Электричество и магнетизм

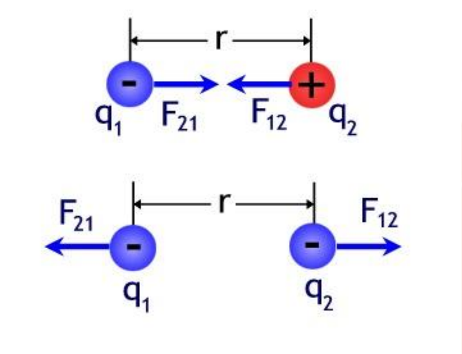
Лекция 01

Электростатическое поле в вакууме

6 сентября 2013 года
Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,
Ольчак Андрей Станиславович

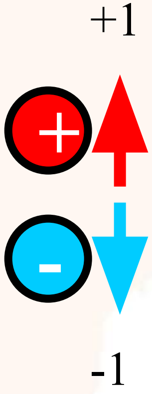
Электрический заряд

1. Существует два типа электрических зарядов



$$(q_1 q_2 < 0)$$

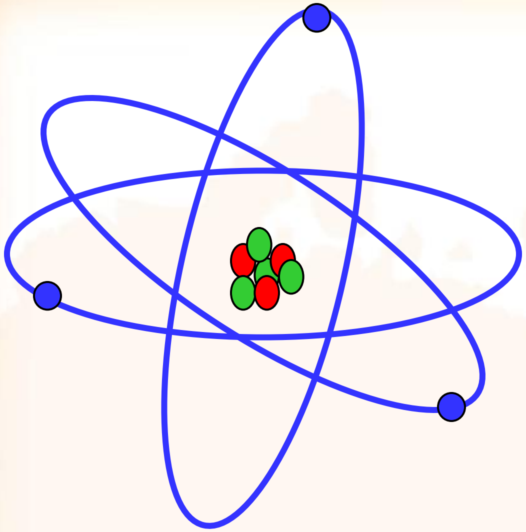
$$(q_1 q_2 > 0)$$



2. Существует наименьший электрический заряд (элементарный)

$$q = Ne, \quad e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Заряды элементарных частиц



Протоны имеют положительный заряд

$e_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Электроны имеют отрицательный заряд

$e_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

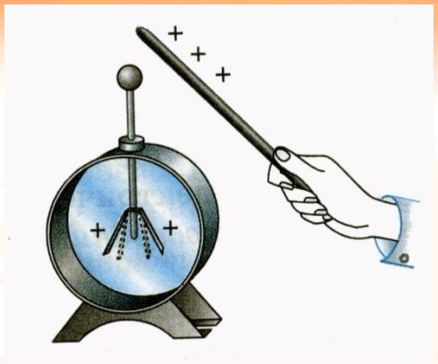
Нейтроны - электронейтральны, их электрический заряд равен нулю.

Заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл называется элементарным.

В природе не встречаются свободные заряды, меньшие элементарного.

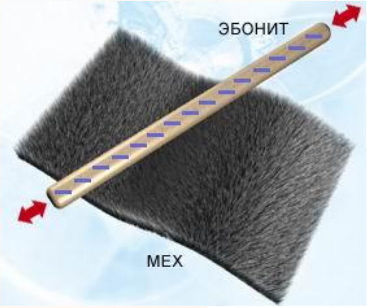
Все заряды кратны элементарному.

Электризация. Макроскопические заряженные тела



Макроскопические тела в нормальных условиях в среднем электро-нейтральны.

Но! Можно отделить часть отрицательного заряда (часть электронов) от одного тела и перенести на другое - *наэлектризовать* тела.



Это можно сделать, например, с помощью трения.

При электризации, величина избыточного заряда q_1 на одном теле окажется в точности равна и противоположна по знаку величине избыточного заряда на другом $q_2 = -q_1$.

Закон сохранения заряда

Закон сохранения электрического заряда.

В замкнутой системе алгебраическая сумма электрических зарядов всех частиц остается неизменной.

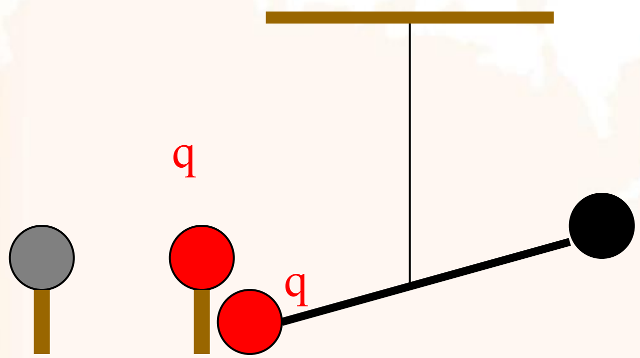
$$\sum_{i=1}^{n} q_i = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \text{const}$$

Электрические заряды – демонстрационные опыты

«Открытое образование»,
курс «Физика в опытах», часть 3
Электрические и магнитные явления

Измерение силы взаимодействия заряженных тел

Экспериментально силу взаимодействия заряженных тел впервые измерил Шарль Кулон в 1785 году с помощью так называемых крутильных весов:



Кулон определил зависимость силы от взаимодействия заряженных тел величины заряда q и от расстояния между их центрами R.

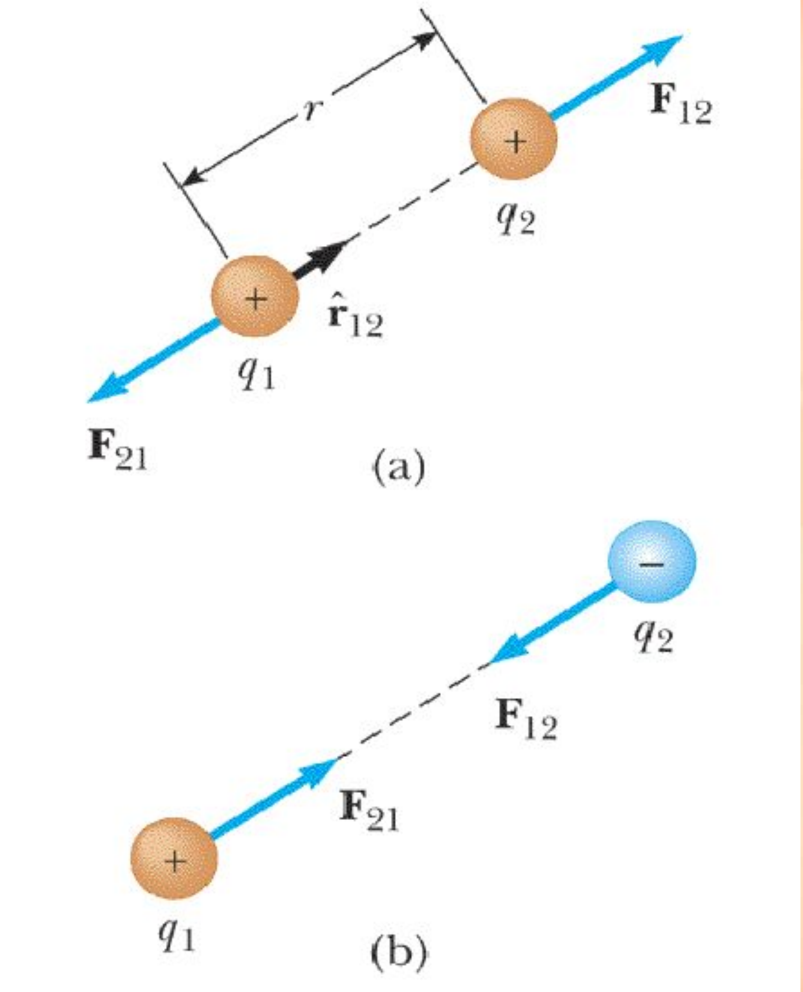
Шарль Огюсте́н де Куло́н
(1736 – 1806)

Закон Кулона

По абсолютной величине сила взаимодействия двух точечных неподвижных заряженных тел в вакууме прямо пропорциональна произведению модулей их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = kq_1 q_2 / R^2$$

где k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Направление действия силы (притяжение или отталкивание) определяется знаком взаимодействующих зарядов.



Закон Кулона. Единицы измерения заряда.

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

В системе СИ коэффициент k численно равен силе взаимодействия двух единичных (1 Кулон) зарядов на единичном расстоянии (1 метр) друг от друга.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9 \quad \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2} = \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$$

$$\varepsilon_0 = 0{,}885\cdot 10^{-11} \quad \text{Ф}/\text{м}$$

В Гауссовой системе коэффициент $k = 1$, а электрический заряд измеряется в

ед. Гаусс = [$\text{н}^{1/2}\text{м}$] = [$\text{кг}^{1/2}\text{м}^{3/2}/\text{с}$] =~ $1{,}05 \cdot 10^{-5}$ Кл = 10,5 мкКл

Два заряда по 10,5мкКл на расстоянии 1 м взаимодействуют с силой 1 Н.

Потенциальная энергия взаимодействия электрических зарядов.

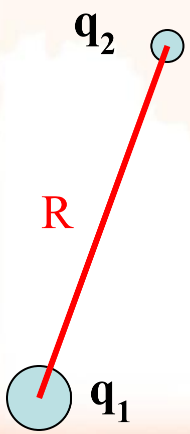
Закон Кулона

$$F = kq_1q_2 / R^2$$

математически очень похож на закон гравитационного взаимодействия

$$F = Gm_1m_2 / R^2$$

Потенциальная энергия взаимодействующих электрических зарядов тоже определяется формулой, похожей на формулу потенциальной энергии гравитационного взаимодействия ($W_{гр} = - Gm_1m_2 / R$).



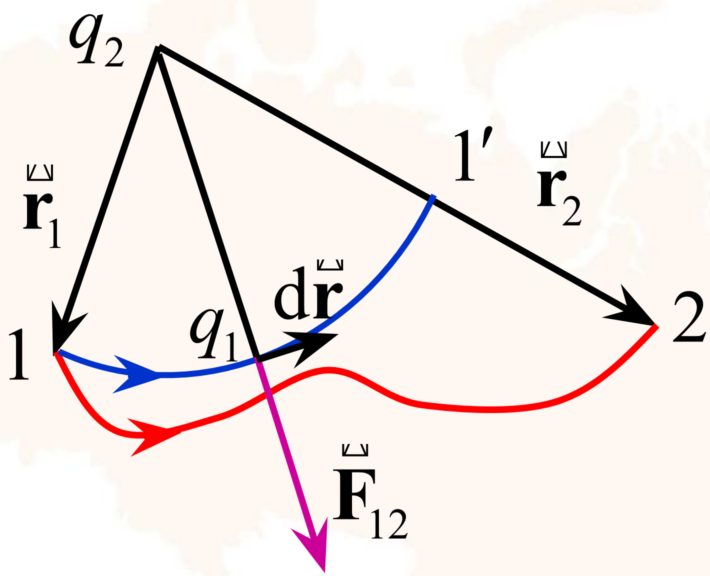
$$W_{эл} = kq_1q_2 / R$$

величины зарядов в этой формуле - алгебраические. При одинаковых знаках зарядов потенциальная энергия взаимодействия зарядов положительна, при разных знаках - отрицательна.

Работа при перемещении зарядов

$$W_{эл} = kq_1q_2/R$$

Работа по перемещению заряда в поле другого заряда = разности потенциальных энергий пары зарядов в начальной и конечной точках траектории.



$$A_{12} = A_{11'} + A_{1'2}$$

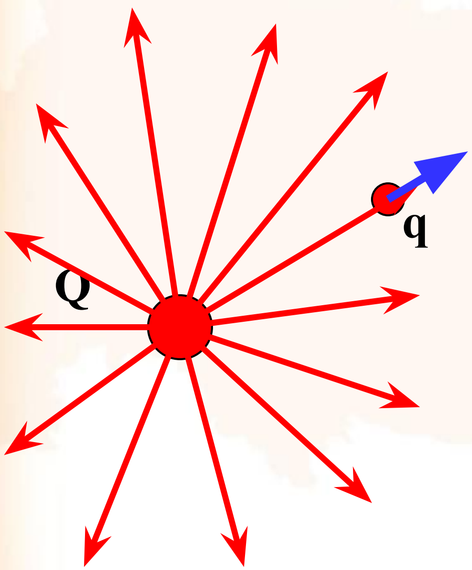
$$\vec{F}_{12} \perp d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad A_{11'} = 0$$

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_{12}dr = kq_1q_2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= kq_1q_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = w_1 - w_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w = \frac{kq_1q_2}{r}}$$

Электрическое поле.

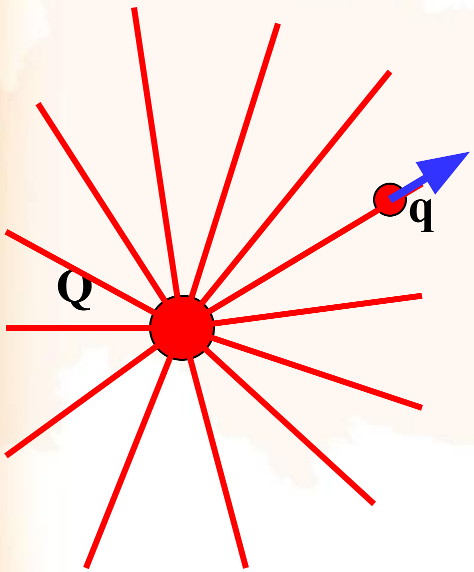
Взаимодействия удаленных тел осуществляются с помощью некоторого промежуточного агента. Таким “агентом” может быть т. н. “поле сил”.



Считается, что электрические заряды создают во всем окружающем пространстве “электрическое поле сил”, которое и действует на другие заряды.
Электрическое поле - особая форма материи.
Элекрическое поле можно наглядно изобразить в виде картины “силовых линий”. В любой точке, куда помещен другой - “*пробный*” - положительный заряд **q**, сила, действующая на него со стороны поля заряда **Q**, будет направлена вдоль этих линий.
Для точечного заряда силовые линии радиально расходятся (если **Q**>0) из точки заряда или сходятся к ней (если **Q**<0).

Напряженность электрического поля.

В любой точке, куда будет помещен другой - “*пробный*” - заряд **q**, сила, действующая на него со стороны поля заряда **Q**, пропорциональна величине “пробного” заряда (Закон Кулона: $F = kQq/R^2$).



Величина, равная отношению силы, действующей на “пробный” заряд **q**, к величине “пробного” заряда, характеризует поле, создаваемое зарядом **Q**, и называется напряженностью электрического поля.

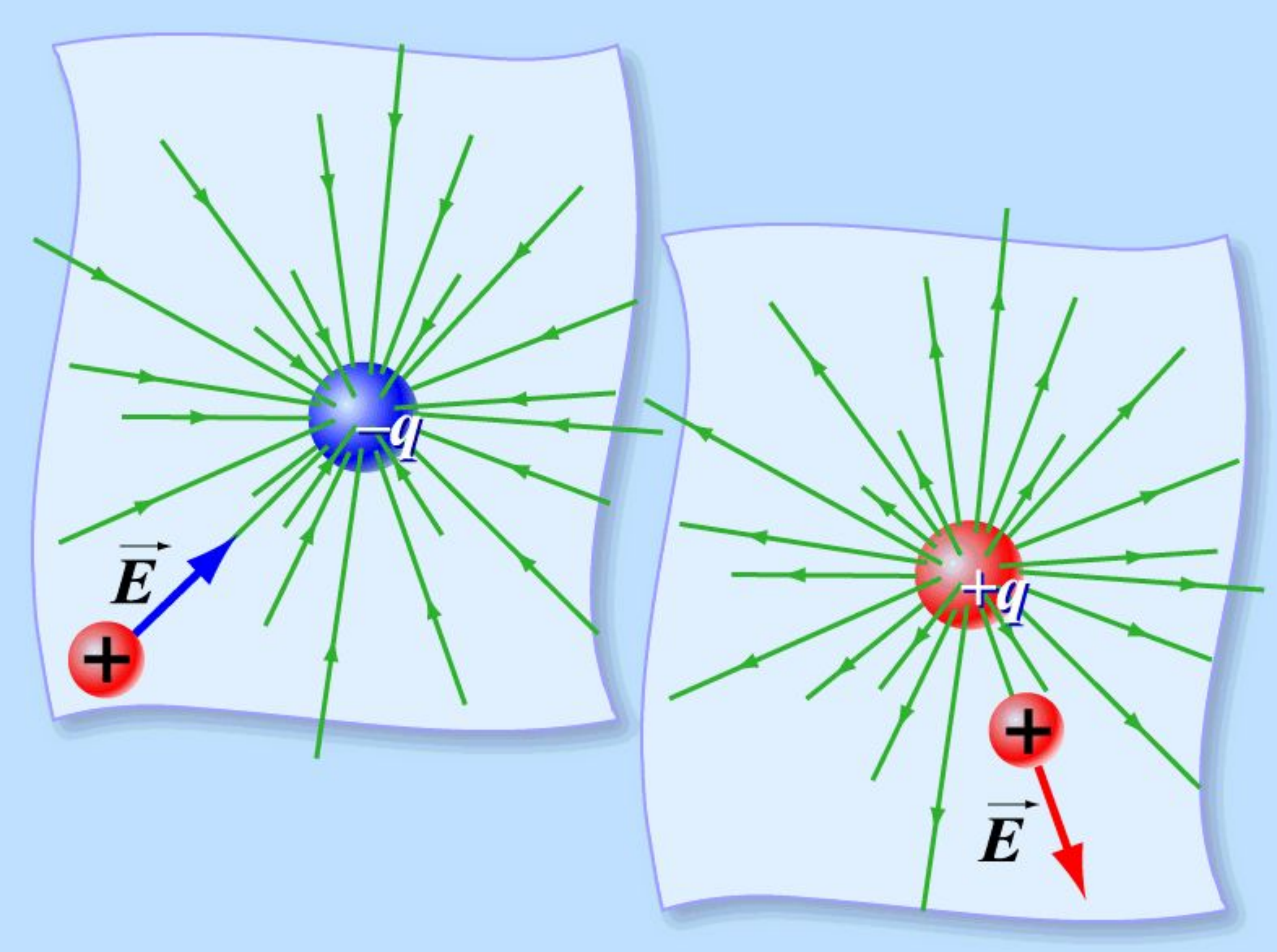
$$E = kQ/R^2$$

Напряженность $\vec{E}$ - это векторная величина, по направлению совпадающая с направлением действия силы на пробный положительный заряд

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = q\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$$

“Густота” силовых линий пропорциональна величине напряженности электрического поля.

Напряженность электрического поля.



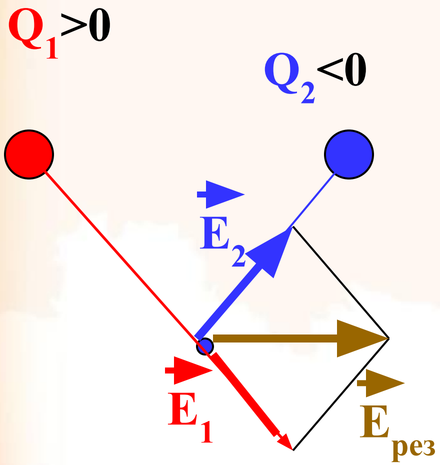
Суперпозиция электрических полей.

Если на тело действуют несколько разных сил, то по законам механики результирующая сила равна геометрической сумме всех действующих сил:

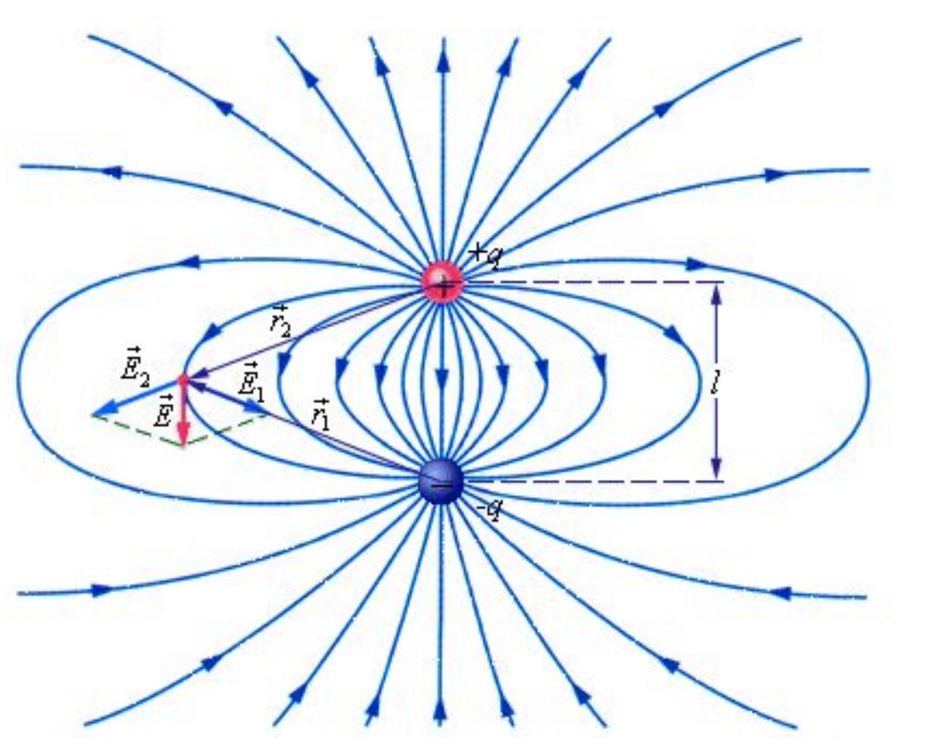
$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

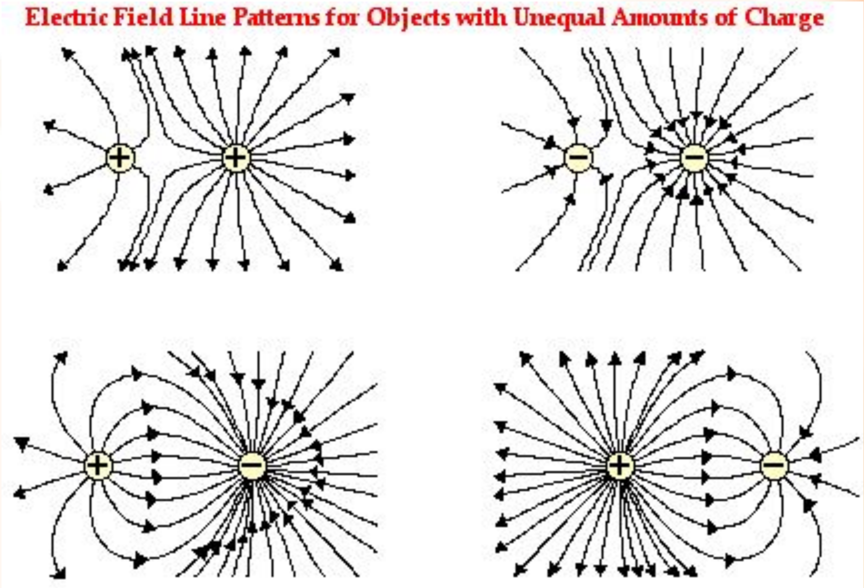
Если в данной точке пространства электрические поля создаются несколькими зарядами, суммарная напряженность электрического поля в этой точке будет равна их векторной сумме:

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$



Суперпозиция электрических полей.

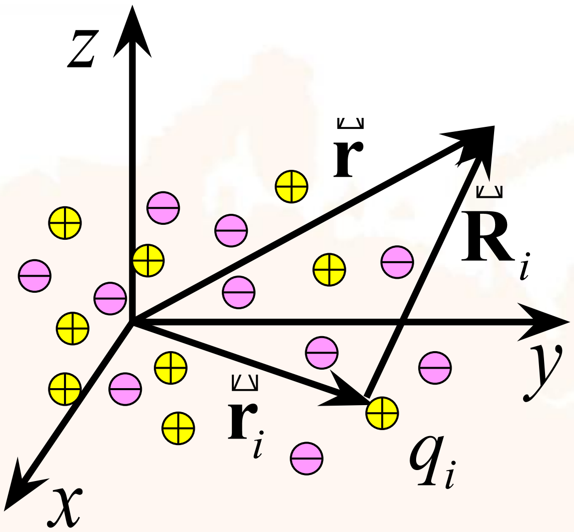




Касательные к линиям напряженности в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности.

Линии напряжённости; начинаются на положительных зарядах и «уходят» в бесконечность, либо «приходят» из бесконечности и заканчиваются на отрицательных зарядах.

Поле системы зарядов

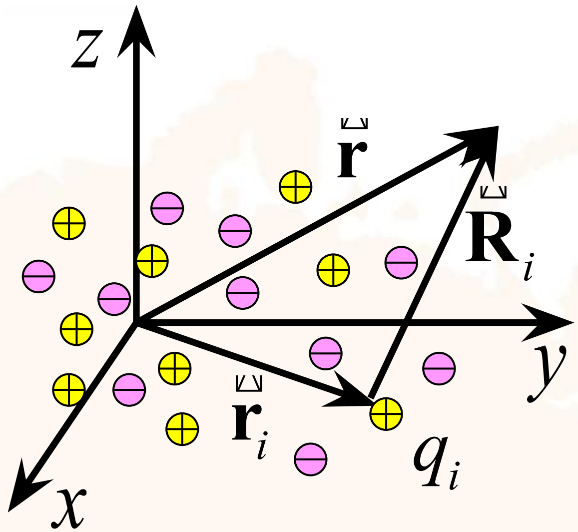


$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i}$$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = k\frac{q_i}{R_i^2}\frac{\mathbf{R}_i}{R_i} = k\frac{q_i \mathbf{R}_i}{R_i^3}$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|^3}$$

Потенциал электростатического поля



$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = k \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_i|}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{w_{\text{пр}}}{q_{\text{пр}}}} \qquad \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$$

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{r}} = q \int_1^2 \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{r}} \qquad A_{12} = w_1 - w_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Напряжённость и потенциал

Связь между напряжённостью электрического поля и потенциалом

$$\mathbf{F} = -\nabla w \quad \Rightarrow \quad q\mathbf{E} = -q\nabla\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi}$$

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

$$A_{12} = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = q\int_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{r}}$$

Поле системы зарядов

Потенциальная энергия взаимодействия

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{n=1\\(n\neq i)}}^{N} w_{in} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{n=1\\(n\neq i)}}^{N}\frac{kq_i q_n}{r_{in}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{n=1\\(n\neq i)}}^{N}\frac{kq_n}{r_{in}}$$

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \sum_{\substack{n=1\\(n\neq i)}}^{N}\frac{kq_n}{r_{in}}}$$

Эквипотенциальные поверхности и линии

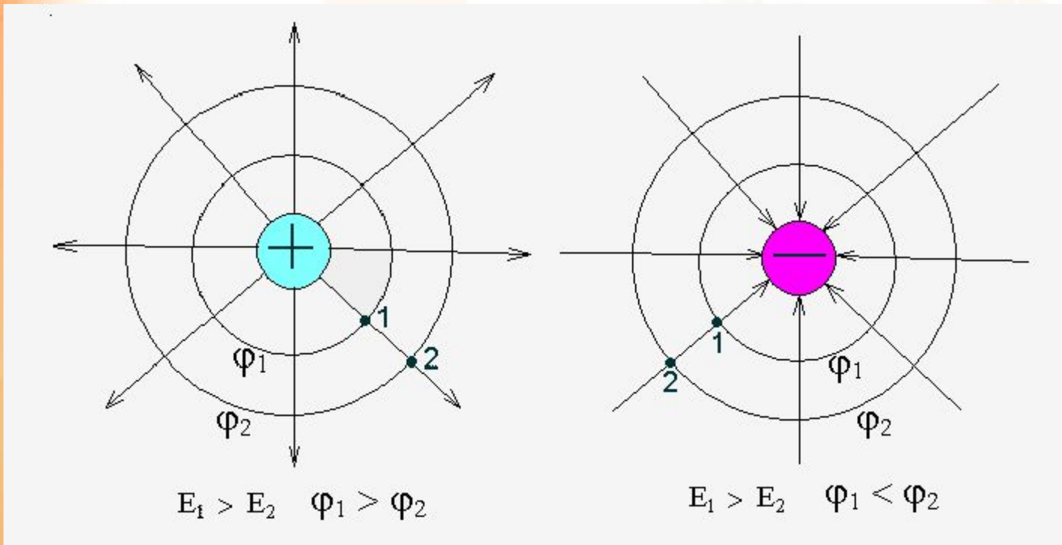
Поверхности, на которых потенциал принимает постоянное значение, называются эквипотенциальными поверхностями.

$$\varphi(x, y, z) = \mathrm{const}$$

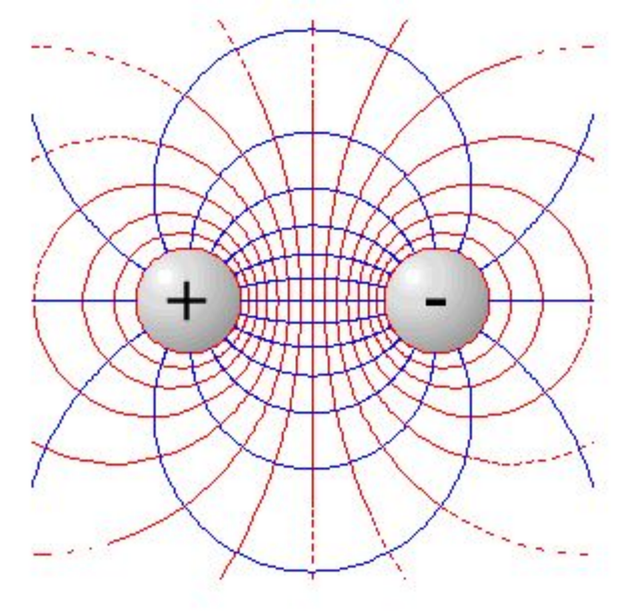
Линии напряжённости и эквипотенциальные поверхности одного и того же поля пересекаются друг с другом под прямыми углами.

Эквипотенциальные поверхности

Точечный заряд



Диполь



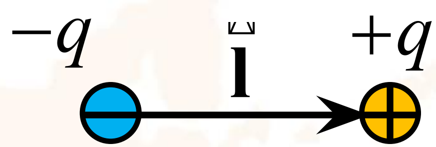
Спасибо за внимание!

Следующая лекция
15 сентября

Лекция 2

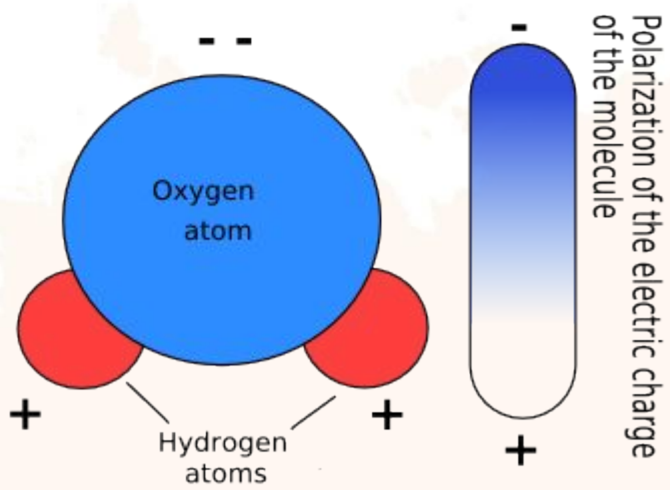
- Электрическое поле точечного диполя.
- Диполь во внешнем электрическом поле
- Поле системы зарядов на больших расстояниях.
- Пример решения задач

Электрическое поле диполя



$$\boxed{\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{l}}}$$

$\vec{\mathbf{p}}$ - электрический дипольный момент



Немного математики

Приращение и дифференциал функции трёх переменных

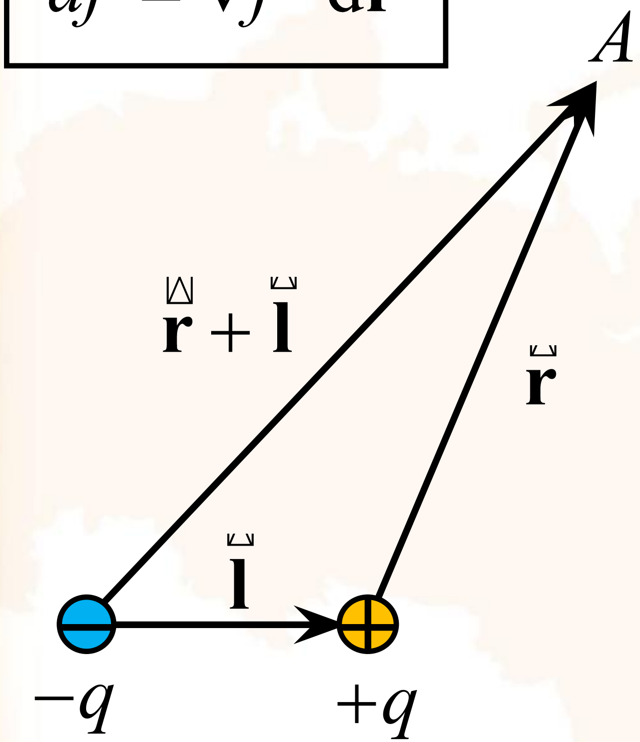
$$\Delta f = f(\vec{\mathbf{r}} + \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}) - f(\vec{\mathbf{r}}) \approx df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = (dx, dy, dz)$$

$$\boxed{df = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}$$

Электрическое поле диполя

$$\boxed{df = \nabla f \cdot d\vec{\mathbf{r}}}$$



$$\left|\vec{\mathbf{l}}\right| \ll \left|\vec{\mathbf{r}}\right|$$

$$\varphi_{\text{т}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \varphi_{\text{т}}\left(\left|\vec{\mathbf{r}}\right|\right) = \frac{kq}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|}$$

$$\varphi_{\text{д}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \frac{kq}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|} - \frac{kq}{\left|\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{l}}\right|} =$$

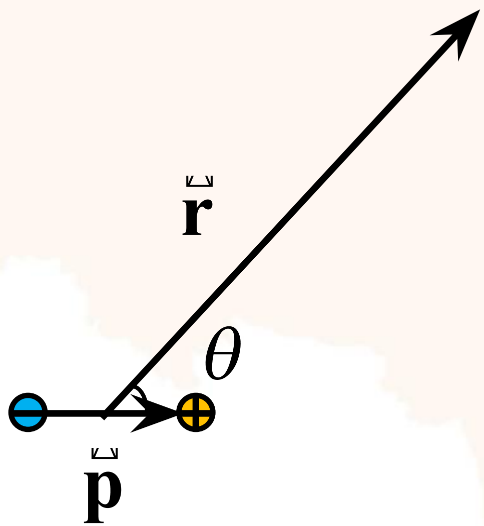
$$= -\varphi_{\text{т}}\left(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{l}}\right) + \varphi_{\text{т}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) \approx -\left(\nabla \varphi_{\text{т}} \cdot \vec{\mathbf{l}}\right) =$$

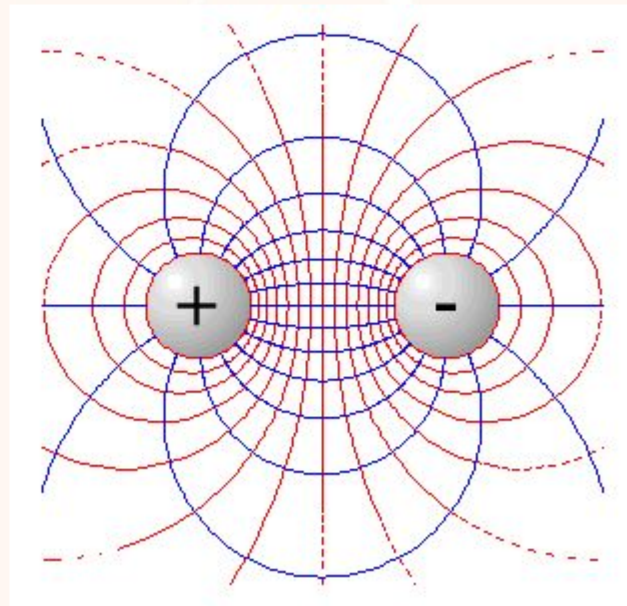
$$= \left(\vec{\mathbf{E}}_{\text{т}} \cdot \vec{\mathbf{l}}\right) = \left(\frac{kq}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} \cdot \vec{\mathbf{l}}\right) = k\left(\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \cdot q\vec{\mathbf{l}}\right)$$

$$\boxed{\varphi_{\text{д}} = k\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{p}}}{r^3}} \qquad \vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{l}}$$

Электрическое поле диполя

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = rp\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_{д} = k\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$





Электрическое поле диполя

Напряжённость электрического поля диполя

$$\mathbf{E}_{д} = -\nabla\varphi_{д} = -k\nabla\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3} = -k\left\{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\nabla\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\right\}$$

<u>Математическое дополнение.</u>

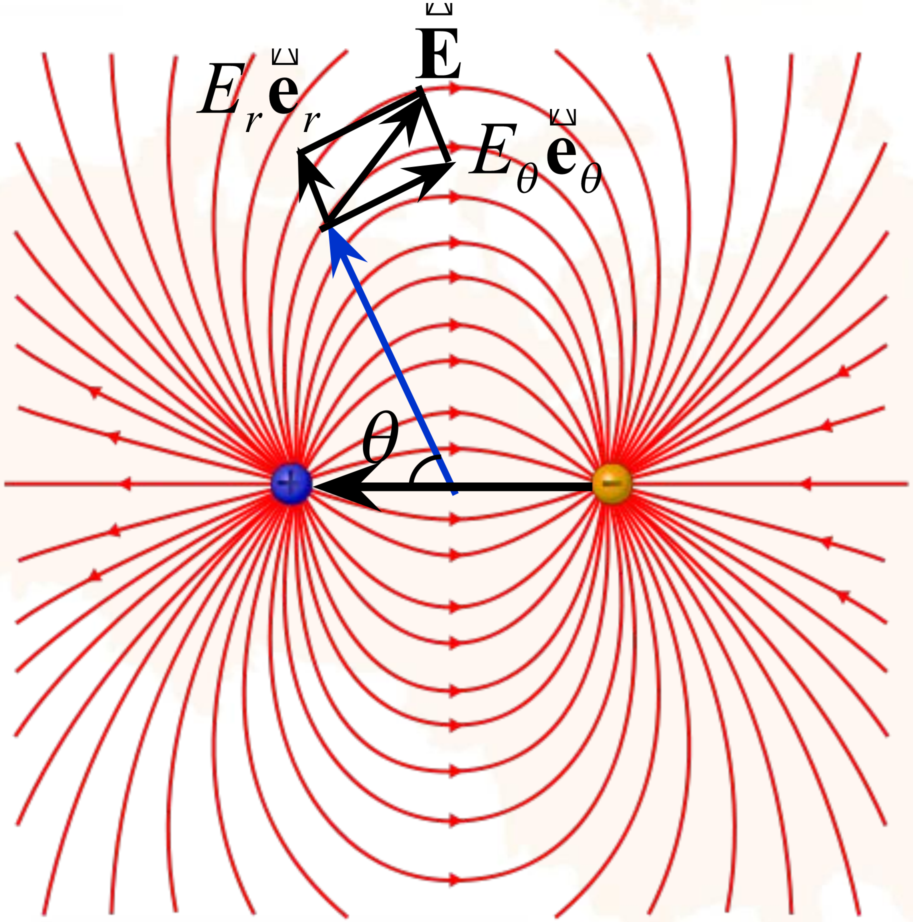
$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla\frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

$$\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) = \nabla\left(xp_x + yp_y + zp_z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xp_x + yp_y + zp_z\right)\mathbf{e}_x + \ldots =$$

$$= p_x\mathbf{e}_x + p_y\mathbf{e}_y + p_z\mathbf{e}_z = \mathbf{p}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{д} = \frac{k}{r^3}\left\{\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}\right\}}$$

Электрическое поле диполя



$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{д}} = E_r\vec{\mathbf{e}}_r + E_\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta$$

$$E_r = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}$$

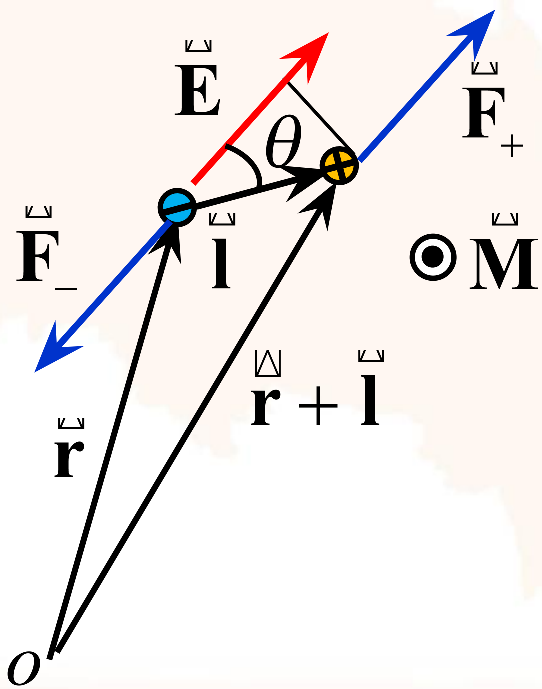
$$E_\theta = \frac{kp\sin\theta}{r^3}$$

Спасибо за внимание!

Следующая лекция
15 сентября

Диполь в электрическом поле

Потенциальная энергия диполя во внешнем электрическом поле



$$w = q\varphi\left(\vec{r}+\vec{l}\right) - q\varphi\left(\vec{r}\right) =$$

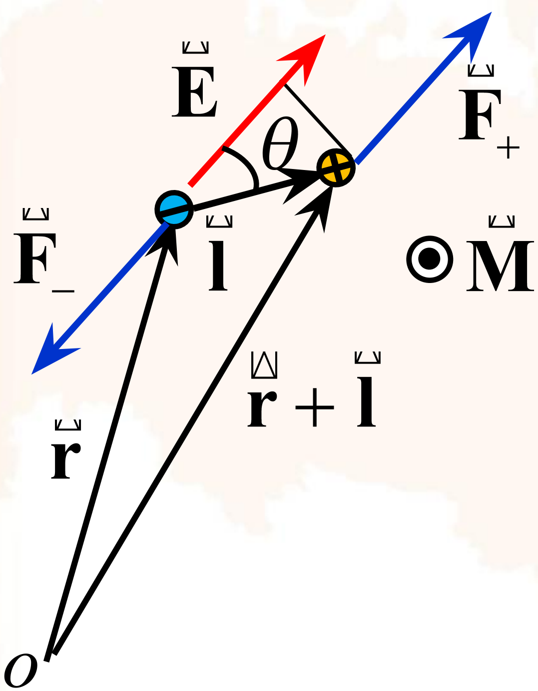
$$= q\left(\varphi\left(\vec{r}+\vec{l}\right) - \varphi\left(\vec{r}\right)\right) \approx$$

$$\approx q\left(\vec{l}\cdot\nabla\varphi\right) = -\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$$

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\boxed{w = -\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = -pE\cos\theta}$$

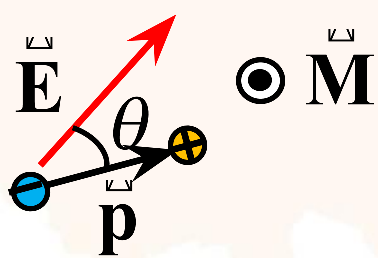
Момент сил, действующих на диполь во внешнем электрическом поле



$$\vec{E}\left(\vec{r}+\vec{l}\right)\approx\vec{E}\left(\vec{r}\right)\quad\Rightarrow\quad F_+\approx F_-$$

$l\sin\theta$ - плечо пары сил

$$M = F_+ l\sin\theta = qEl\sin\theta = pE\sin\theta$$



$$\boxed{\vec{M}=\left[\vec{p}\times\vec{E}\right]}$$

Диполь в электрическом поле

Математическое дополнение. Приращение и дифференциал векторной функции трёх переменных

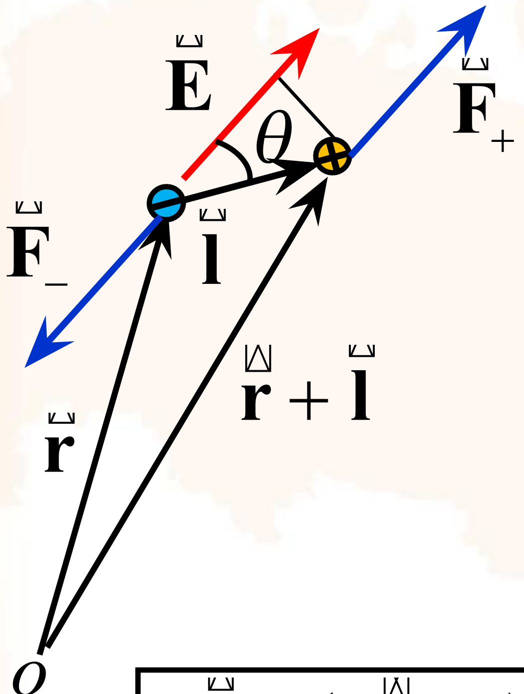
$$\vec{\mathbf{f}} = \{f_x, f_y, f_z\} \qquad \Delta f_x = f_x(\vec{\mathbf{r}} + \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}) - f_x(\vec{\mathbf{r}}) \approx df_x =$$

$$= (\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla f_x) = (\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla) f_x, \qquad (\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla) = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\mathbf{f}} = (\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{f}} = dx\frac{\partial \vec{\mathbf{f}}}{\partial x} + dy\frac{\partial \vec{\mathbf{f}}}{\partial y} + dz\frac{\partial \vec{\mathbf{f}}}{\partial z}}$$

Диполь в электрическом поле

Сила, действующая на диполь во внешнем электрическом поле



$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_+ + \vec{\mathbf{F}}_- = q\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}}+\vec{\mathbf{l}}\right) - q\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) \approx$$

$$\approx q\left(\vec{\mathbf{l}}\cdot\nabla\right)\vec{\mathbf{E}} = \left(q\vec{\mathbf{l}}\cdot\nabla\right)\vec{\mathbf{E}} = \left(\vec{\mathbf{p}}\cdot\nabla\right)\vec{\mathbf{E}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \left(\vec{\mathbf{p}}\cdot\nabla\right)\vec{\mathbf{E}} = p_x\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial z}}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\mathbf{f}} = \left(\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}\cdot\nabla\right)\vec{\mathbf{f}}}$$

Замечание: В статическом электрическом поле

$$\vec{\mathbf{F}} = -\nabla w = \nabla\left(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{E}}\right)$$

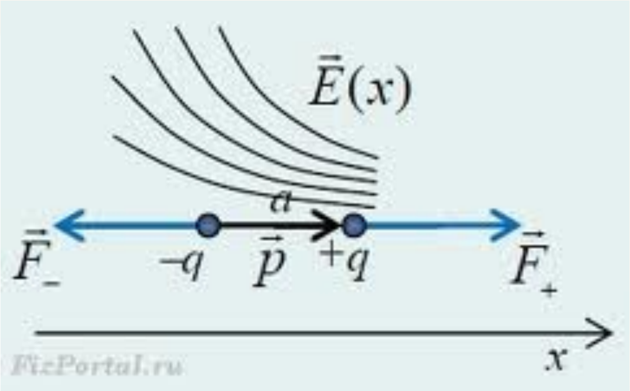
Диполь в электрическом поле

Пример 1. Однородное электрическое поле

$$\vec{\mathbf{E}} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{F}} = 0$$

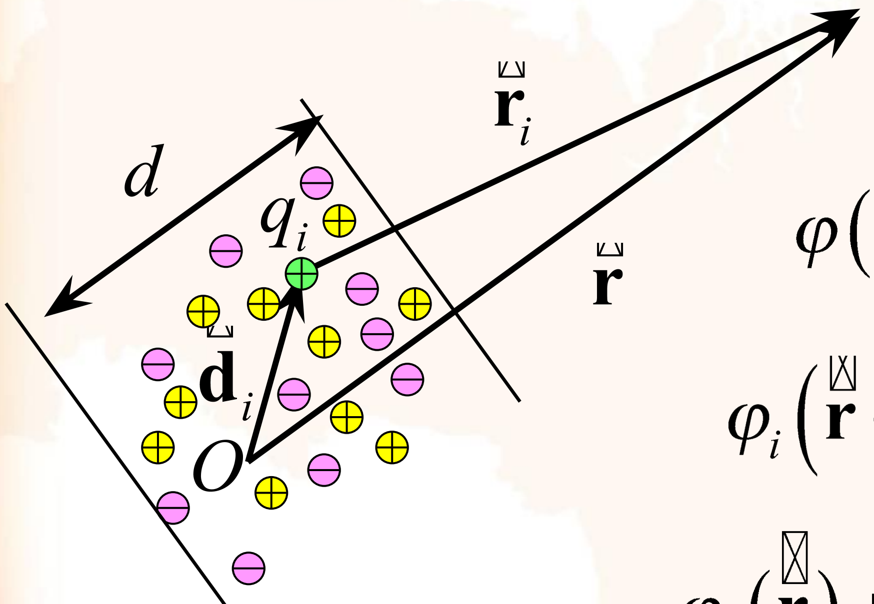
Пример 2. Слабо неоднородное электрическое поле

$$\vec{\mathbf{E}} = E(x)\vec{\mathbf{e}}_x \quad \Rightarrow \quad (\vec{\mathbf{p}}\cdot\nabla) = p_x\frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad F_x = p_x\frac{\partial E}{\partial x}$$



$$p_x > 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} > 0 \quad \Rightarrow \quad F_x > 0$$

Поле системы зарядов



$$d << r;\ \ d_i << r$$

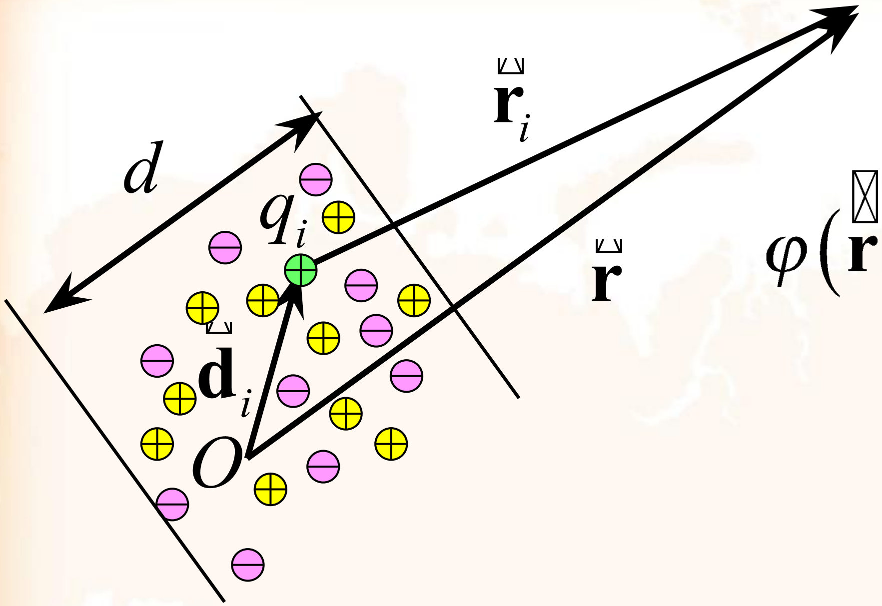
$$\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{d}}_i$$

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\vec{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{d}}_i\right)$$

$$\varphi_i\left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{d}}_i\right) \approx \varphi_i(\vec{\mathbf{r}}) - \left(\nabla\varphi_i \cdot \vec{\mathbf{d}}_i\right) =$$

$$= \varphi_i(\vec{\mathbf{r}}) + \left(\vec{\mathbf{E}}_i \cdot \vec{\mathbf{d}}_i\right) = \frac{kq_i}{r} + \left(\frac{kq_i\mathbf{r}}{r^3} \cdot \vec{\mathbf{d}}_i\right)$$

Поле системы зарядов



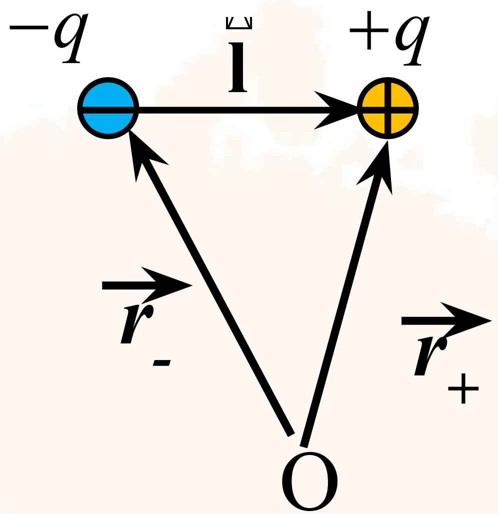
$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{k}{r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{k}{r^3}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{r}\cdot q_i\mathbf{d}_i\right) = $$

$$= \frac{k}{r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{k}{r^3}\left(\mathbf{r}\cdot\sum_{i=1}^{N} q_i\mathbf{d}_i\right)$$

$$\boxed{Q = \sum_{i=1}^{N} q_i, \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} q_i\mathbf{d}_i}$$

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \frac{kQ}{r} + \frac{k\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}\right)}{r^3} + \ldots}$$

Дипольный момент системы зарядов



$$\vec{P} = q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{l}}}$$

$$\boxed{Q = \sum_{i=1}^{N} q_i, \quad \vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{\mathbf{d}}_i}$$

Спасибо за внимание!

Следующая лекция
15 сентября