

Логические основы вычислительной техники

Алгебра логики

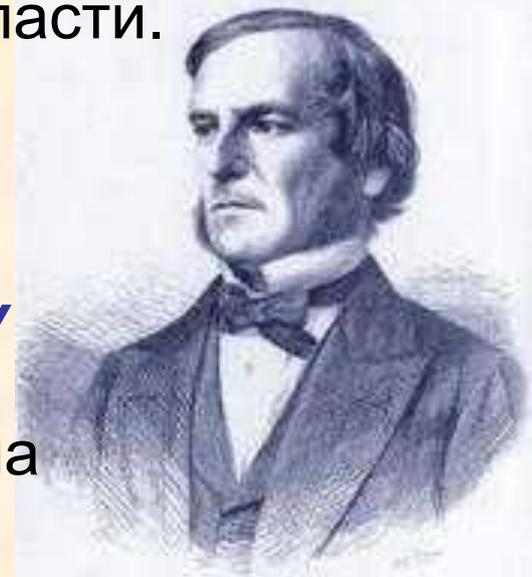
- Основные логические функции НЕ, И, ИЛИ
- Вычисление логических выражений
-

Математическая логика



Немецкий ученый **Готфрид Лейбниц** (1646-1716) заложил основы **математической логики**. Он пытался построить первые логические исчисления (свести логику к математике), предложил использовать символы вместо слов обычного языка, поставил много задач по созданию символической логики, его идеи оказали влияние на последующие работы ученых в этой области.

Англичанин **Джордж Буль** (1815-1864, математик-самоучка), на фундаменте, заложенном Лейбницем, создал новую область науки - **Математическую логику** (*Булеву алгебру* или *Алгебру высказываний*). В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику.



Алгебра логики (высказываний)

работает с **высказываниями**.



Различают:

- 1. Логические константы (логические утверждения)** – конкретные частные утверждения
{Аристотель - основоположник логики}
{На яблонях растут бананы}
- 2. Логические переменные (предикаты)** – логические высказывания, значения которых меняются в зависимости от входящих в них переменных, обозначаются заглавными латинскими буквами **A, B, C, D, F, ...**
A = {Аристотель - основоположник логики}
B = {На яблонях растут бананы}.

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0. Таким образом, **A = 1, B = 0.**

3. Логические функции (логические формулы) – сложные логические выражения образованных из простых и связанных логическими операциями **И, ИЛИ, НЕ** и др.)

Высказывание “**Все мышки и кошки с хвостами**” является сложным и состоит из двух простых высказываний.

A = “**Все мышки с хвостами**” **и** **B** = “**Все кошки с хвостами**”
Его можно записать в виде логической функции, значение которой истинно: **$F(A,B)=A$ и B**

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно. Поэтому высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только **ложно (0)** или **истинно (1)**.

Логические операции



1. Отрицание (инверсия).

Обозначение: **НЕ** A , $\neg A$, \overline{A}

Таблица истинности:

A	\overline{A}
0	1
1	0



$A = \{\text{Дети любят игрушки}\}$ $\overline{A} = \{\text{Дети **НЕ** любят игрушки}\}$

$A = \{\text{множество учеников 10 А класса}\}$

$\overline{A} = \{\text{множество учеников **НЕ** 10 А класса}\}$



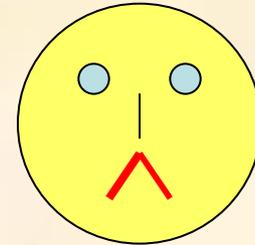
2. Логическое умножение (Конъюнкция)

Обозначение: И, \wedge , &, \cdot

$$F = A \wedge B$$

Таблица ИСТИННОСТИ:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



$A = \{\text{Множество обитателей моря}\}$

$B = \{\text{Множество млекопитающих}\}$

$F = A \wedge B = \{\text{кит, акула, дельфин}\}$



3. Логическое сложение (Дизъюнкция)

Обозначение: **ИЛИ**, \vee , $+$, $|$

$$F = A \vee B$$

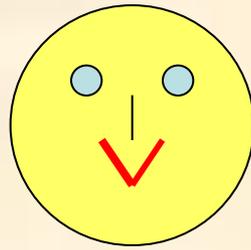


Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



A={Множество учеников 10 А класса}

B={Множество учеников 10 Б класса}

$$F = A \vee B = \{\text{Множество учеников 10А или 10Б кл.}\}$$

4. ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

Обозначение: $A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$



Таблица истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся **ложным тогда и только тогда**, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

условие \Rightarrow *следствие*

ЕСЛИ, ... **ТО ...**

Если будет дождь, то мы не пойдём на улицу.

Если я поленюсь, то получу двойку.

Если на траве роса, то скоро настанет вечер.



5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность) -

логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным **тогда и только тогда**, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначение: $A \sim B$, $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A = B$

Таблица истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Чайник греет воду тогда и только тогда, когда он включен.

Мы дышим свежим воздухом тогда и только тогда, когда гуляем в парке.

Приоритет логических операций:



1. **()** Операции в скобках
2. **НЕ** Отрицание
3. **И** логическое умножение
4. **ИЛИ** Логическое сложение
5. \rightarrow Импликация
6. \leftrightarrow Эквивалентность

РЕШИМ ЗАДАЧИ:



Вычисление логических выражений

Пример1.



Вычислить значение логического выражения
« $(2 \cdot 2 = 5 \text{ или } 2 \cdot 2 = 4)$ и $(2 \cdot 2 \neq 5 \text{ или } 2 \cdot 2 \neq 4)$ »

Обозначим

$A = \langle\langle 2 \cdot 2 = 5 \rangle\rangle$ – ложно (0)

$B = \langle\langle 2 \cdot 2 = 4 \rangle\rangle$ – истинно (1)

Тогда $(A \text{ или } B)$ и $(\bar{A} \text{ или } \bar{B})$

$$F = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

Задание 2. Определите истинность составного высказывания

$\overline{(A \& B)} \& (C \vee D)$ состоящего из простых высказываний:



A={Принтер – устройство вывода информации}

B={Процессор – устройство хранения информации}

C={Монитор – устройство вывода информации}

D={Клавиатура – устройство обработки информации}

Установим истинность простых высказываний:

A=1, B=0, C=1, D=0

Определяем истинность составного высказывания:

$$F = \overline{(A \& B)} \& (C \vee D) =$$

$$(1 \& 0) \& (1 \vee 0) = (0 \& 1) \& (1 \vee 0) = 0 \& 1 = 0$$

СПАСИБО за ВНИМАНИЕ!