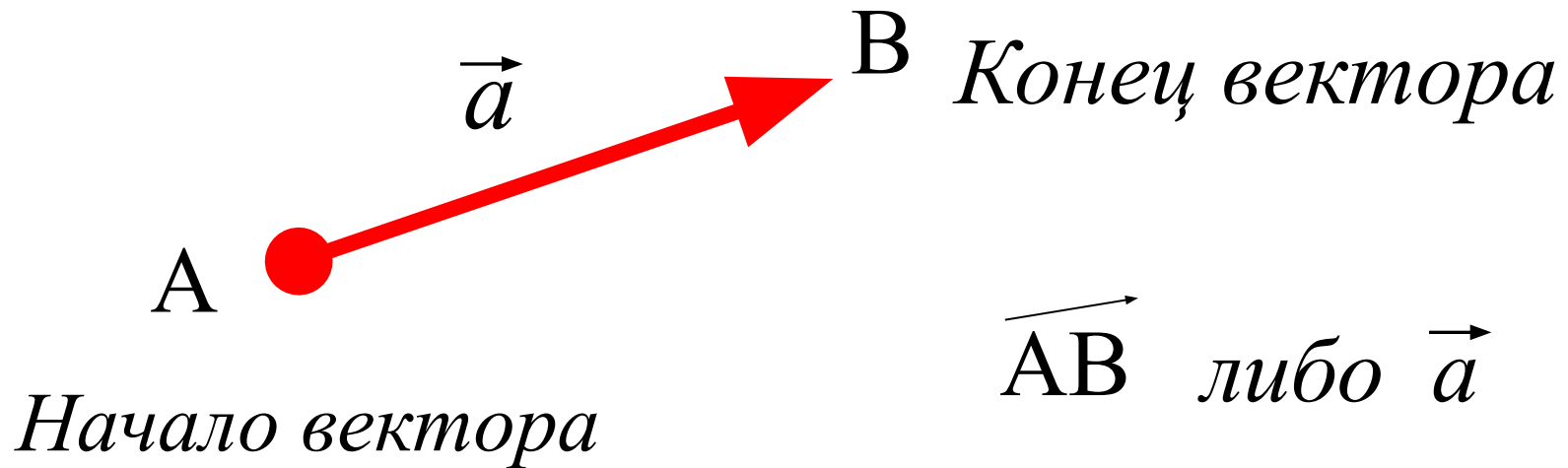


---

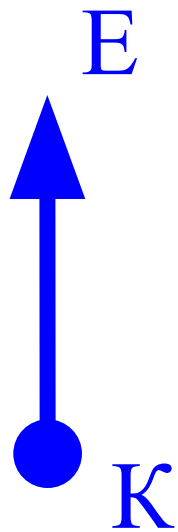
**Векторы в  
пространстве**

# Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какая его граничная точка является началом, а какая - концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**



# Длина вектора



Длиной вектора или модулем ненулевого вектора называется длина отрезка

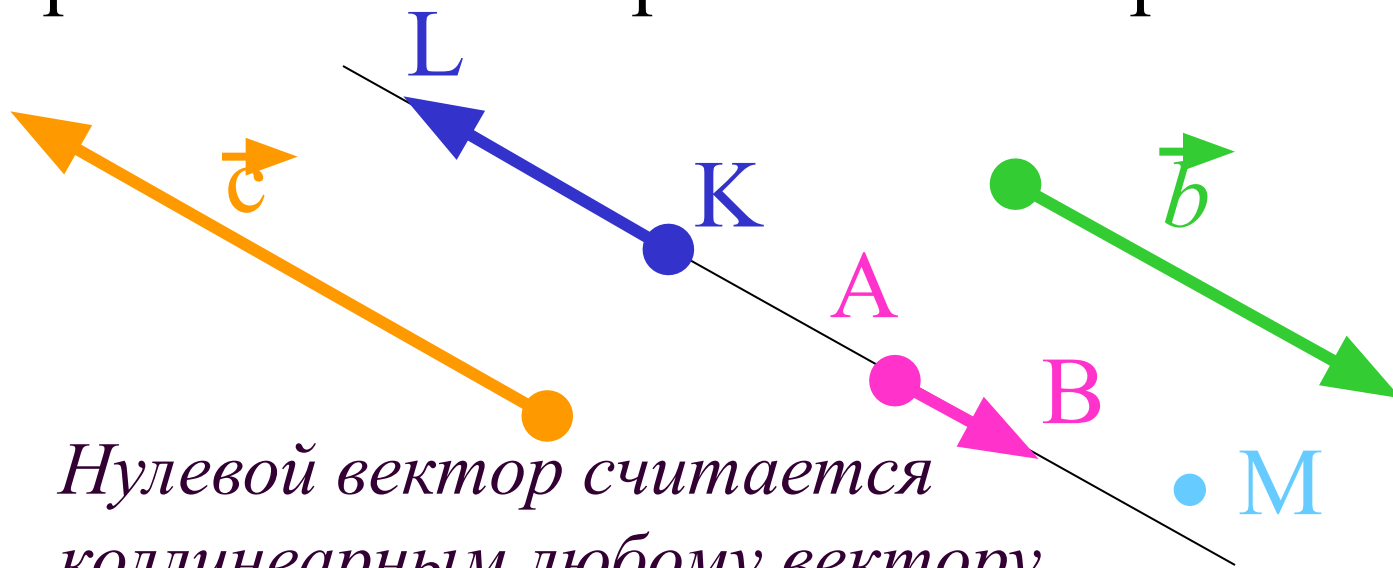
$$|\overrightarrow{KE}| = |KE| \quad \text{длина вектора } \overrightarrow{KE}$$

- $M$  вектор  $\overrightarrow{MM}$  - нулевой вектор

$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$

# Коллинеарные векторы

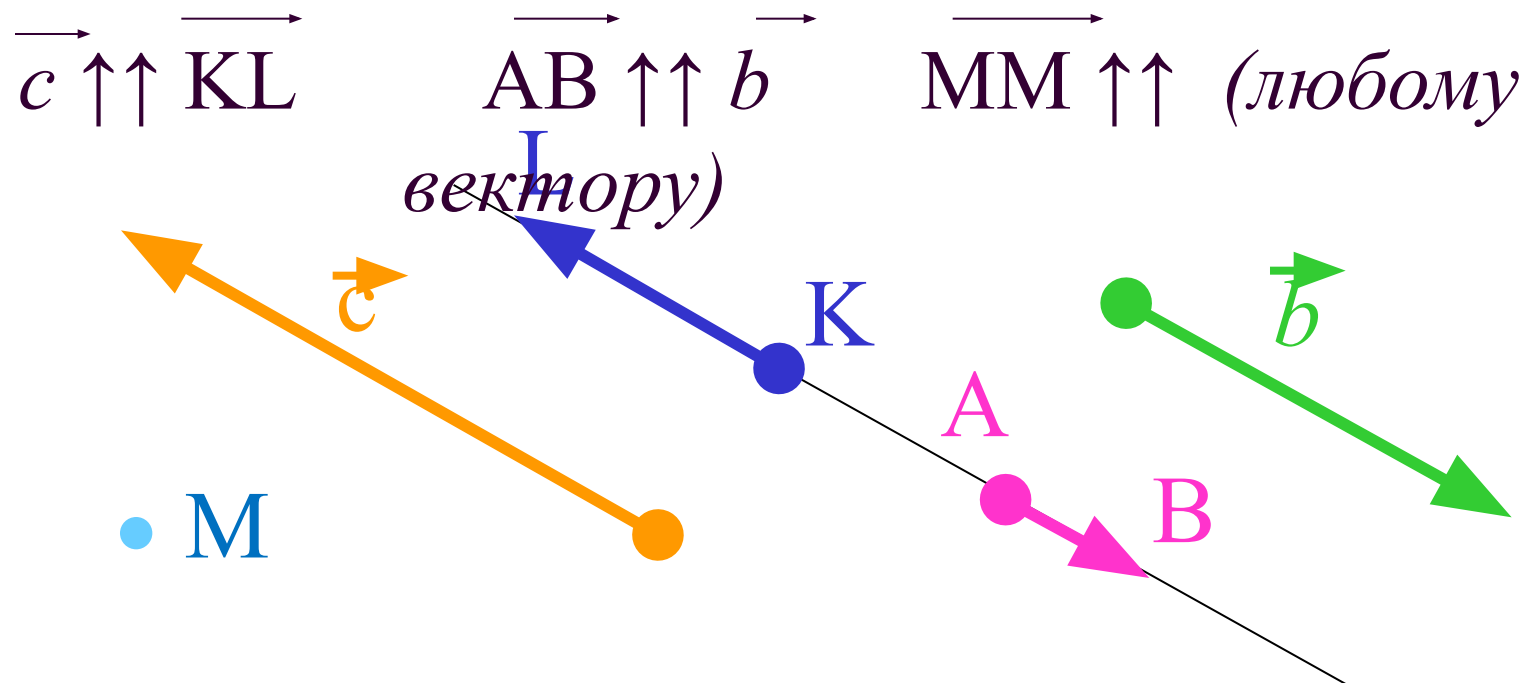
Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых



*Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору*

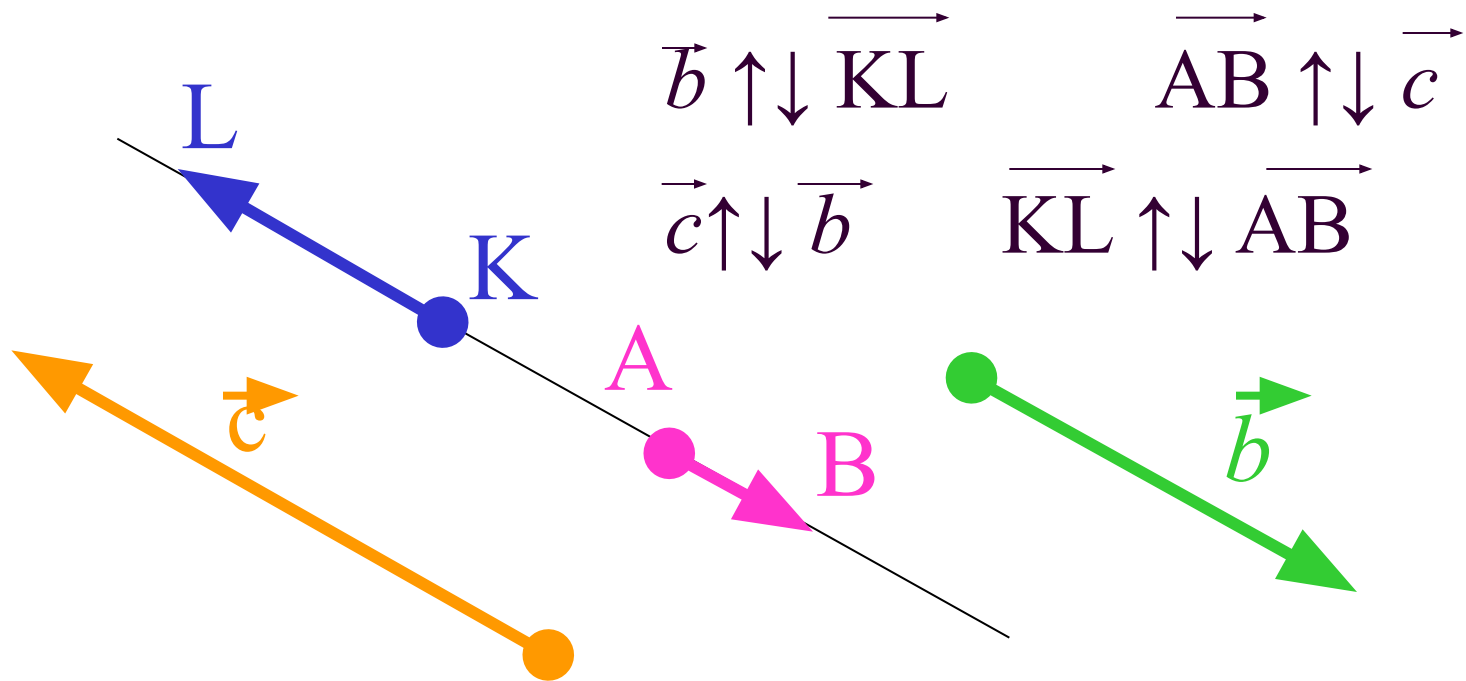
# Сонаправленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются **сонаправленными** векторами



# Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются **противоположно направленными** векторами

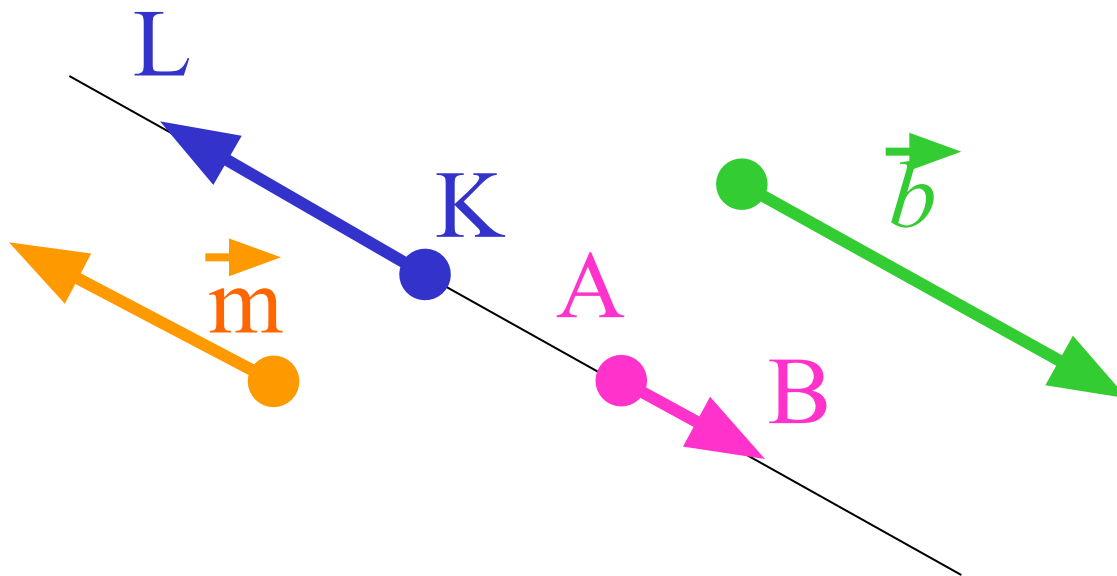


# Равенство векторов

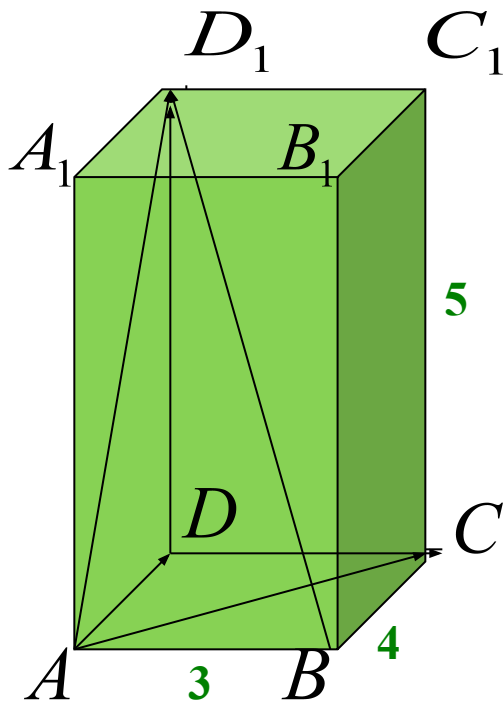
Векторы называются *равными*, если:

- 1) они сонаправлены ;
- 2) их длины равны.

$$\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}, \quad |\vec{m}| = |\overrightarrow{KL}| \text{ след-но } \vec{m} = \overrightarrow{KL}$$



# Векторы в пространстве



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямоугольный параллелепипед.  
 $AB = 3, BC = 4, CC_1 = 5$ .

Назовите векторы, равные векторам  
 $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CC}_1$ .

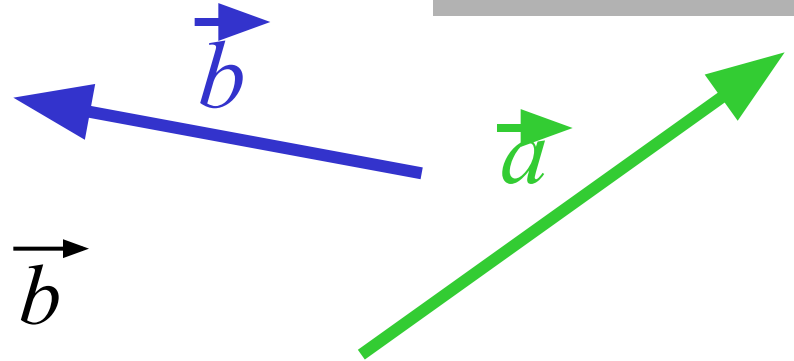
Назовите длины векторов :  
 $\vec{AD}, \vec{AA}_1, \vec{AD}_1, \vec{AC}, \vec{BD}_1$ .



# Сложение векторов

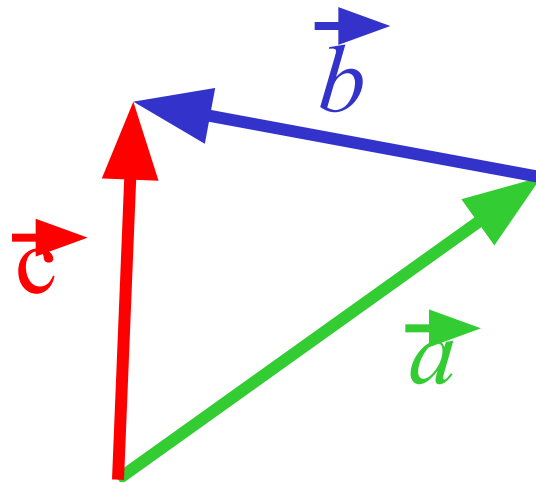
## Правило треугольника

Дано:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$



Построить:  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Построение:

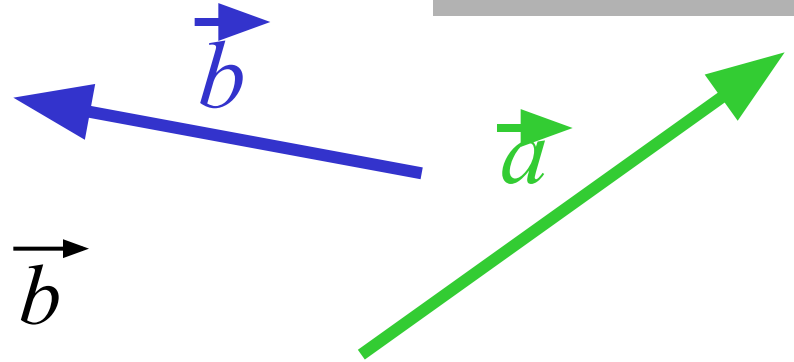


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

# Сложение векторов

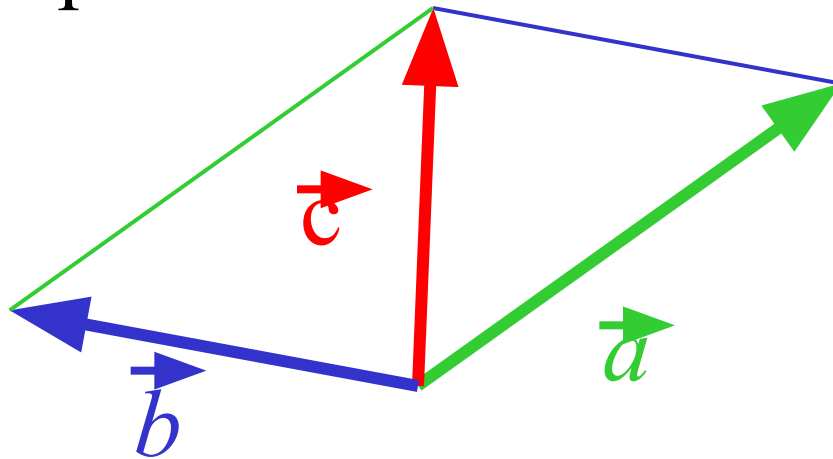
## Правило параллелограмма

Дано:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$



Построить:  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

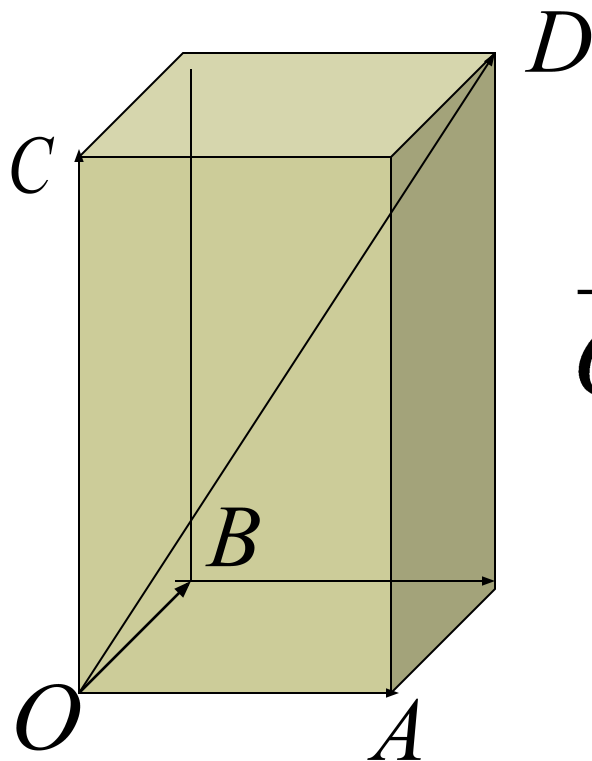
Построение:



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

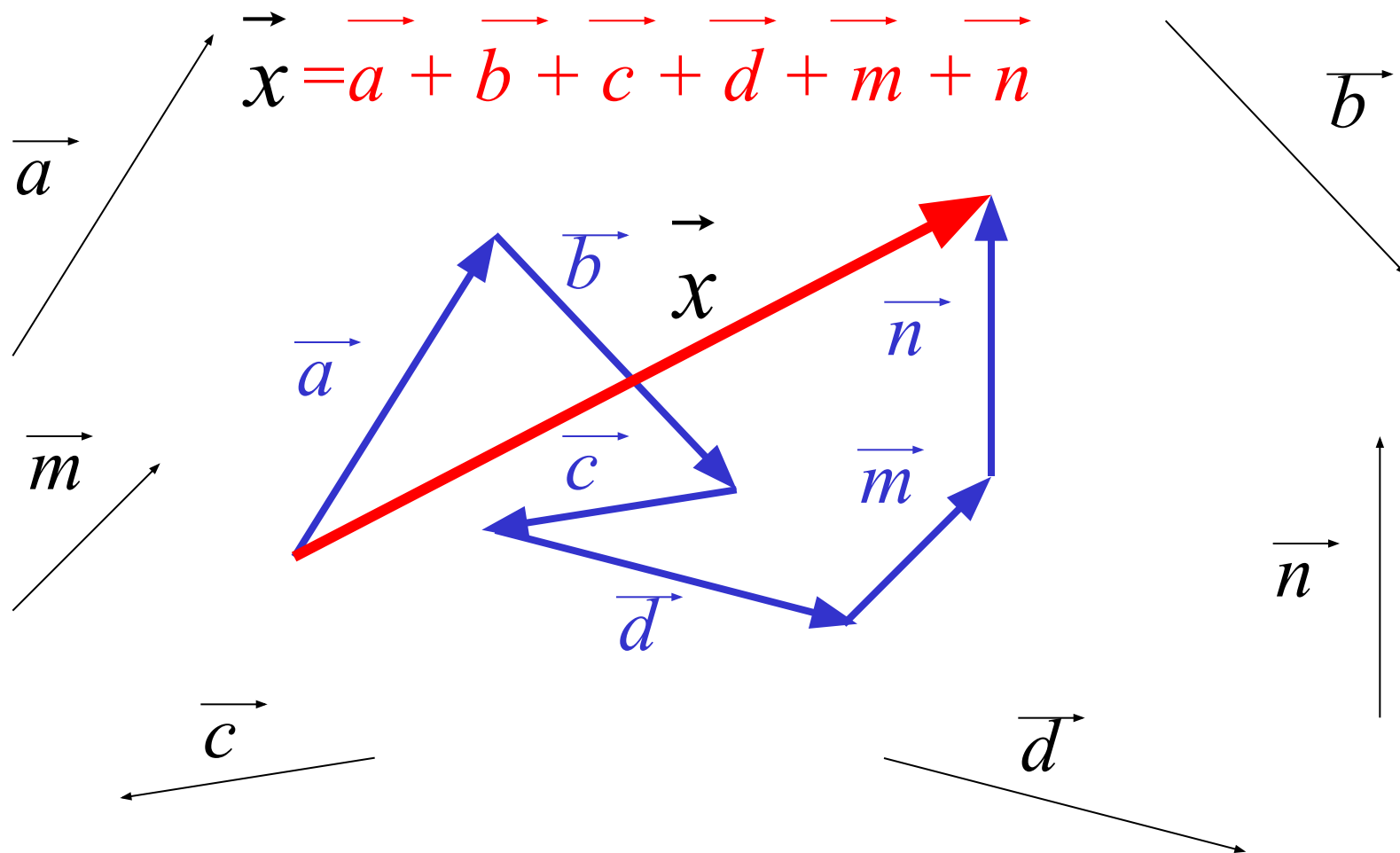
# Правило параллелепипеда

---



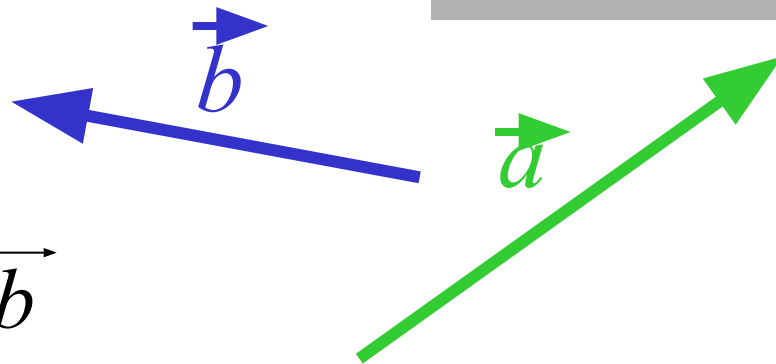
$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

# Правило многоугольника



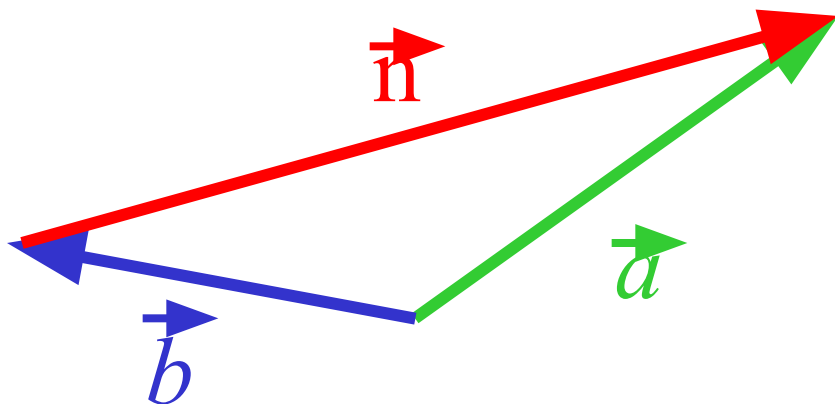
# Вычитание векторов

Дано:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$



Построить:  $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$

Построение:

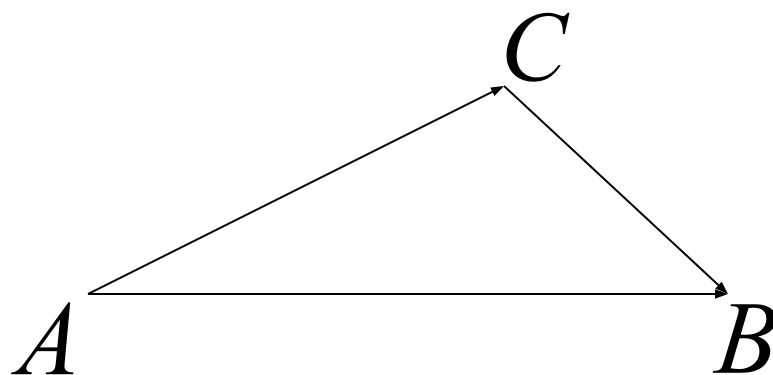
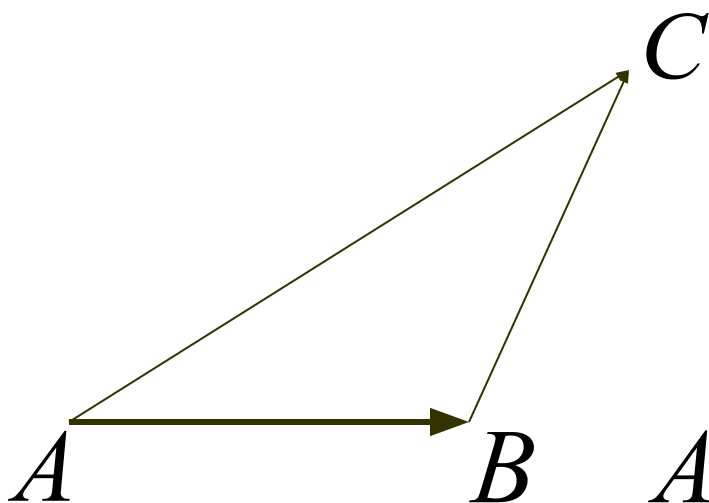


$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{n}$$

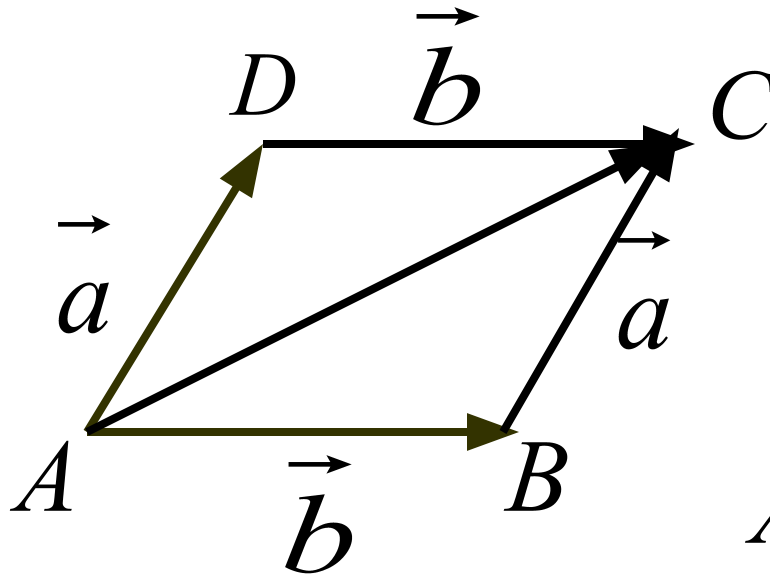
# Сумма и разность векторов

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

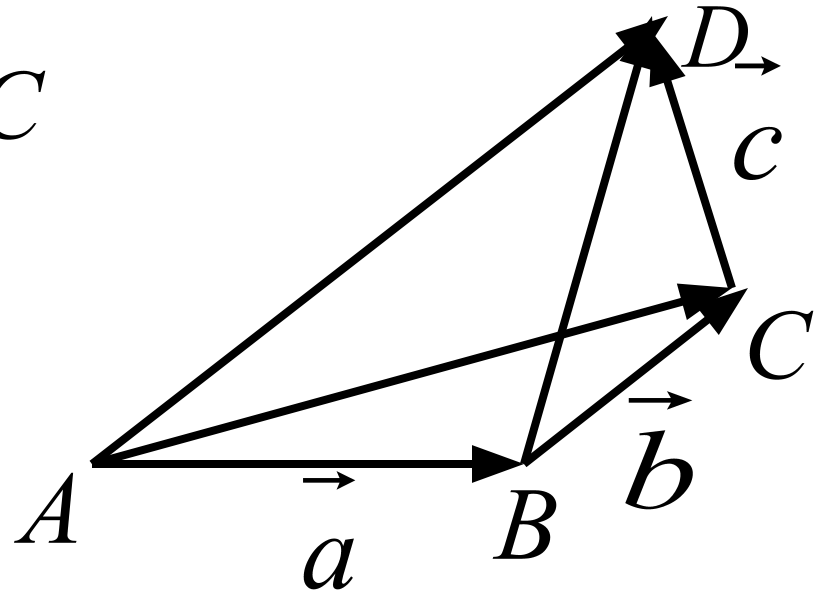


# Законы сложения векторов



$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \vec{a} + \vec{b}, \vec{AC} = \vec{b} + \vec{a}, \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}.\end{aligned}$$

ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ  
ЗАКОН



$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \vec{a} + \vec{b}, \vec{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \\ \vec{BD} &= \vec{b} + \vec{c}, \vec{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$

СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

[Назад](#)

# Умножение вектора $\vec{a}$ на число $k$

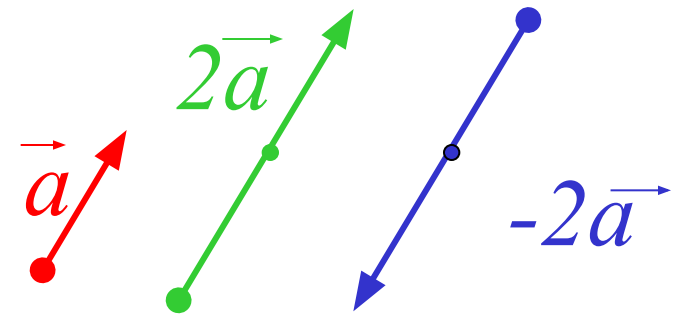
$$k \cdot \vec{a} = \vec{b},$$

$|\vec{a}| \neq 0$ ,  $k$  – произвольное число

$$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|,$$

если  $k \geq 0$ , то  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

если  $k < 0$ , то  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Для любых чисел  $k, l$  и любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  справедливы равенства:

1°.  $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$  (сочетательный закон),

2°.  $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$  (первый распределительный закон),

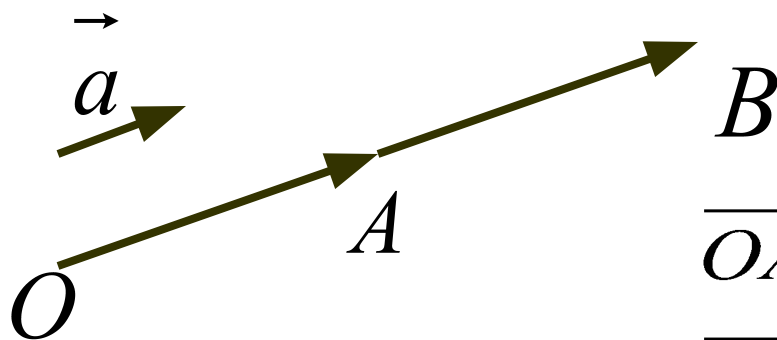
3°.  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$  (второй распределительный закон).



# Умножение вектора на число

## Сочетательный закон

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$



$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{a}, \overrightarrow{OB} = 6\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot (3\vec{a})$$

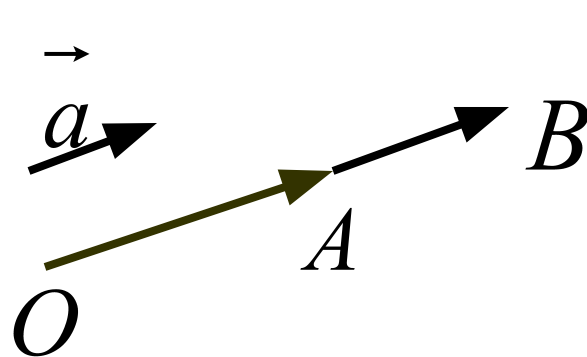
$$6\vec{a} = 2(3\vec{a})$$

$$(2 \cdot 3)\vec{a} = 2 \cdot (3\vec{a})$$

# Умножение вектора на число

## Первый распределительный закон

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$



$$\vec{OA} = 3\vec{a},$$

$$\vec{AB} = 2\vec{a}$$

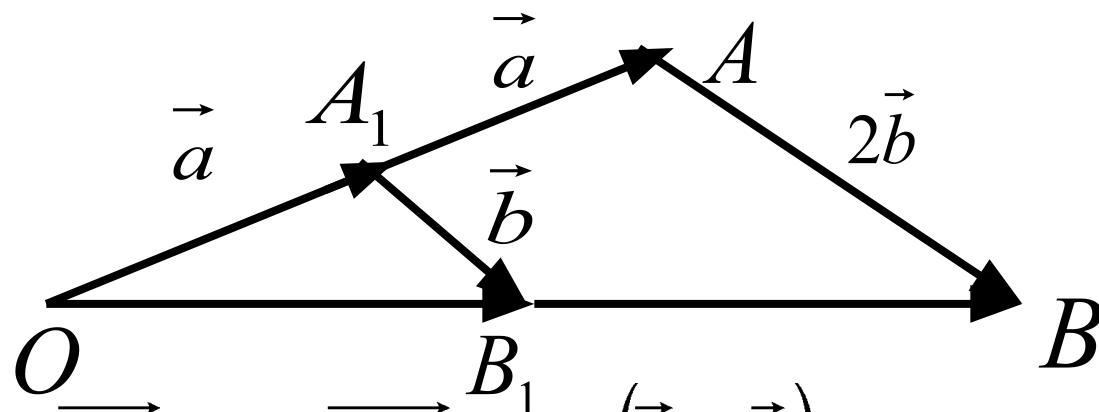
$$\vec{OB} = 5\vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$5\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}, \text{ тогда } (3 + 2)\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$$

# Умножение вектора на число

## Второй распределительный закон

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$



$$1) \vec{OB} = 2 \cdot \vec{OA_1} = 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}),$$

$$2) \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}, \quad \vec{OB} = 2\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\text{следовательно} \quad 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

# Компланарные векторы

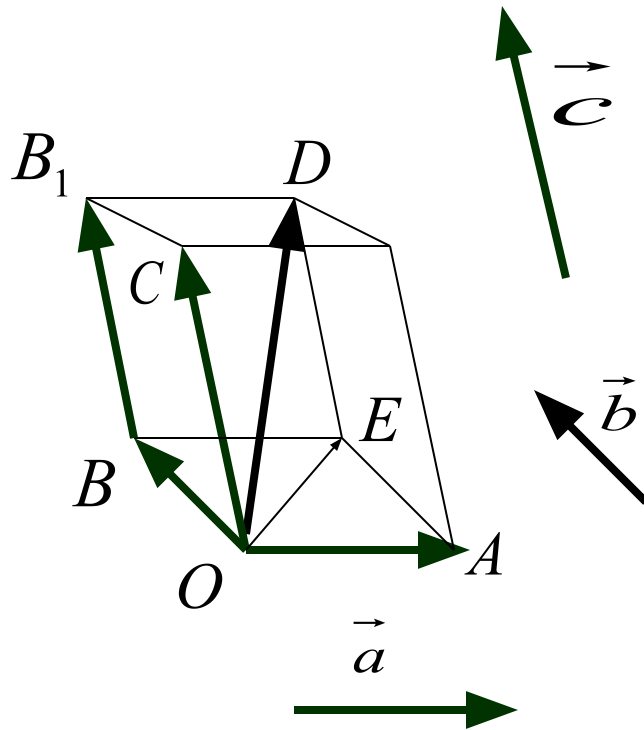
---

Векторы называются *компланарными*, если при откладывании их от одной точки они будут лежать в одной плоскости.

## Замечания

- Если хотя бы один из трёх векторов — нулевой, то три вектора считаются **компланарными**.
- Тройка векторов, содержащая пару коллинеарных векторов, **компланарна**.

# Компланарные векторы



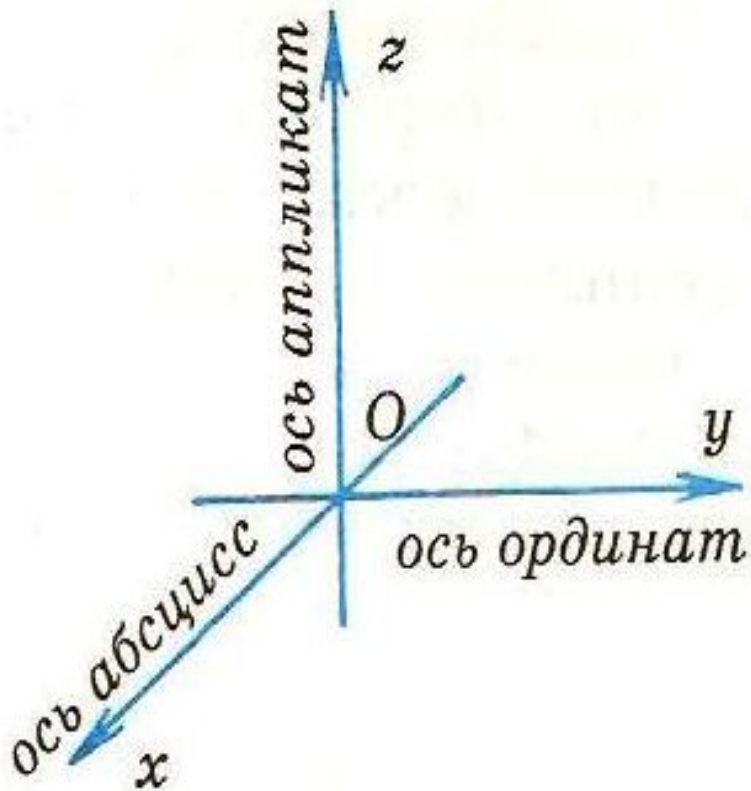
Компланарные векторы

$\vec{BB_1}$ ,  $\vec{OD}$  и  $\vec{OE}$ .

Некомпланарные векторы

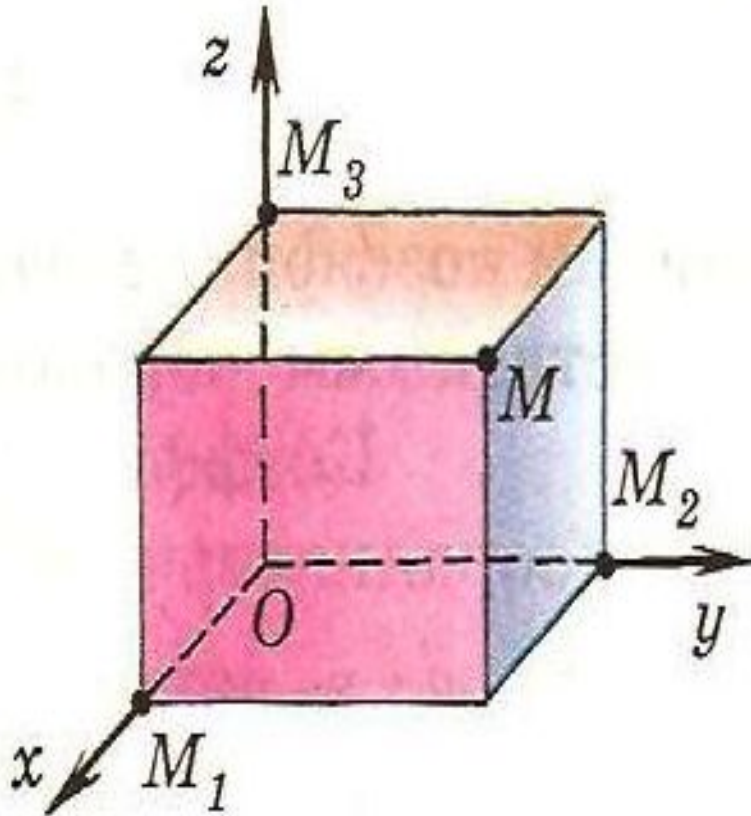
$\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$ .

# Прямоугольная система координат



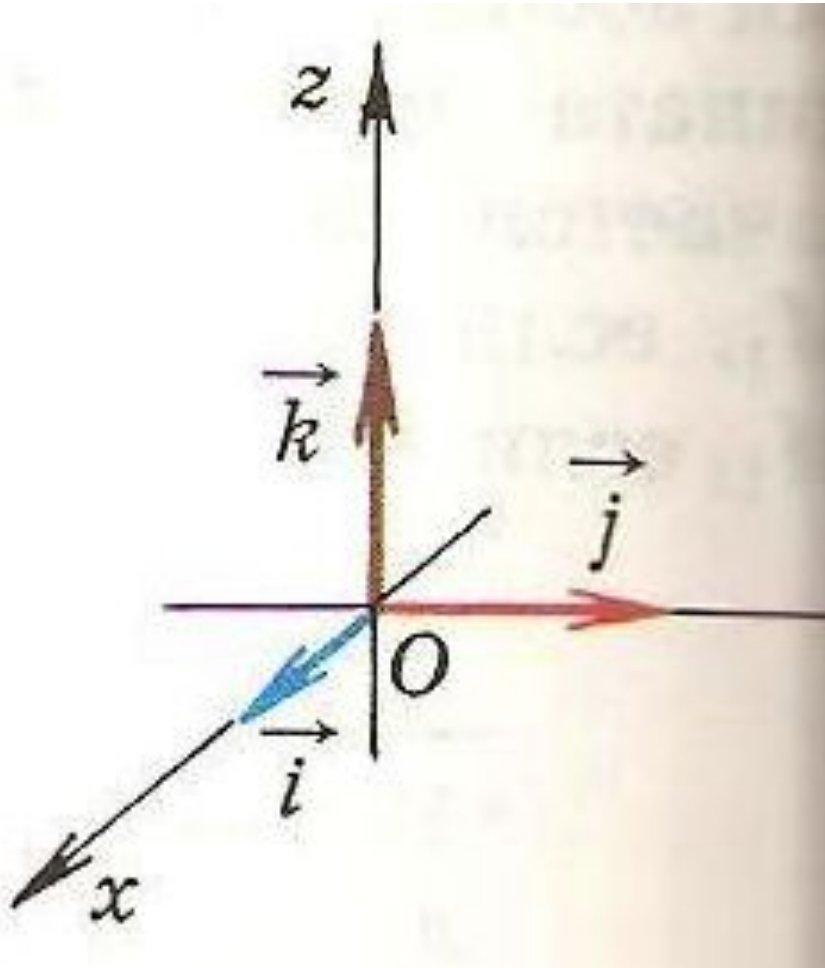
- Тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат.
- Впервые введена Р. Декартом (1596-1650)

# Координаты точки



- Каждая точка в пространстве задаётся тройкой чисел  $(x, y, z)$  называемых координатами точки в пространстве

# Координаты вектора



- Векторы ( $i$ ,  $j$ ,  $k$ ) единичные векторы
- Любой вектор можно разложить по координатным векторам

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$



# Длина вектора

---

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$$

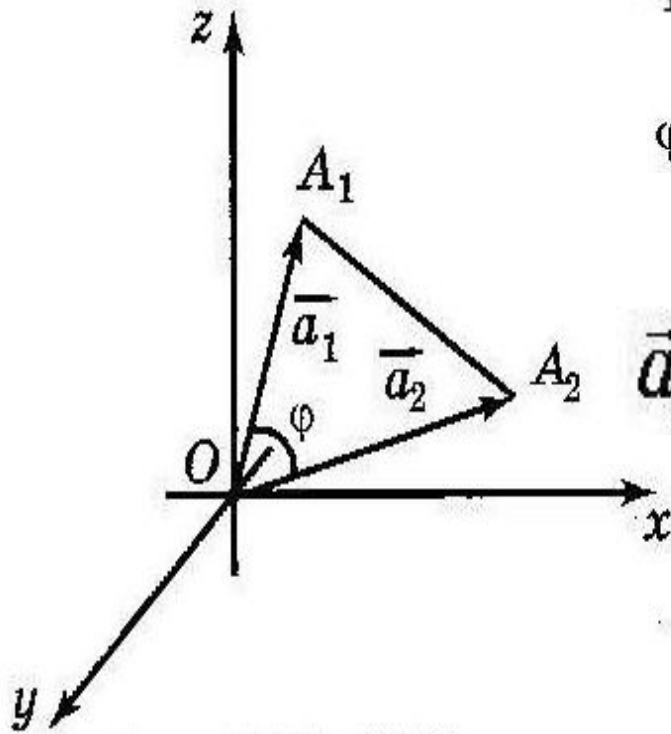
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

# Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,$$

$\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ .



$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

# Свойства скалярного произведения. Угол между векторами.

---

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} .$$

$$2. (t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b}) .$$

$$3. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} .$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$