

# Вывод **н**елинейных УУН для сети переменного тока

Лекция 4

# Предпосылки для вывода

Из предыдущей лекции

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \dot{I}_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{\bar{U}}_F = \bar{\bar{I}} \end{cases}$$

Как известно,

$$\dot{S}_i = \dot{U}_i \cdot \hat{I}_i, i = 1 \dots (N - 1), \text{ или } \bar{\bar{S}} = \text{diag}(\bar{\bar{U}}) \cdot \bar{\bar{I}}$$

Тогда

$$\dot{I}_i = \frac{\hat{S}_i}{\widehat{U}_i}, i = 1 \dots (N - 1), \text{ или } \bar{\bar{I}} = \left( \text{diag}(\bar{\bar{U}}) \right)^{-1} \cdot \bar{\bar{S}}$$

- Декартовы координаты

$$\dot{S} = P + j \cdot Q$$

- Полярные применяются  
крайне редко

# Общий вывод нелинейной системы УУН для сети переменного тока

- $$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \dot{I}_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{\bar{U}}_F = \bar{\bar{I}} \end{cases}$$

УУН в комплексном виде в форме баланса токов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \frac{\hat{S}_i}{\hat{U}_i}, i = 1 \dots (N - 1) \\ \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{\bar{U}}_F = \left( \text{diag}(\bar{\bar{U}}) \right)^{-1} \cdot \bar{\bar{S}} \end{cases}$$

УУН в комплексном виде в форме баланса мощностей

$$\begin{cases} \hat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ \text{diag}(\bar{\bar{U}}) \cdot \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{\bar{U}}_F = \bar{\bar{S}} \end{cases}$$

# Нелинейная система УУН для сети ПОСТОЯННОГО тока (для учебных примеров)

В форме баланса токов:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N-1} (Y_{i,j} \cdot U_j) = \frac{P_i}{U_i} - Y_{i,N} \cdot U_N, i = 1 \dots (N - 1) \\ \bar{Y}_S \cdot \bar{U} = (\text{diag}(\bar{U}))^{-1} \cdot \bar{P} - \bar{Y}_{SN} \cdot U_N \end{cases}$$

В форме баланса мощностей:

$$\begin{cases} U_i \cdot \sum_{j=1}^{N-1} (Y_{i,j} \cdot U_j) = P_i - U_i \cdot Y_{i,N} \cdot U_N, i = 1 \dots (N - 1) \\ \text{diag}(\bar{U}) \cdot \bar{Y}_S \cdot \bar{U} = \bar{P} - \text{diag}(\bar{U}) \cdot \bar{Y}_{SN} \cdot U_N \end{cases}$$

# Нелинейная система УУН для сети переменного тока **в декартовых координатах в форме баланса токов**

Вспомним, что

$$\begin{aligned}\dot{U} &= U' + j \cdot U'' \\ \dot{S} &= P + j \cdot Q\end{aligned}$$

Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^N ((G_{i,j} + j \cdot B_{i,j}) \cdot (U_j' + j \cdot U_j'')) &= \frac{P_i - j \cdot Q_i}{U_i' - j \cdot U_i''}, i = 1 \dots (N - 1) \\ \sum_{j=1}^N ((G_{i,j} \cdot U_j' - B_{i,j} \cdot U_j'') + j \cdot (B_{i,j} \cdot U_j' + G_{i,j} \cdot U_j'')) &= \frac{(P_i - j \cdot Q_i) \cdot (U_i' + j \cdot U_i'')}{(U_i' - j \cdot U_i'') \cdot (U_i' + j \cdot U_i'')}, \\ & i = 1 \dots (N - 1) \\ \sum_{j=1}^N (G_{i,j} \cdot U_j' - B_{i,j} \cdot U_j'') &= \frac{P_i \cdot U_i' + Q_i \cdot U_i''}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \dots (N - 1) \\ \sum_{j=1}^N (B_{i,j} \cdot U_j' + G_{i,j} \cdot U_j'') &= \frac{P_i \cdot U_i'' - Q_i \cdot U_i'}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \dots (N - 1) \end{aligned} \right.$$

# Нелинейная система УУН для сети переменного тока **в декартовых координатах в форме баланса мощностей**

- $$\left\{ \begin{aligned} & \hat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ & (U_i' - j \cdot U_i'') \cdot \sum_{j=1}^N ((G_{i,j} + j \cdot B_{i,j}) \cdot (U_j' + j \cdot U_j'')) = P_i - j \cdot Q_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ & \sum_{j=1}^N ((U_i' - j \cdot U_i'') \cdot ((G_{i,j} \cdot U_j' - B_{i,j} \cdot U_j'') + j \cdot (B_{i,j} \cdot U_j' + G_{i,j} \cdot U_j''))) = P_i - j \cdot Q_i, \\ & \hspace{10em} i = 1 \dots (N - 1) \\ & \sum_{j=1}^N (G_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j' + U_i'' \cdot U_j'') - B_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j'' - U_i'' \cdot U_j')) = P_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ & \sum_{j=1}^N (B_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j' + U_i'' \cdot U_j'') + G_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j'' - U_i'' \cdot U_j')) = -Q_i, i = 1 \dots (N - 1) \end{aligned} \right.$$

# Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей) 1

- Полярные координаты для проводимостей

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= Y \cdot \exp(\psi) = Y \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \\ &= Y \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \\ &= Y \cdot (j \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha))\end{aligned}$$

- Полярные координаты для напряжений

$$\begin{aligned}\dot{U} &= V \cdot \exp(j \cdot \delta) = \\ &= V \cdot (\cos(\delta) + j \cdot \sin(\delta))\end{aligned}$$

- $$\begin{cases} \hat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N-1) \\ V_i \cdot (\cos(\delta_i) - j \cdot \sin(\delta_i)) \cdot \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot (j \cdot \cos(\alpha_{i,j}) - \sin(\alpha_{i,j})) \cdot V_j \cdot (\cos(\delta_j) + j \cdot \sin(\delta_j))) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

# Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей) 2

- $$\left\{ \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot (j \cdot \cos(\alpha_{i,j}) - \sin(\alpha_{i,j})) \cdot (\cos(\delta_i) - j \cdot \sin(\delta_i)) \cdot (\cos(\delta_j) + j \cdot \sin(\delta_j))) \right\} = P_i - j \cdot Q_i,$$

$$i = 1 \dots (N - 1)$$

Раскроем скобки множителей, содержащих  $\delta$

$$\left\{ \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot (j \cdot \cos(\alpha_{i,j}) - \sin(\alpha_{i,j})) \cdot ((\cos(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) + \sin(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)) + j \cdot (\cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j) - \sin(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j)))) \right\} = P_i - j \cdot Q_i,$$

$$i = 1 \dots (N - 1)$$

Воспользуемся формулами синуса и косинуса разности  $\cos(\delta_j - \delta_i) = \cos(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) + \sin(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)$  и  $\sin(\delta_j - \delta_i) = \sin(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) - \cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)$

$$\left\{ \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot (j \cdot \cos(\alpha_{i,j}) - \sin(\alpha_{i,j})) \cdot (\cos(\delta_j - \delta_i) - j \cdot \sin(\delta_j - \delta_i))) \right\} = P_i - j \cdot Q_i,$$

$$i = 1 \dots (N - 1)$$

Раскроем оставшиеся скобки

$$\left\{ \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot ((\cos(\alpha_{i,j}) \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) - \sin(\alpha_{i,j}) \cdot \cos(\delta_j - \delta_i)) + j \cdot (\cos(\alpha_{i,j}) \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) + \sin(\alpha_{i,j}) \cdot \sin(\delta_j - \delta_i)))) \right\} = P_i - j \cdot Q_i,$$

$$i = 1 \dots (N - 1)$$



# Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей) 3

Снова воспользуемся формулами синуса и косинуса разности

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot (-\sin(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j}) + j \cdot \cos(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j}))) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N - 1) \end{array} \right.$$

Запишем уравнения, исходя из равенства действительных и мнимых составляющих

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \sin(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j})) = -P_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \cos(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j})) = Q_i, i = 1 \dots (N - 1) \end{array} \right.$$

# Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)1

- Полярные координаты для проводимостей

$$\dot{Y} = G + j \cdot B$$

- Полярные координаты для напряжений

$$\begin{aligned} \dot{U} &= V \cdot \exp(j \cdot \delta) = \\ &= V \cdot (\cos(\delta) + j \cdot \sin(\delta)) \end{aligned}$$

- $$\begin{cases} \hat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ V_i \cdot (\cos(\delta_i) - j \cdot \sin(\delta_i)) \cdot \sum_{j=1}^N ((G_{i,j} + j \cdot B_{i,j}) \cdot V_j \cdot (\cos(\delta_j) + j \cdot \sin(\delta_j))) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N - 1) \end{cases}$$

# Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)<sup>2</sup>

- $$\left\{ \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + j \cdot B_{i,j})) \cdot (\cos(\delta_i) - j \cdot \sin(\delta_i)) \cdot (\cos(\delta_j) + j \cdot \sin(\delta_j)) \right\} = P_i - j \cdot Q_i,$$

$$i = 1 \dots (N - 1)$$

Раскроем скобки множителей, содержащих  $\delta$

$$\left\{ \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + j \cdot B_{i,j})) \cdot \left( (\cos(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) + \sin(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)) + j \cdot (\cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j) - \sin(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j)) \right) \right\} = P_i - j \cdot Q_i,$$

$$i = 1 \dots (N - 1)$$

Воспользуемся формулами синуса и косинуса разности  $\cos(\delta_j - \delta_i) = \cos(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) + \sin(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)$  и  $\sin(\delta_j - \delta_i) = \sin(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) - \cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)$

$$\left\{ \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + j \cdot B_{i,j})) \cdot (\cos(\delta_j - \delta_i) - j \cdot \sin(\delta_j - \delta_i)) \right\} = P_i - j \cdot Q_i,$$

$$i = 1 \dots (N - 1)$$

# Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)3

Раскроем оставшиеся скобки

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + j \cdot B_{i,j}) \cdot (\cos(\delta_j - \delta_i) - j \cdot \sin(\delta_j - \delta_i))) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N - 1) \\ \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot ((G_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i)) + j \cdot (-G_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i)))) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N - 1) \end{array} \right.$$

Запишем уравнения, исходя из равенства действительных и мнимых составляющих

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i))) = P_i, i = 1 \dots (N - 1) \\ \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) - B_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i))) = Q_i, i = 1 \dots (N - 1) \end{array} \right.$$

# Часто встречающиеся формы записи нелинейных УУН 1

УУН в комплексном виде в форме баланса токов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \frac{\hat{S}_i}{\bar{U}_i}, i = 1 \dots (N-1) \\ \bar{Y} \cdot \bar{U}_F = \left( \text{diag}(\bar{U}) \right)^{-1} \cdot \hat{S} \end{cases}$$

УУН в комплексном виде в форме баланса мощностей

$$\begin{cases} \bar{U}_i \cdot \sum_{j=1}^N (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N-1) \\ \text{diag}(\bar{U}) \cdot \bar{Y} \cdot \bar{U}_F = \text{diag}(\bar{U})^{-1} \cdot \hat{S} \end{cases}$$

УУН в декартовых координатах в форме баланса токов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (G_{i,j} \cdot U_j' - B_{i,j} \cdot U_j'') = \frac{P_i \cdot U_i' + Q_i \cdot U_i''}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \dots (N-1) \\ \sum_{j=1}^N (B_{i,j} \cdot U_j' + G_{i,j} \cdot U_j'') = \frac{P_i \cdot U_i'' - Q_i \cdot U_i'}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

# Часто встречающиеся формы записи нелинейных УУН 2

УУН в декартовых координатах в форме баланса мощностей

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (G_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j' + U_i'' \cdot U_j'') - B_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j'' - U_i'' \cdot U_j')) = P_i, i = 1 \dots (N-1) \\ \sum_{j=1}^N (B_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j' + U_i'' \cdot U_j'') + G_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j'' - U_i'' \cdot U_j')) = -Q_i, i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

УУН в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \sin(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j})) = -P_i, i = 1 \dots (N-1) \\ \sum_{j=1}^N (Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \cos(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j})) = Q_i, i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

УУН в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i))) = P_i, i = 1 \dots (N-1) \\ \sum_{j=1}^N (V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) - B_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i))) = Q_i, i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

Именно последняя форма чаще всего используется в расчетных программах (!!!)

Конец

- $$\left( (\bar{G}_S + j \cdot \bar{B}_S) \cdot (\bar{U}'_F + j \cdot \bar{U}''_F) \right) = \left( \text{diag}(\bar{U}' - j \cdot \bar{U}'') \right)^{-1} \cdot (\bar{P} - j \cdot \bar{Q})$$