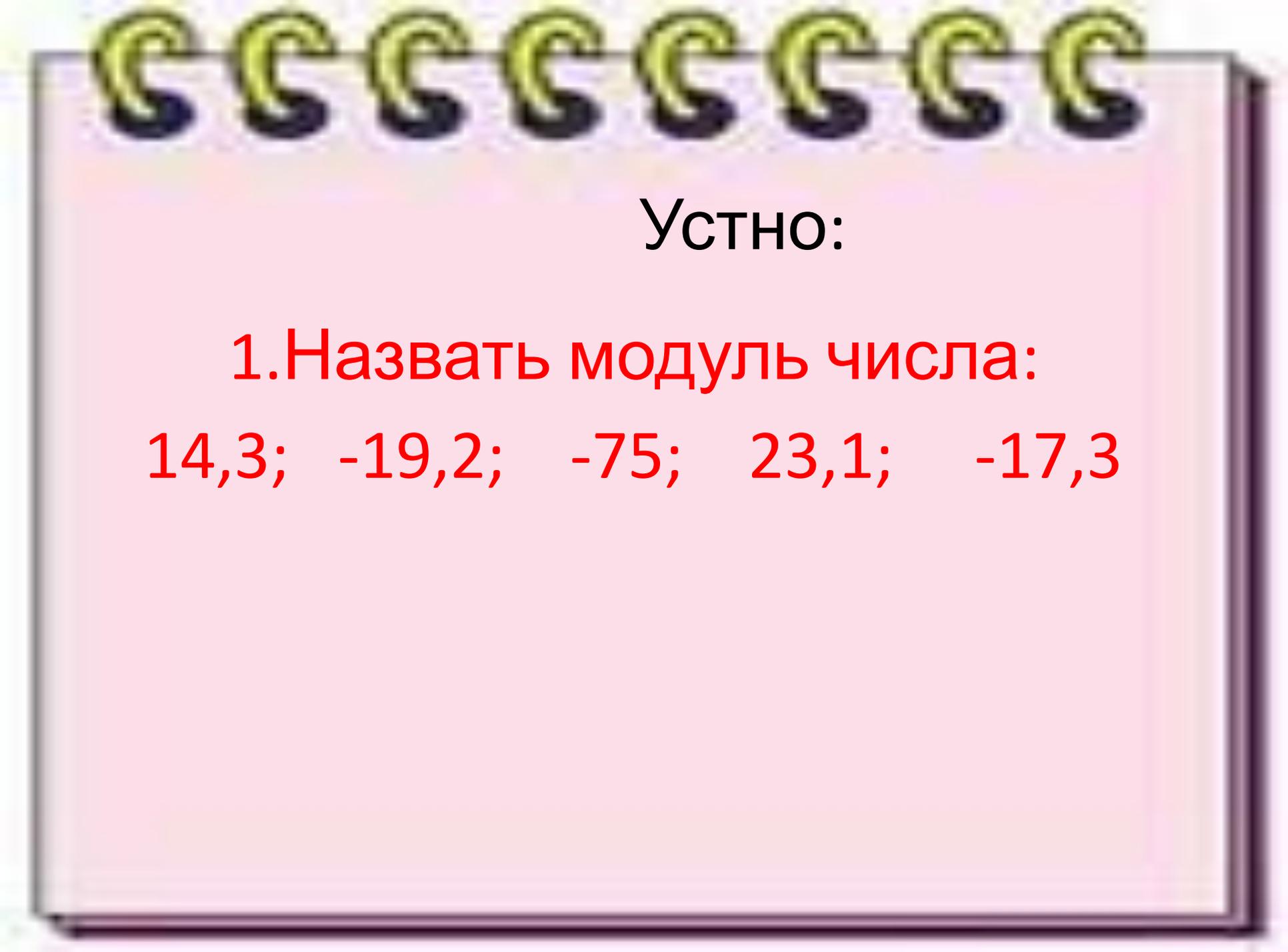
Рассматриваем два случая.

При $x - 3 > 0$ уравнение принимает вид $x - 3 = 3 - 2x$, откуда $x = 2$. Но это значение не удовлетворяет неравенству $x - 3 > 0$, потому не входит в ответ исходного уравнения.

При $x - 3 < 0$ получаем $3 - x = 3 - 2x$ и $x = 0$. Этот корень удовлетворяет соответствующему условию $x - 3 < 0$.

Итак, ответ к исходному уравнению: $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

A graphic of a spiral-bound notebook with a pinkish-purple cover and a white page. The spiral binding is at the top, with yellow and blue rings. The page contains text in black and red.

Устно:

1. Назвать модуль числа:

14,3; -19,2; -75; 23,1; -17,3

3. Упростить выражение $\frac{a^2-4}{|a|+2}$.

3. Упростить выражение $\frac{a^2-4}{|a|+2}$.

Решение. Дробь определена для любых значений a .

Точка 0 — нуль подмодульного выражения.

При $a \geq 0$: $\frac{a^2-4}{|a|+2} = \frac{a^2-4}{a+2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a+2} = a-2.$

При $a < 0$: $\frac{a^2-4}{|a|+2} = \frac{a^2-4}{-a+2} = \frac{(a-2)(a+2)}{-a+2} = -\frac{(-a+2)(a+2)}{-a+2} = -(a+2) = -a-2.$

4. Упростите выражение $\frac{|x+3|}{x^2-9}$.

4. Упростите выражение $\frac{|x+3|}{x^2-9}$.

Решение. Дробь определена для любых значений, кроме 3 и -3.

Точка -3 — нуль подмодульного выражения.

При $x > -3$:

$$\frac{|x+3|}{x^2-9} = \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x-3}$$

При $x < -3$:

$$\frac{|x+3|}{x^2-9} = \frac{-(x+3)}{x^2-9} = \frac{-(x+3)}{(x-3)(x+3)} = -\frac{1}{x-3}$$

5. Упростите выражение $\frac{|x^2 - 25|}{x + 5}$.

5. Упростите выражение $\frac{|x^2-25|}{x+5}$.

Решение. Дробь определена для любых значений, кроме -5 .

Точки 5 и -5 - нули подмодульного выражения.

Они делят числовую ось на промежутки.

При $x < -5$:

$$\frac{|x^2-25|}{x+5} = \frac{x^2-25}{x+5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x+5} = x-5.$$

При $-5 < x \leq 5$:

$$\frac{|x^2-25|}{x+5} = \frac{-(x^2-25)}{x+5} = \frac{-(x-5)(x+5)}{x+5} = -(x-5).$$

При $x > 5$:

$$\frac{|x^2-25|}{x+5} = \frac{x^2-25}{x+5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x+5} = x-5.$$

6. Упростите выражение $\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|}$.

6. Упростите выражение $\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|}$.

Решение. Дробь определена для любых значений, кроме 1.

Точки 0 и 1 - нули подмодульных выражений.

Они делят числовую ось на промежутки.

При $x < 0$:

$$\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|} = \frac{-(-x(x-1))}{x^2-x+1+x} = \frac{x(x-1)}{x^2+1}$$

При $0 \leq x < 1$:

$$\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|} = \frac{-x(x-1)}{x^2-x+1-x} = \frac{x(x-1)}{x^2-2x+1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1} = \frac{x}{1-x}$$

$x > 1$:

$$\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|} = \frac{x(x-1)}{x^2-x+1-x} = \frac{x(x-1)}{x^2-2x+1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1}$$

7. Упростите выражение $\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$.

7. Упростите выражение $\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$.

Решение. Дробь определена для любых значений, кроме -2 и 0 и 3.

Точки 0 и 3 – нули подмодульных выражений.

Они делят числовую ось на промежутки.

При $m < 0$:

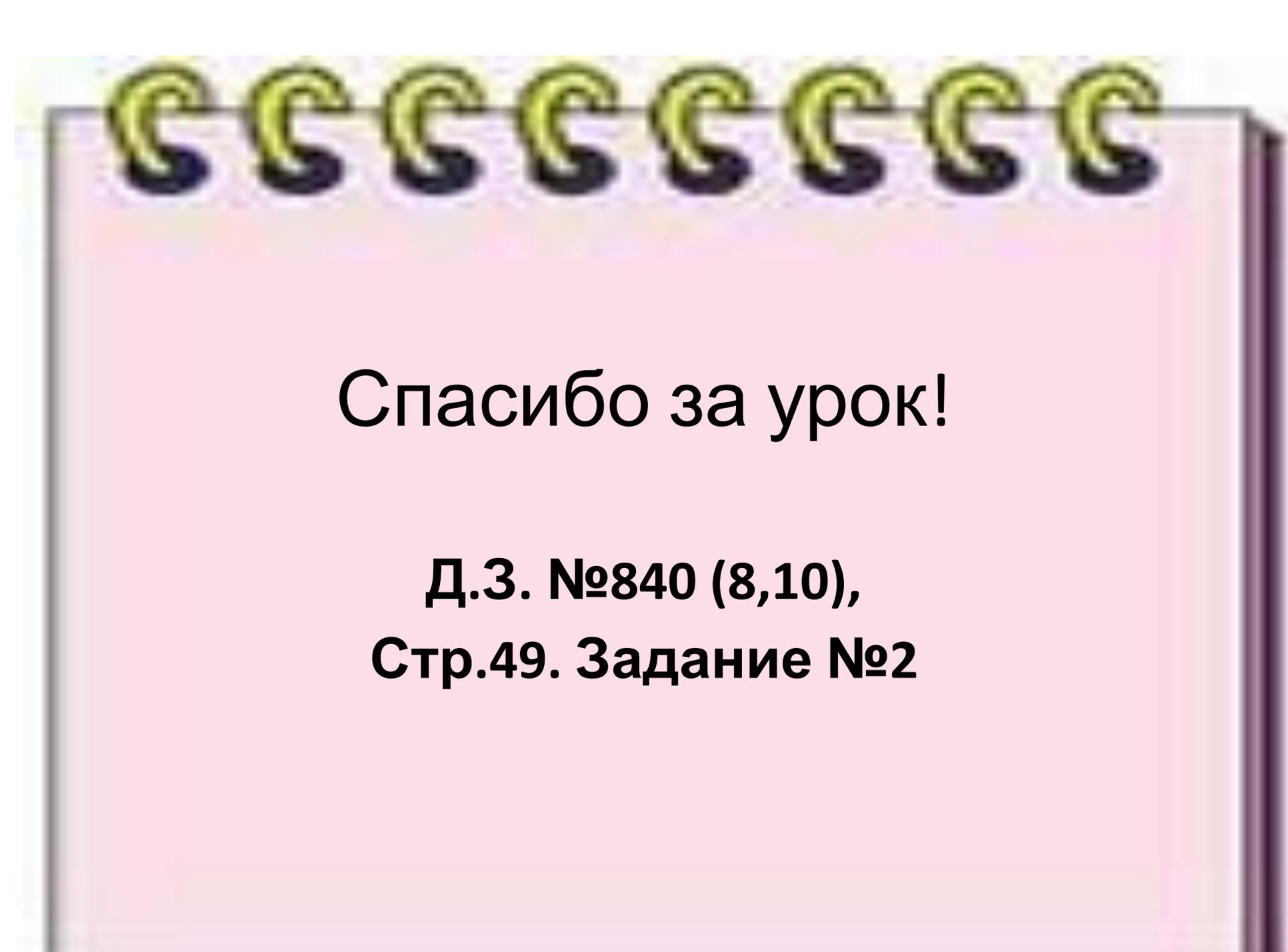
$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{-m(m-3)}{-(m^2-m-6)m} = \frac{m-3}{(m^2-m-6)}$$

При $0 < m < 3$:

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{-m(m-3)}{(m^2-m-6)m} = \frac{-(m-3)}{(m^2-m-6)} = \frac{3-m}{(m^2-m-6)}$$

При $m > 3$:

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{m(m-3)}{(m^2-m-6)m} = \frac{m-3}{(m^2-m-6)}$$



Спасибо за урок!

**Д.3. №840 (8,10),
Стр.49. Задание №2**