Глава 8. Интервальное оценивание параметров распределения случайных величин

8.1. Доверительный интервал

$\tilde{\theta}$

- Точечная оценка параметра (даже если она несмещенная и эффективная) не позволяет судить о том, как точно найденная оценка воспроизводит истинное значение параметра. Т.к. оценка $\tilde{\theta}$ является случайной величиной, то невозможно точно определить величину разности $a - \tilde{\theta}$, характеризующую отклонение оценки $\tilde{\theta}$ параметра от его истинного значения.

- Однако, $a - \tilde{\theta}$ – случайная величина, следовательно можно найти некоторую область реализации оценки $\tilde{\theta}$, которая с вероятностью, близкой к 1, P=1 – α содержит истинное значение параметра a. Эту область можно определить соотношением

$$P\{|\upsilon - \overline{\theta}| < t_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha \quad ,$$

где величина $t_{\alpha/2}$ говорит о том, что вероятность того, что абсолютная величина $a - \tilde{\theta}$ превысит $t_{\alpha/2}$, равна α.

- Типичные значения величины α: 0,05; 0,01; 0,001.

Иногда эту величину выражают в процентах и называют процентным уровнем значимости. Заменим неравенство

$$\left|a - \tilde{\theta}\right| < t_{\alpha/2}$$

равносильным ему двойным неравенством

$$\tilde{\theta} - t_{\frac{\alpha}{2}} < a < \tilde{\theta} + t_{\frac{\alpha}{2}},$$

- тогда

$$P\left(\tilde{\theta} - t_{\frac{\alpha}{2}} < a < \tilde{\theta} + t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Положительная величина $t_{\alpha/2}$ характеризует точность оценки , вероятность P=1–α – надежность, а интервал $\tilde{\theta} - t_{\frac{\alpha}{2}} < a < \tilde{\theta} + t_{\frac{\alpha}{2}}$, который покрывает неизвестный параметр a с заданной надежностью, называют доверительным интервалом.

8.2. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения

Рассмотрим оценку $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

математического ожидания m_x нормально распределенной случайной величины X с известной дисперсией σ^2.

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то выборочное среднее будет также распределено по нормальному закону с математическим ожиданием m_x и дисперсией σ^2/n:

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{n}}} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - m_x)^2}{2\sigma^2} n \right)$$

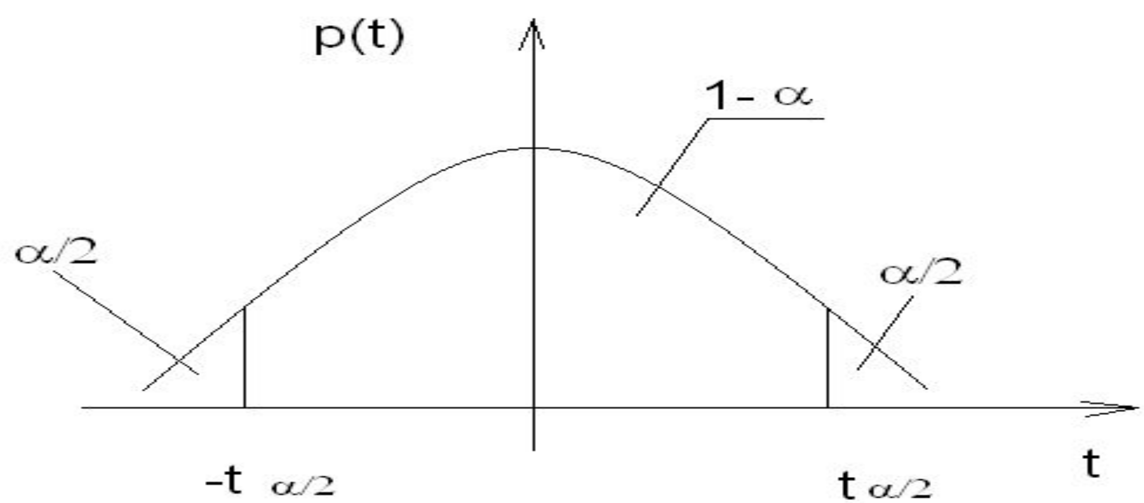
Введем случайную величину

$$t = \frac{m_x - \bar{x}}{\sigma / \sqrt{n}}$$

которая имеет нормированное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Тогда вероятность P=1 – α того, что СВ t не отклонится от своего математического ожидания на величину, больше чем $t_{\alpha/2}$ находится по формуле:

$$P\{-t_{\alpha/2}<u<t_{\alpha/2}\}=\Phi^*(t_{\alpha/2})-\Phi^*(-t_{\alpha/2})=1-\alpha.$$



Принимая во внимание, что функция распределения $\Phi^*(t)$ связана с функцией Лапласа $\Phi(t)$ соотношениями:

$\Phi(t)=0{,}5+\Phi^*(t)$, $\Phi(t)=0{,}5-\Phi^*(t)$, поэтому

$P\{-t_{\alpha/2}<u<t_{\alpha/2}\}=2\Phi(t_{\alpha/2})=1-\alpha$.

Поскольку функция $\Phi(t)$ непрерывна и возрастает на интервале $[0,\infty)$ от 0 до 0,5, то для любого числа α, удовлетворяющего неравенству $0<1-\alpha<1$, существует единственное число $t_{\alpha/2}$ такое, что $\Phi(t_{\alpha/2})=0{,}5(1-\alpha)$.

Для заданной вероятности $P = 1 - \alpha$ по таблице значений функции Лапласа $\Phi(t)$ можно найти соответствующее значение $t_{\alpha/2}$.

С надежностью $P=1 - \alpha$ можно утверждать, что доверительный интервал

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает неизвестный параметр m_x с точностью

$$\Delta = t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Таким образом, доверительным интервалом называется такой интервал, относительно которого можно с заранее определенной, близкой к 1, вероятностью утверждать, что он содержит не известное нам истинное значение параметра m_x:

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Из этого соотношения видно что, чем точнее при данном значении σ мы хотим оценить среднее значение, тем больше n экспериментов необходимо провести.

С увеличением надежности (уменьшением α) доверительный интервал расширяется, т.е. точность уменьшается. Если задать точность Δ и вероятность α, то можно найти минимальный объем выборки n который обеспечит заданную точность Δ:

$$n = \left(\frac{t_{\alpha/2}\sigma}{\Delta} \right)^2$$

Поскольку концы интервала представляют собой случайные величины, то их называют также доверительными границами. Если величина X распределена не по нормальному закону распределения, то поскольку величина представляет собой сумму независимых, одинаково распределенных случайных величин, согласно предельной теореме при достаточно больших n ($n \geq 30$) ее закон распределения близок к нормальному.

Теперь рассмотрим оценку $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

математического ожидания m_x нормально распределенной случайной величины X с неизвестной дисперсией σ^2. Для оценивания дисперсии σ^2 используем оценку

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Величина $$t = \frac{m_x - \bar{x}}{S / \sqrt{n}}$$

при этих условиях имеет t-распределение (распределение Стьюдента) с $k=n-1$.

Для нахождения доверительного интервала значения m_x:

1) задаемся надежностью P=1–α по таблице t-распределения для уровня значимости α/2 (соответствующего односторонней критической области);
2) из условия $P\{|t|<t_{\alpha/2}\}=1-\alpha$ определяем значение $t_{\alpha/2}$ и строим доверительный интервал

$$\left(\bar{x}-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}<m_x<\bar{x}+t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

8.3. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения

Рассмотрим построение доверительного интервала дисперсии нормально распределенной случайной величины X при неизвестном математическом ожидании.

Для этого используем соотношение:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2$$

Из указанного отношения можно определить величину имеющую $k = n - 1$ степеней свободы.

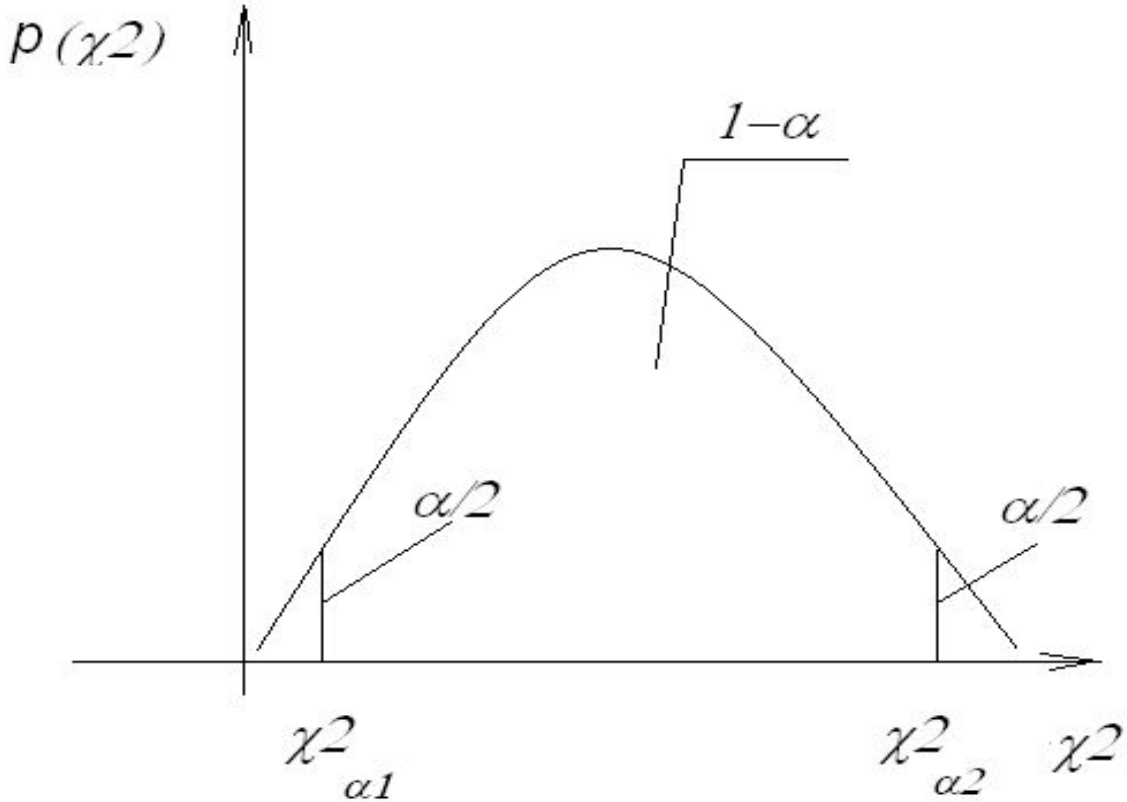
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Таким образом, если математическое ожидание неизвестно, то случайная величина χ^2 распределена по закону χ^2 с $k = n - 1$ степенями свободы. Так как случайная величина χ^2 неотрицательна, а плотность распределения $p(\chi^2)$ несимметричная (см.рис.), то доверительный интервал будем определять из условия

$$P\{\chi^2_{\alpha_1} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha_2}\} = 1 - \alpha$$

или

$$P\{\chi^2_{\alpha_1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha_2}\} = 1 - \alpha$$



p (χ2)
1−α
α/2
α/2
χ2 α1
χ2 α2
χ2

откуда получаем

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha_1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha_2}}\} = 1-\alpha$$

Следовательно, интервал

$$\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha_1}}; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha_2}}\right\}$$

есть доверительный интервал для дисперсии σ^2 с надежностью $P=1-\alpha$, а интервал

$$\left\{ \frac{S\sqrt{(n-1)}}{\chi^2_{\alpha_1}} ; \frac{S\sqrt{(n-1)}}{\chi^2_{\alpha_2}} \right\}$$

представляет собой доверительный интервал для стандартного отклонения σ с надежностью $P=1-\alpha$.

Значения $\chi^2_{\alpha_1}, \chi^2_{\alpha_2}$ определяем из таблиц χ^2 распределения из условия .

$$P\{\chi^2 < \chi^2_{\alpha_1}\} = P\{\chi^2 > \chi^2_{\alpha_2}\} = \alpha / 2$$

Глава 9. Проверка статистических гипотез

9.1. Постановка задачи. Основные понятия и определения

Всякое предположение о законе распределения или параметрах закона распределения СВ X будем называть статистической гипотезой (СГ).

Задачу установления истинности гипотез по выборке наблюдений будем называть проверкой статистических гипотез.

СГ являются, например, предположения:

1. Закон распределения наблюдаемой СВ является нормальным;
2. МО наблюдаемой нормально распределенной СВ равно заданному числу;
3. Дисперсия и МО наблюдаемой нормально распределенной СВ принимают заданные значения.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение, сложной – гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Основная задача теории проверки гипотез состоит в разработке методов построения наиболее подходящих критических и допустимых областей, обеспечивающих наилучшее различение гипотез.

При проверке гипотез возникают ошибки двух родов:

– ошибка 1 рода – отклонение истинной гипотезы;

– ошибка 2 рода – принятие ложной гипотезы.

Замечание. Какая из ошибок является на практике более опасной, зависит от конкретной задачи.

Например, если проверяется правильность выбора метода лечения больного, то ошибка первого рода означает отказ от правильной методики, что может замедлить лечение, а ошибка второго рода (применение неправильной методики) чревата ухудшением состояния больного и является более опасной.

С расширением $\overline{S}_1$ области ошибка 1 рода растет, а ошибка 2 рода падает.

Условные вероятности α и β вероятности ошибок первого и второго рода соответственно.

Основной прием проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины, имеющей известный закон распределения.

Статистическим критерием называется случайная величина *K* с известным законом распределения, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Критической областью называют область значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, областью принятия гипотезы – область значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Процесс проверки гипотезы состоит из следующих этапов:

1) выбирается статистический критерий *К*;

2) вычисляется его наблюдаемое значение $K_{набл}$ по имеющейся выборке;

3) поскольку закон распределения *К* известен, определяется (по известному уровню значимости α) критическое значение $k_{кр}$, разделяющее критическую область и область принятия гипотезы (например, если $p(K > k_{кр}) = \alpha$, то справа от

$k_{кр}$ располагается критическая область, а слева – область принятия гипотезы);

4) если вычисленное значение $K_{набл}$ попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается, если в критическую область – нулевая гипотеза отвергается.

Различают разные виды критических областей:

– правостороннюю критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$);

– левостороннюю критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$);

– двустороннюю критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$ ($k_2 > k_1$).

Параметр α называют уровнем значимости или размером критерия проверки гипотезы H_i (размером критической области $\overline{S}_i$).

Параметр 1 – β равный условной вероятности отклонения гипотезы H_i , когда она ошибочна, называют мощностью критерия ее проверки.

Вероятности α и β связаны между собой через область критическую область . С возрастанием α параметр β уменьшается, и наоборот, уменьшению β соответствует возрастание α.