Логические основы компьютеров

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно (0) или ложно (1).

Алгебра логики (булева алгебра) — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразуют логические высказывания.

Логическое выражение — это символическая запись высказывания, которая может содержать логические переменные и знаки логических операций.

Логическая функция — это правило преобразования входных логических значений в выходные. Логическая функция задаётся таблицей истинности.

функция

Выражения:

A

A+A·B

A·

(A+B)

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

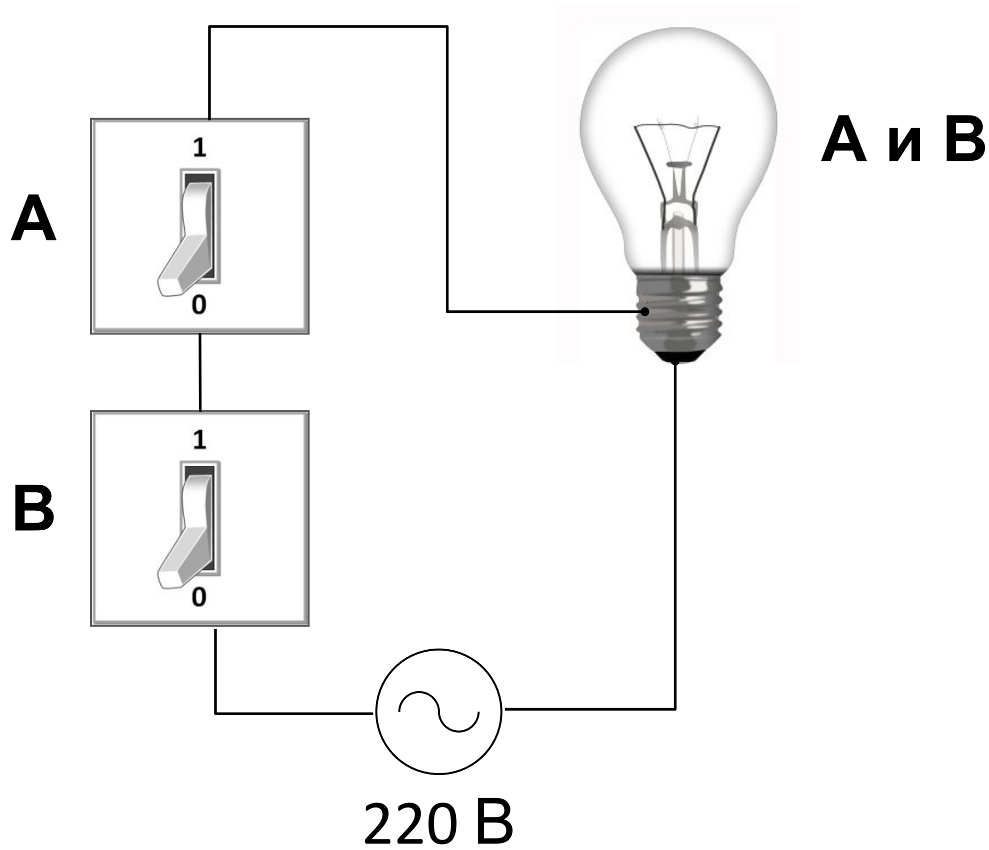
также $\overline{A}$, $\neg A$, **not A**

таблица истинности операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И

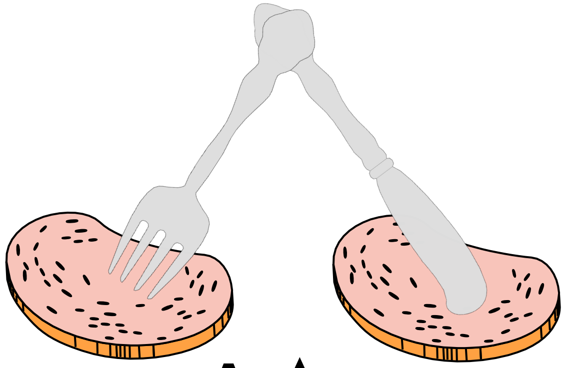
Высказывание «**А и В**» истинно тогда и только тогда, когда **А** и **В** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также: **A·B**, **A ∧ B**, **A and B** , **A & B**

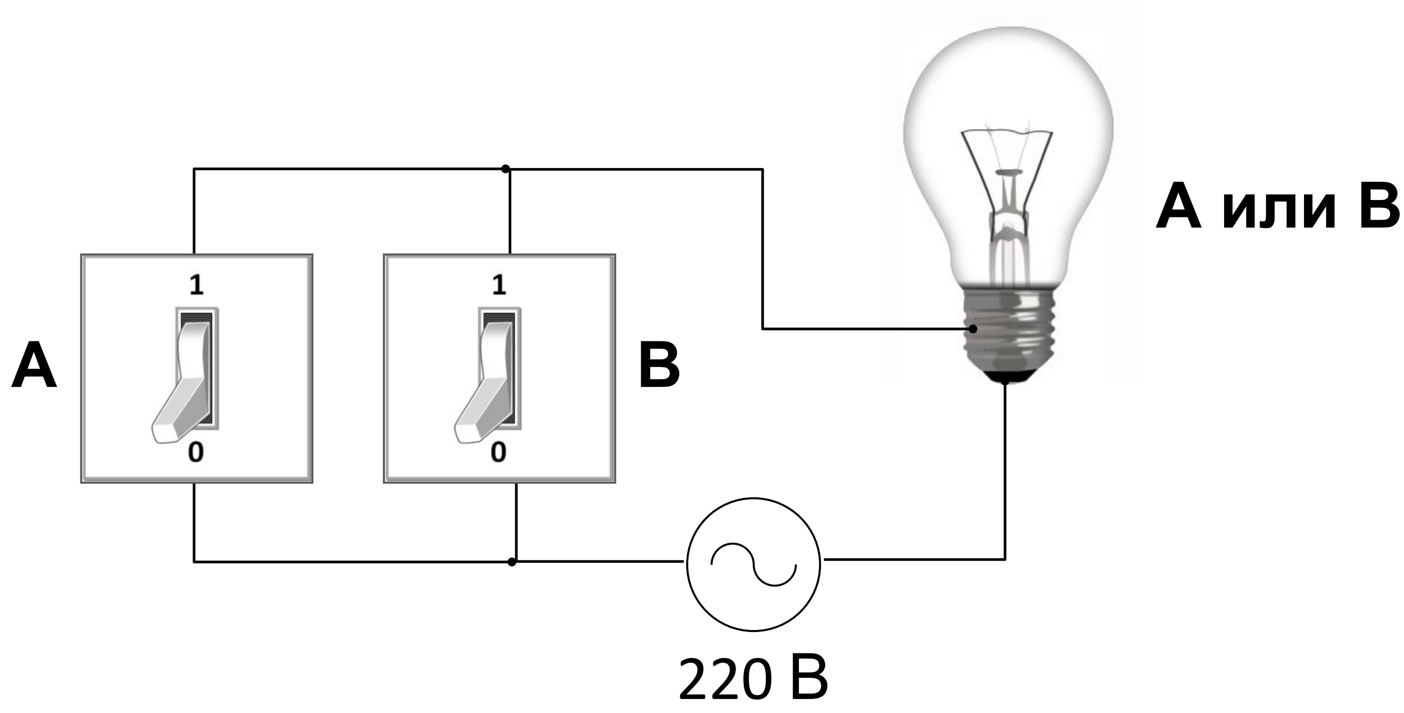


A ∧ B

конъюнкция – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**А или В**» истинно тогда, когда истинно **А** или **В**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

также: **A+B**, **A ∨ B**, **A or B**,

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

Импликация («если …, то …»)

Высказывание «**A → B**» истинно, если не исключено, что из **A** следует **B**.

A – «Работник хорошо работает».

B – «У работника хорошая зарплата».

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

Импликация («если …, то …»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

A – «Вася идет гулять».

B – «Маша сидит дома».

$$A \to B = 1$$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

? А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

Эквиваленция («тогда и только тогда, …»)

Высказывание «**A** ↔ **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A ↔ B = $\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

Базовый набор операций

С помощью операций **И, ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И **ИЛИ** **НЕ**

базовый набор операций

Логические основы компьютеров

Логические выражения

Вычисление логических выражений

1 4 2 5 3

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Порядок вычислений:

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ
- импликация
- эквиваленция

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + \overline{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\overline{A} \cdot B$	$\overline{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Задачи

Задача 1. При каких значениях логических переменных истинно выражение:

$$X_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 \cdot X_4 \cdot \overline{X}_5$$

Решение. Все сомножители равны 1:

$$X_1 = X_4 = 1, \quad X_2 = X_3 = X_5 = 1$$

Задача 2. При каких значениях логических переменных **ложно** выражение:

$$X_1 + \overline{X}_2 + X_3 + \overline{X}_4 + X_5$$

Решение. Все слагаемые равны 0:

$$X_1 = X_3 = X_5 = 0, \quad X_2 = X_4 = 1$$

Домашнее задание

1. Составьте таблицы истинности этих выражений:

б) $A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B}$;

в) $(A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (A + \overline{B})$;

г) $A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C} + C \cdot \overline{A}$;

з) $\overline{(A + C)} + \overline{(B + \overline{C})}$;

и) $\overline{\overline{(\overline{A} \cdot C)} \cdot \overline{(\overline{B} \cdot C)}}$;

к) $A \cdot (C + B \cdot \overline{C}) + C \cdot \overline{(A + B)}$;