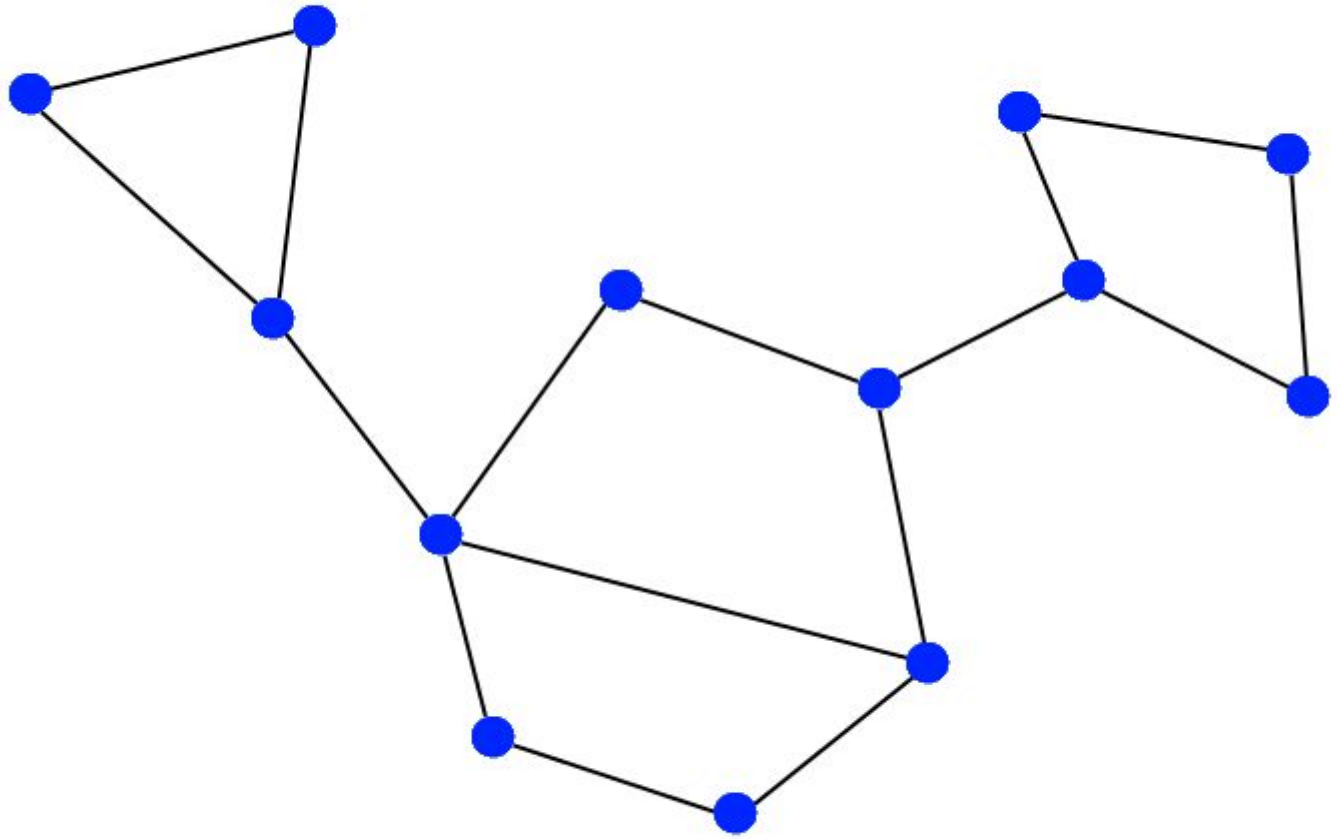
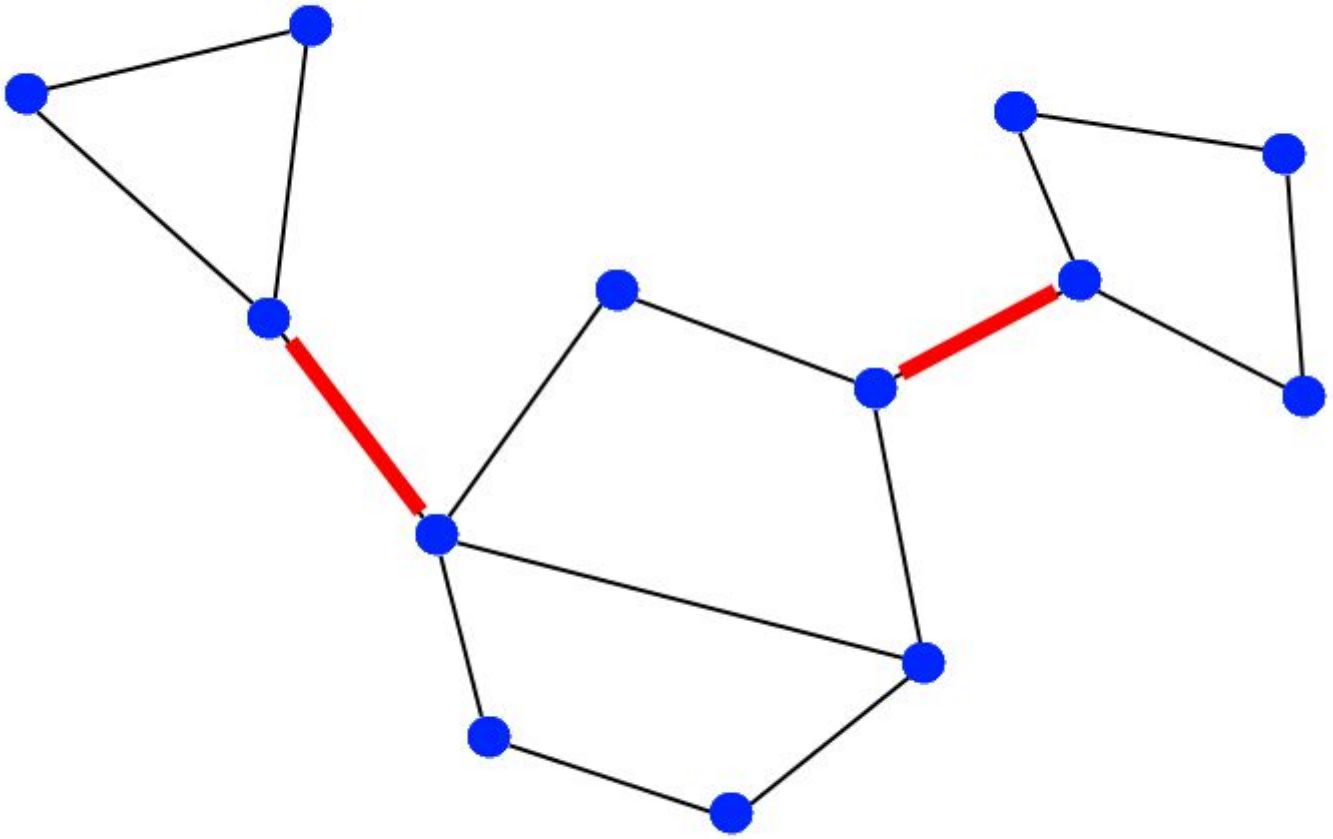
Задачи связности и реберной двусвязности на динамически меняющихся графах

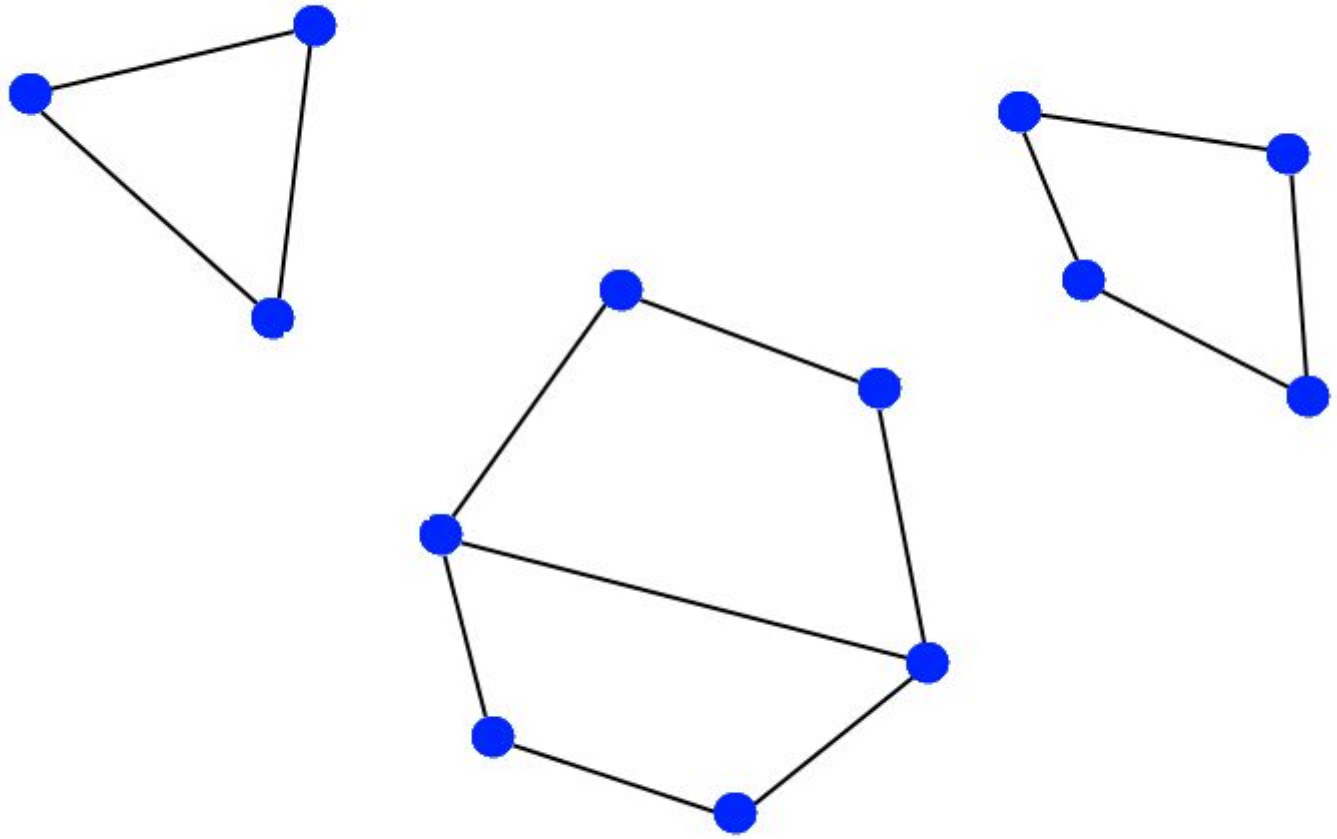
- Автор: Сергей Копелиович,
  студент 545 группы
- Научный руководитель:
  старший преподаватель кафедры системного программировния
  Андрей Сергеевич Лопатин
- Рецензент:
  Андрей Сергеевич Станкевич

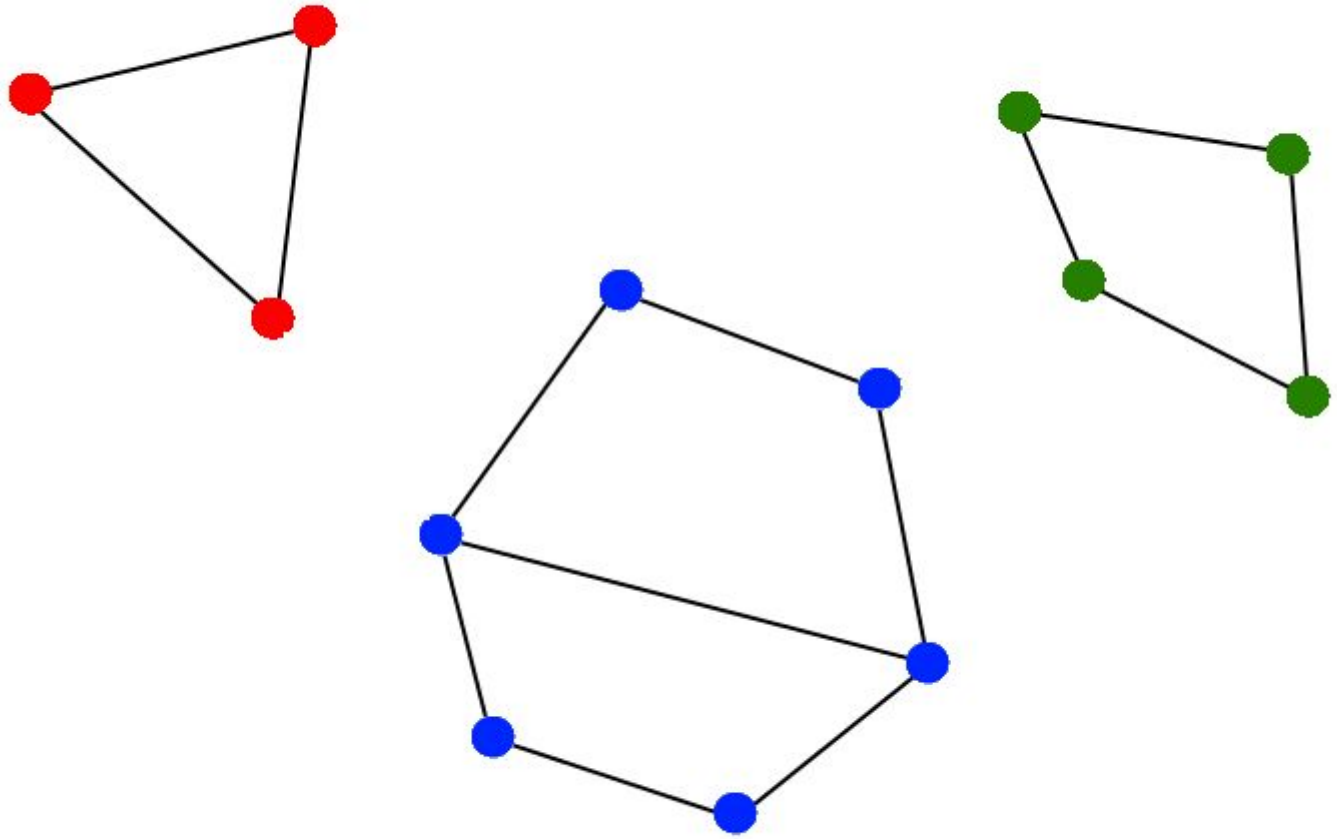
Основные понятия

- Неориентированный граф
- Компоненты связности
- Компоненты реберной двусвязности – вершины в одной компоненте, если существует два реберно непересекающихся пути между ними.
- Мосты – ребра, при удалении которых увеличивается количество компонент связности.









Offline и Online

- Offline задача
  Все запросы к структуре данных известны заранее. Порядок запросов также известен.

- Online задача
  Новый запрос становится известен только после того, как на предыдущий запрос дан ответ.

Постановка задачи связности

- Неориентированный граф
- Запрос изменения графа – добавить ребро или удалить ребро

- Нужно после каждого запроса знать количество компонент связности

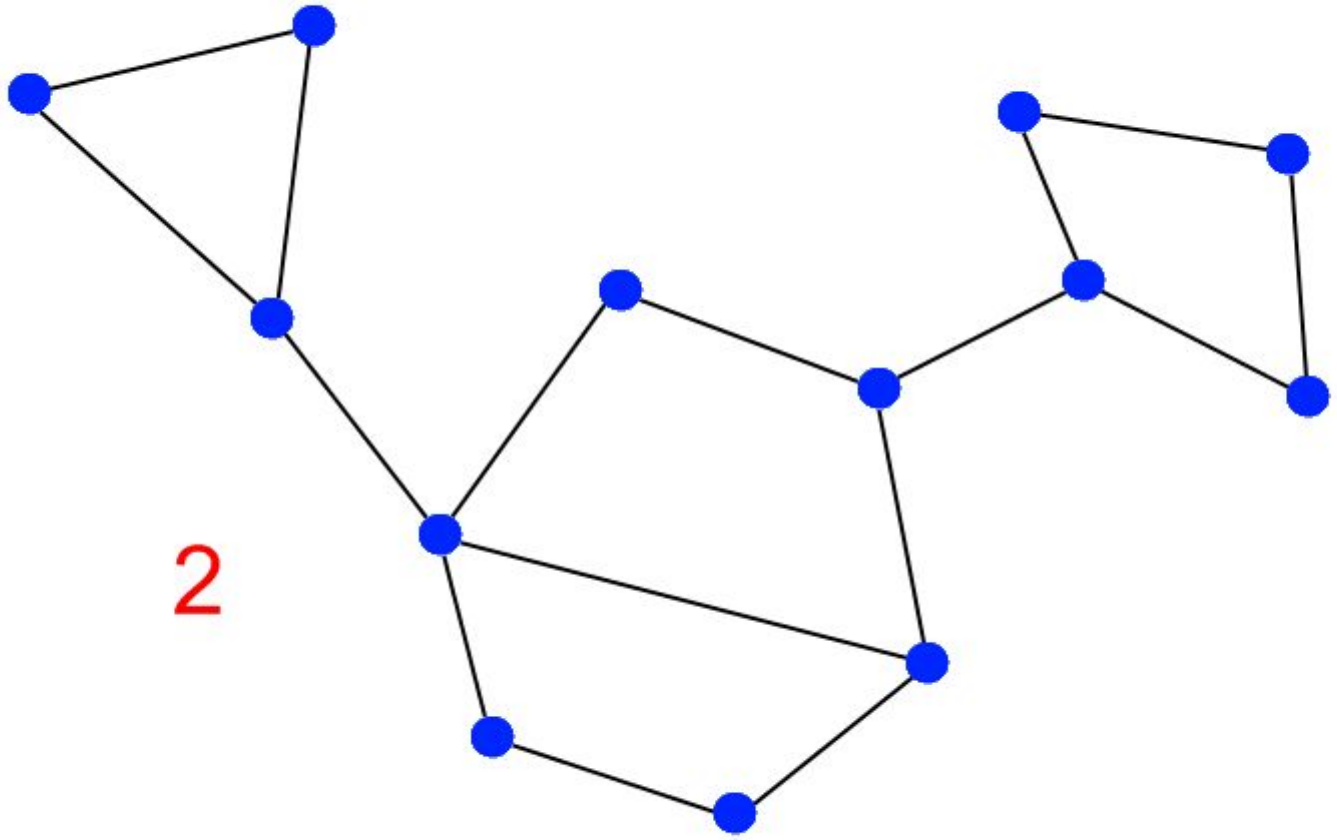
- Входные данные: изначально пустой граф и K запросов изменения графа
- Выходные данные: K чисел – количество компонент связности после каждого из запросов

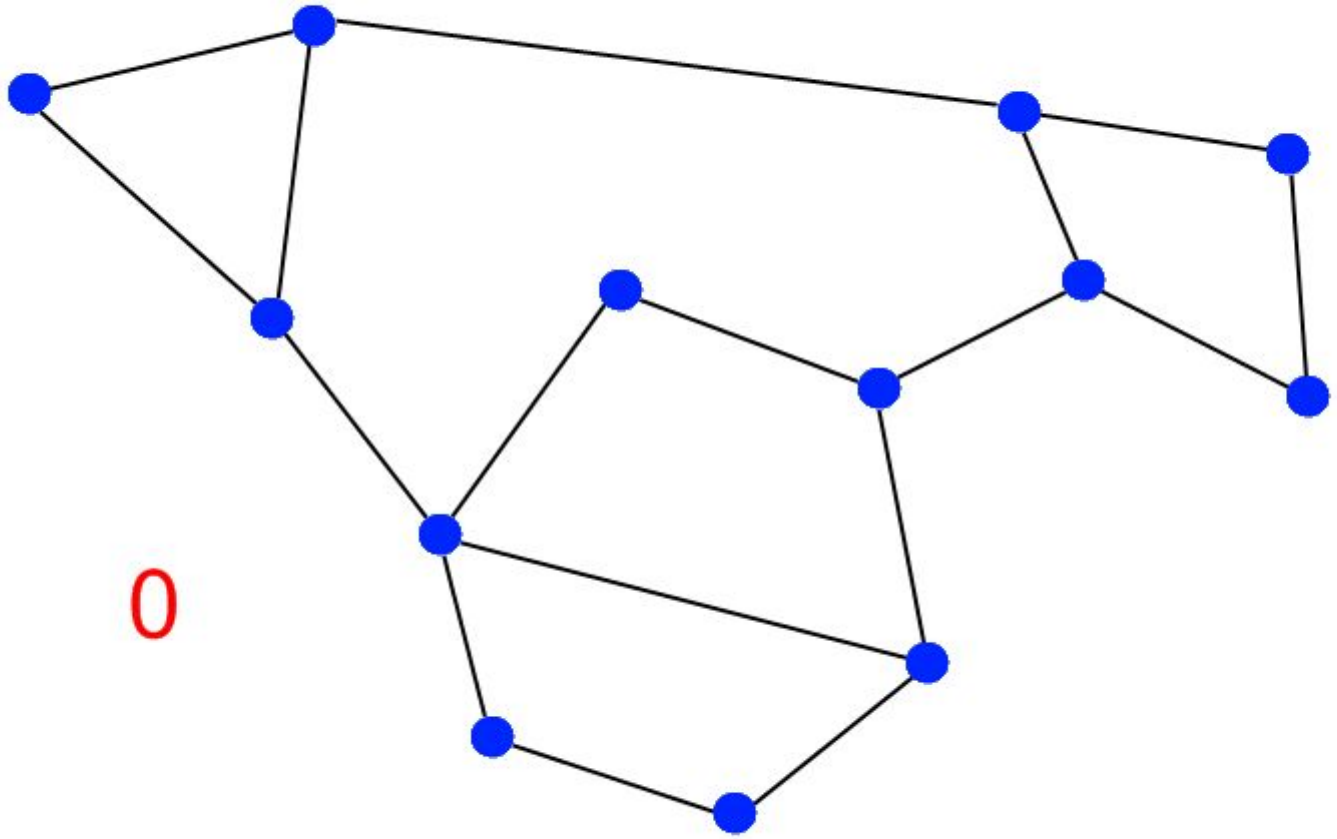
Постановка задачи двусвязности

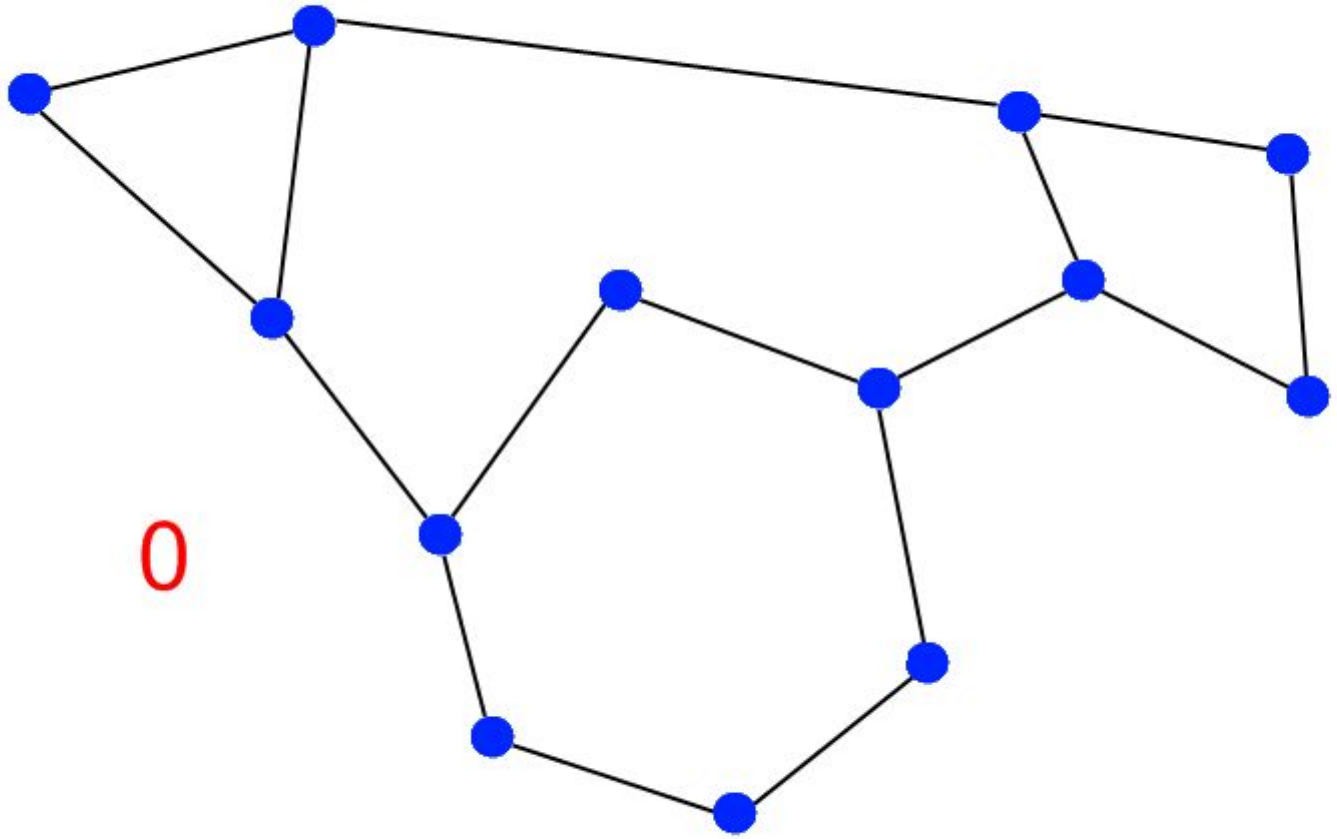
- Отличие от предыдущей задачи заключается в том, что теперь нас интересует количество компонент реберной двусвязности и количество мостов

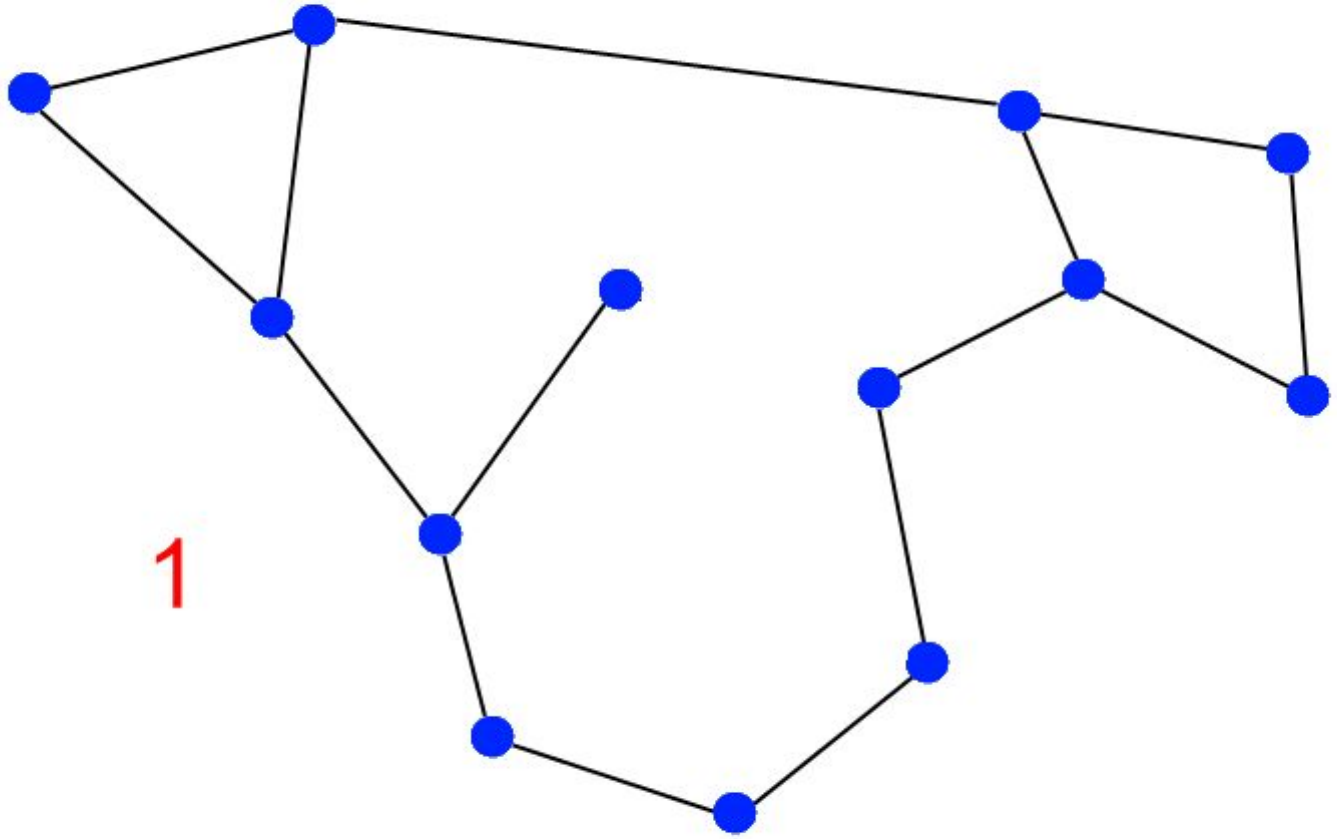
Усложненная задача

- Между запросами изменения графа нужно обрабатывать запросы вида «лежат ли вершины A и B в одной компоненте связности», «лежат ли вершины A и B в одной компоненте реберной двусвязности, сколько между ними мостов»


2


0


0


1

Цели данной работы

- Обзор существующих решений сформулированных задач.
- Подробное описание известных мне offline решений обеих задач.
- Разработка нового, более быстрого, offline решения.

Наивное решение

- Для каждого из K моментов времени запустим процедуру поиска компонент связности и реберной двусвязности.

- Время работы такого алгоритма = $O(K^2)$. Алгоритм использует O(K) дополнительной памяти.

- Обе оценки в худшем случае достигаются.

Существующие решения

- Задача о связности решена в 1992-м году Eppstein-ом за время $O(N * \log N)$.

- Задача о двусвязности решена Thorup-ом за время $O(N * \log^3 N * \log\log N)$ в 2000-м году. До сих пор это было лучшим достижением.

Основные идеи решения

- Add + Delete = отрезок времени
- Метод разделяй и властвуй
  Можно разбить все моменты времени на две части. Рекурсивно обработать сперва первую половину, затем вторую.
- Редукция и конденсация.
  Если количество запросов = k, граф всегда можно уменьшить до размера O(k) вершин

Тестирование алгоритма

- Реализованы 2 более медленных и простых решения.
- Написаны различные генераторы
  1. случайные процесс (центрированный и нет)
  2. волны (длинные, короткие)
  3. клики
  4. циклы
  5. ….
- Сравнение результатов работы решений в «бесконечном» цикле.
- Подсчет времени работы (реального + счетчики внутри программы).

Результат работы

- Алгоритм, решающий задачу про двусвязность за время O(KlogK) и использующий O(K) памяти.
- На Intel Pentium U5400 1.2 GHz за 1 секунду обрабатывается более $2 \cdot 10^5$ запросов.
- Подробное описание на русском языке offline решений задачи о связности

Сравнение решений задачи о связности

Год	Время работы	Автор
1991	$O(\sqrt{M})$	Fredrickson
1993	$O(\sqrt{N})$	Eppstein
1997	$O(\log^5 N)$	Henzinger, King
2000	$O(\log^3 N \log\log N)$	Thorup
2012	$O(K \log K + M)$	=)

Сравнение решений задачи о двусвязности

- Задача о связности решена в 1992-м году Eppstein-ом за время O(N * logN).
- Мое решение работает за то же время.
- В сравнении с решением Thorup-а, мое решение проще в реализации (у Thorup-а поддерживается MST во взвешенном меняющемся графе, а задача связности сводится к MST).

Результат 2

- Эффективная реализации предложенного мной алгоритма для задачи о двусвязности.
- ACM версия задачи о двусвязности (набор тестов в формате, позволяющем автоматическую проверку решений)
- Аналогичный алгоритм для задачи о связности. Требуемые время и память те же – O(KlogK) и O(K)

Применение алгоритмов

- Статистические запросы к динамически меняющимся графам.
- Пример #1: есть граф пользователей социальной сети, можно для фиксированной группы из K человек узнать “интересные моменты времени”, когда появлялась связность и двусвязность в данной группе.
- Пример #2: Проверка надежности сетей за счет проверки того, что сеть постоянно двусвязна.

Спасибо за внимание

- Вопросы?