Преобразование выражений, содержащих модуль

Цель: научиться упрощать выражения, содержащие модуль

Понятие модуля

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0; \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля.

Модулем числа **а** называется расстояние (в единичных отрезках) от **0** до точки, изображающей число **а.**

|5| = 5 ;

|-5| = -(-5) = 5

1.1.Определение модуля. Решение по определению.

По определению, модуль, или абсолютная величина, неотрицательного числа *a* совпадает с самим числом, а модуль отрицательного числа равен противоположному числу, то есть – *a*:

$$|a| = \begin{cases} a, & если\ a \geq 0, \\ -a, & если\ a < 0 \end{cases}$$

Запишем решение простейших уравнений в общем виде:

$$|x| = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm b, & b > 0 \\ x = 0, & b = 0 \\ \varnothing, & b < 0 \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $|x - 3| = 3 - 2x$.

Рассматриваем два случая.

При $x - 3 > 0$ уравнение принимает вид $x - 3 = 3 - 2x$, откуда $x = 2$. Но это значение не удовлетворяет неравенству $x - 3 > 0$, потому не входит в ответ исходного уравнения.

При $x - 3 < 0$ получаем $3 - x = 3 - 2x$ и $x = 0$. Этот корень удовлетворяет соответствующему условию $x - 3 < 0$.

Итак, ответ к исходному уравнению: $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Устно:

1.Назвать модуль числа:

14,3; -19,2; -75; 23,1; -17,3

3. Упростить выражение $\frac{a^2-4}{|a|+2}$.

3. Упростить выражение $\frac{a^2-4}{|a|+2}$.

Решение. Дробь определена для любых значений а.

Точка 0 –нуль подмодульного выражения.

При $a \geq 0$: $\frac{a^2-4}{|a|+2} = \frac{a^2-4}{a+2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a+2} = a-2.$

При $a < 0$: $\frac{a^2-4}{|a|+2} = \frac{a^2-4}{-a+2} = \frac{(a-2)(a+2)}{-a+2} = -\frac{(-a+2)(a+2)}{-a+2} = -(a+2) = -a-2.$

4. Упростите выражение $\frac{|x+3|}{x^2-9}$.

4. Упростите выражение $\frac{|x+3|}{x^2-9}$.

Решение. Дробь определена для любых значений, кроме 3 и -3.

Точка -3 –нуль подмодульного выражения.

При x>-3:

$$\frac{|x+3|}{x^2-9}=\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x-3}.$$

При x< -3:

$$\frac{|x+3|}{x^2-9}=\frac{-(x+3)}{x^2-9}=\frac{-(x+3)}{(x-3)(x+3)}=-\frac{1}{x-3}.$$

5. Упростите выражение $\frac{|x^2-25|}{x+5}$.

5.Упростите выражение $\frac{|x^2-25|}{x+5}$.

Решение. Дробь определении для любых значений, кроме -5.

Точки 5 и -5- нули подмодульного выражения.

Они делят числовую ось на промежутки.

При x<-5: $\frac{|x^2-25|}{x+5}=\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}=x-5.$

При -5<x≤5: $\frac{|x^2-25|}{x+5}=\frac{-(x^2-25)}{x+5}=\frac{-(x-5)(x+5)}{x+5}=-(x-5).$

При x>5: $\frac{|x^2-25|}{x+5}=\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}=x-5.$

6. Упростите выражение $\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|}$.

6. Упростите выражение $\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|}$.

Решение. Дробь определена для любых значений, кроме 1.

Точки 0 и 1 - нули подмодульных выражений.

Они делят числовую ось на промежутки.

При x<0: $\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|}=\frac{-(-x(x-1)}{x^2-x+1+x}=\frac{x(x-1)}{x^2+1}$;

При 0≤x<1: $\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|}=\frac{-x(x-1)}{x^2-x+1-x}=-\frac{x(x-1)}{x^2-2x+1}=-\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}=-\frac{x}{x-1}=\frac{x}{1-x}$.

x>1: $\frac{|x||x-1|}{x^2-x+1-|x|}=\frac{x(x-1)}{x^2-x+1-x}=\frac{x(x-1)}{x^2-2x+1}=\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x}{x-1}$.

7. Упростите выражение $\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$.

7. Упростите выражение $\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$.

Решение. Дробь определена для любых значений, кроме - 2 и 0 и 3.

Точки 0 и 3 – нули подмодульных выражений.

Они делят числовую ось на промежутки.

При m<0:

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}=\frac{-m(m-3)}{-(m^2-m-6)m}=\frac{m-3}{(m^2-m-6)}.$$

При 0<m<3:

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}=\frac{-m(m-3)}{(m^2-m-6)m}=\frac{-(m-3)}{(m^2-m-6)}=\frac{3-m}{(m^2-m-6)}.$$

При m>3:

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}=\frac{m(m-3)}{(m^2-m-6)m}=\frac{m-3}{(m^2-m-6)}.$$

Спасибо за урок!

Д.З. №840 (8,10),

Стр.49. Задание №2