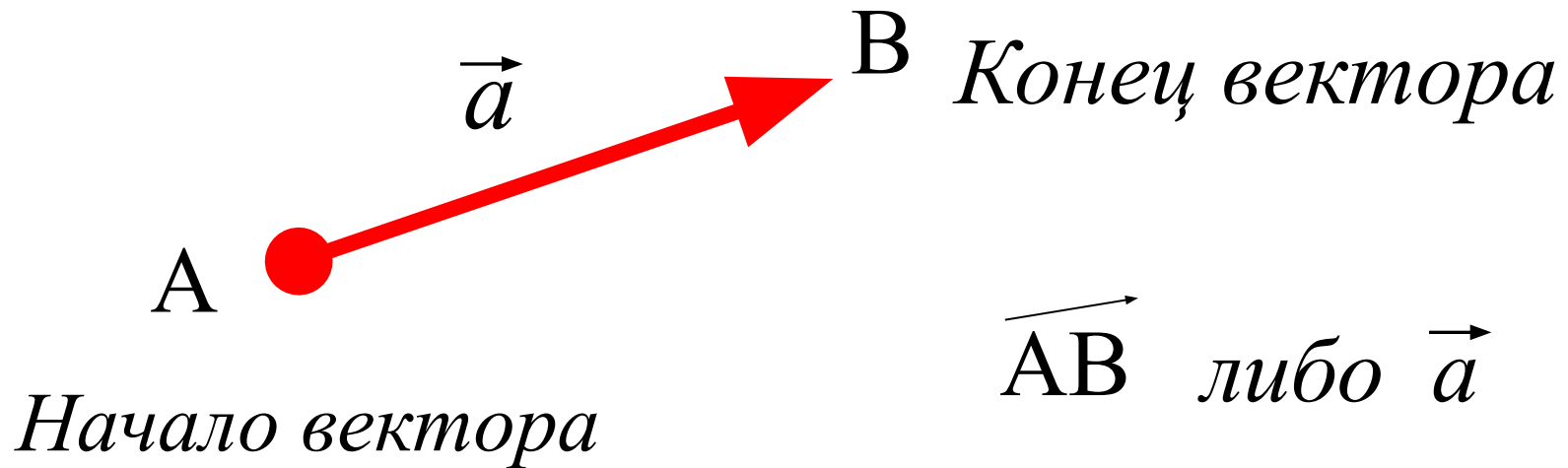
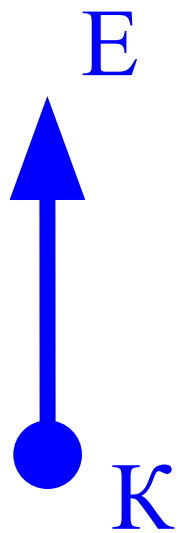

**Векторы в
пространстве**

Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какая его граничная точка является началом, а какая - концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**



Длина вектора



Длиной вектора или модулем ненулевого вектора называется длина отрезка

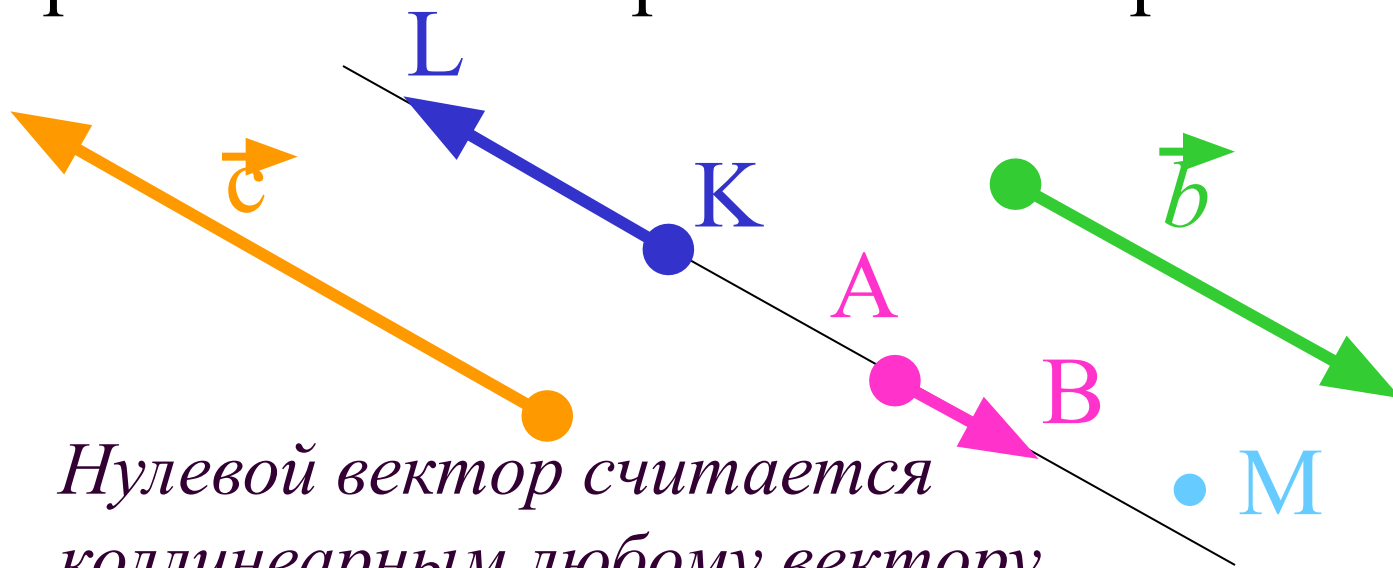
$$|\overrightarrow{KE}| = |KE| \quad \text{длина вектора } \overrightarrow{KE}$$

- M вектор \overrightarrow{MM} - нулевой вектор

$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$

Коллинеарные векторы

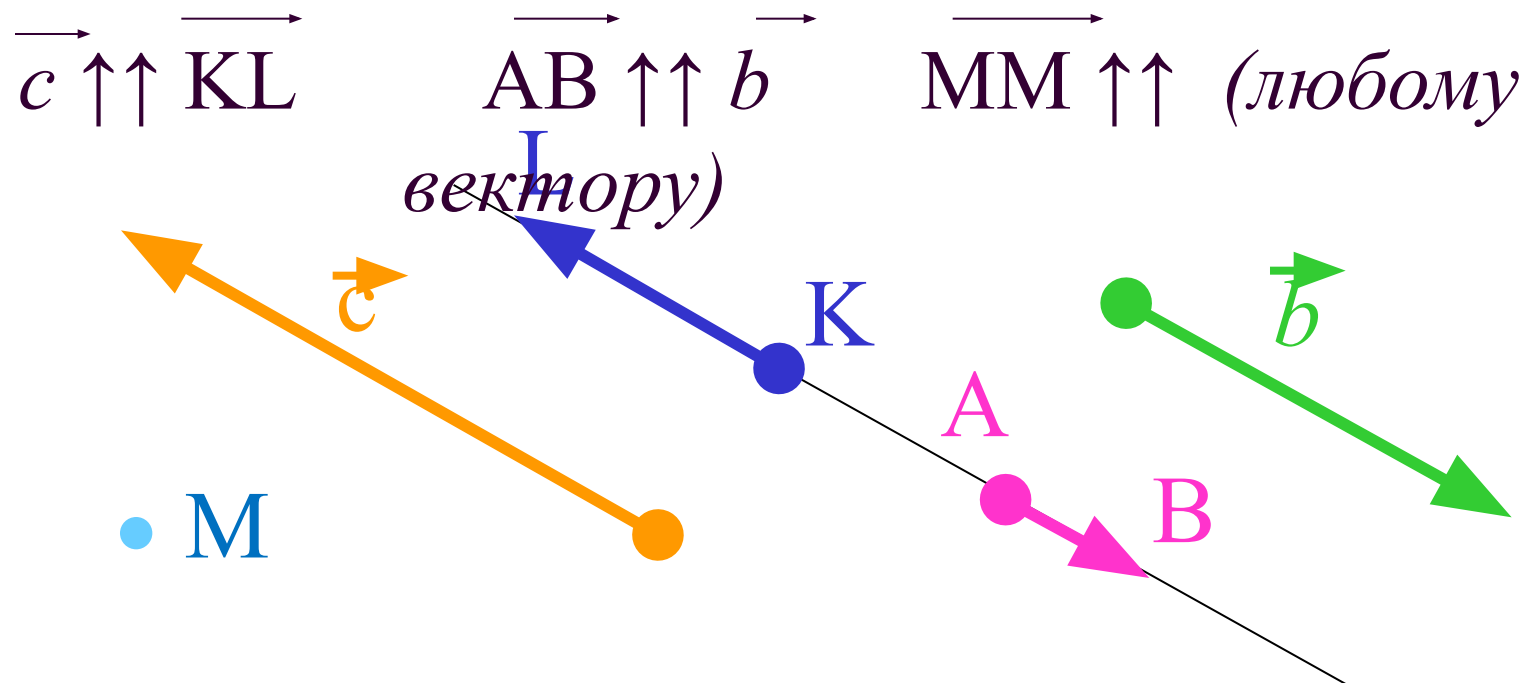
Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых



Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору

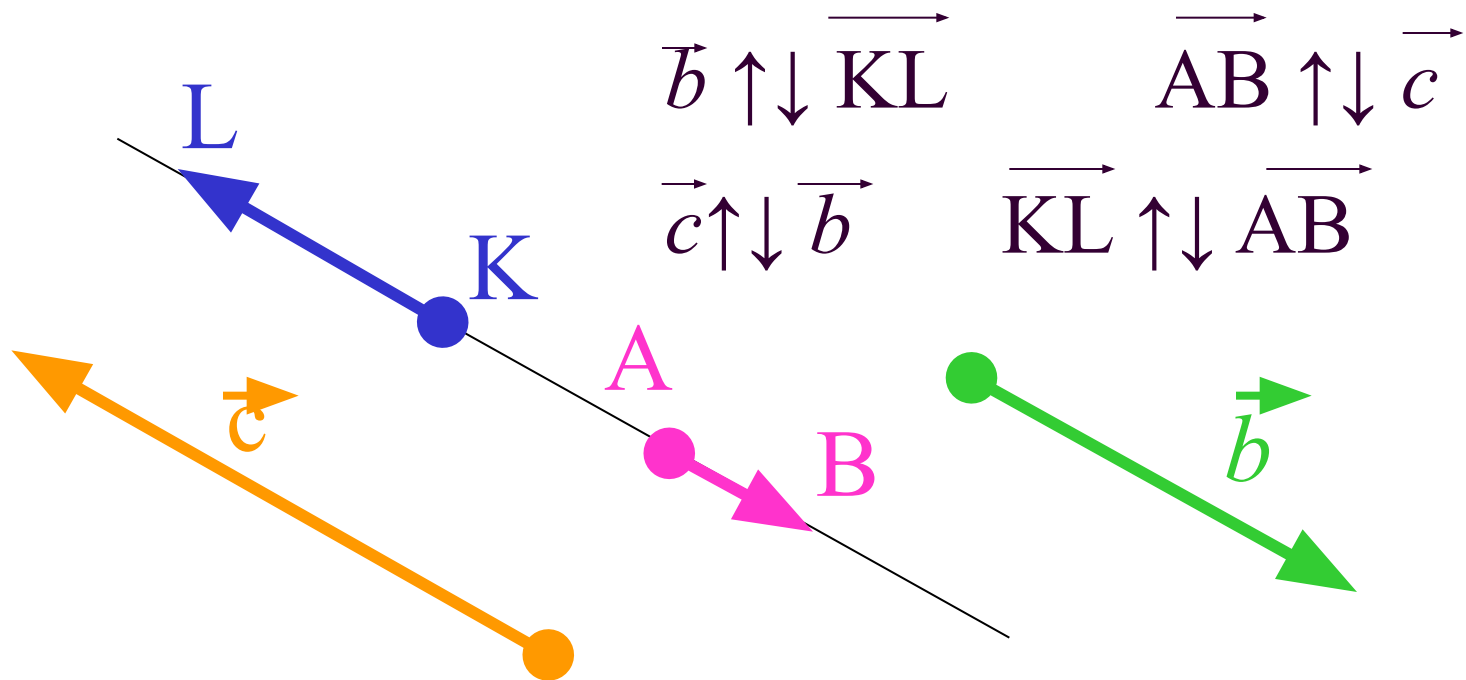
Сонаправленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются **сонаправленными** векторами



Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются **противоположно направленными** векторами

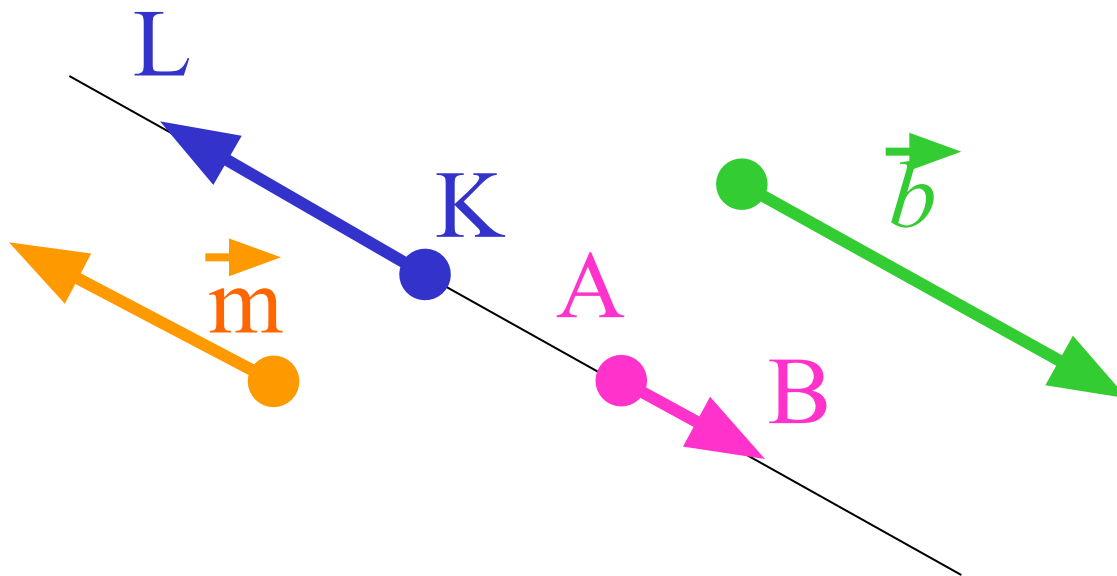


Равенство векторов

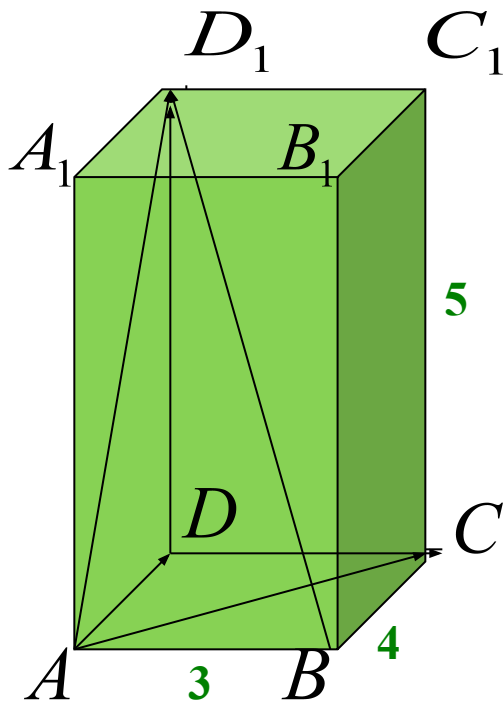
Векторы называются *равными*, если:

- 1) они сонаправлены ;
- 2) их длины равны.

$$\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}, \quad |\vec{m}| = |\overrightarrow{KL}| \text{ след-но } \vec{m} = \overrightarrow{KL}$$



Векторы в пространстве



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед.
 $AB = 3, BC = 4, CC_1 = 5$.

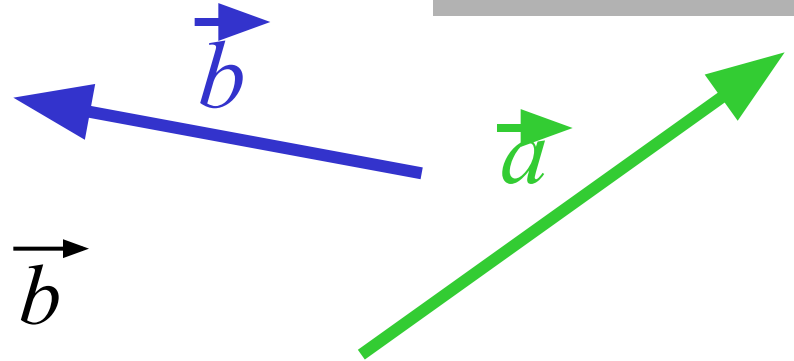
Назовите векторы, равные векторам
 $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CC}_1$.

Назовите длины векторов :
 $\vec{AD}, \vec{AA}_1, \vec{AD}_1, \vec{AC}, \vec{BD}_1$.

Сложение векторов

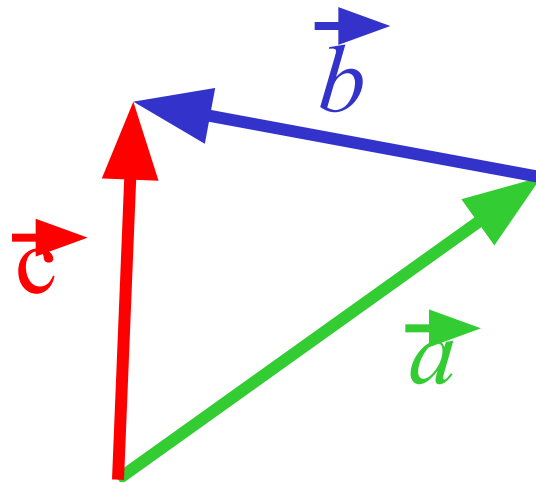
Правило треугольника

Дано: \vec{a} , \vec{b}



Построить: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Построение:

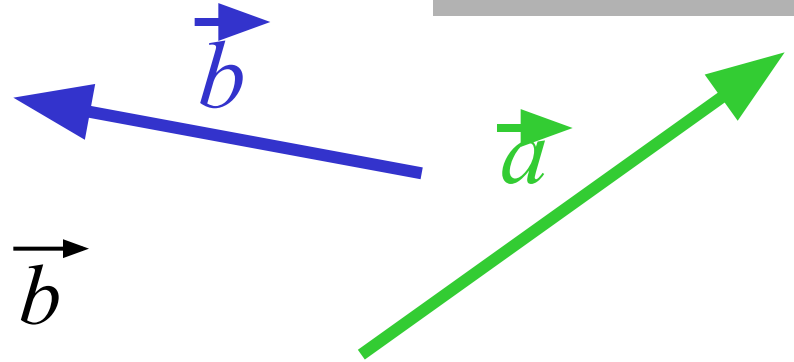


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Сложение векторов

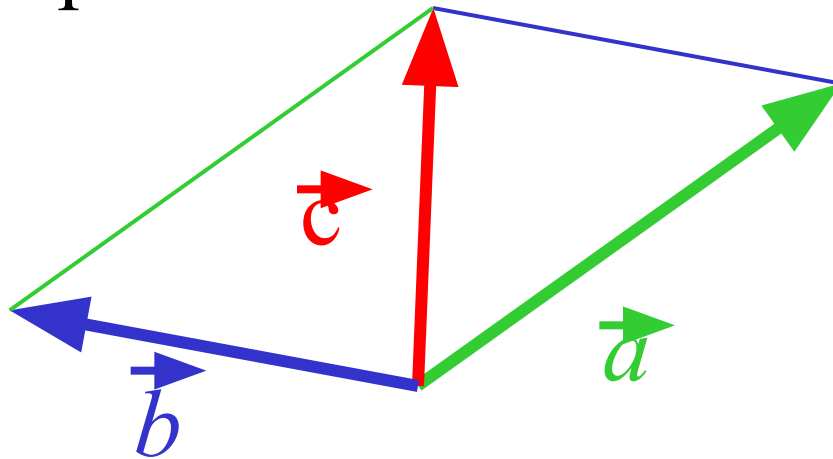
Правило параллелограмма

Дано: \vec{a} , \vec{b}



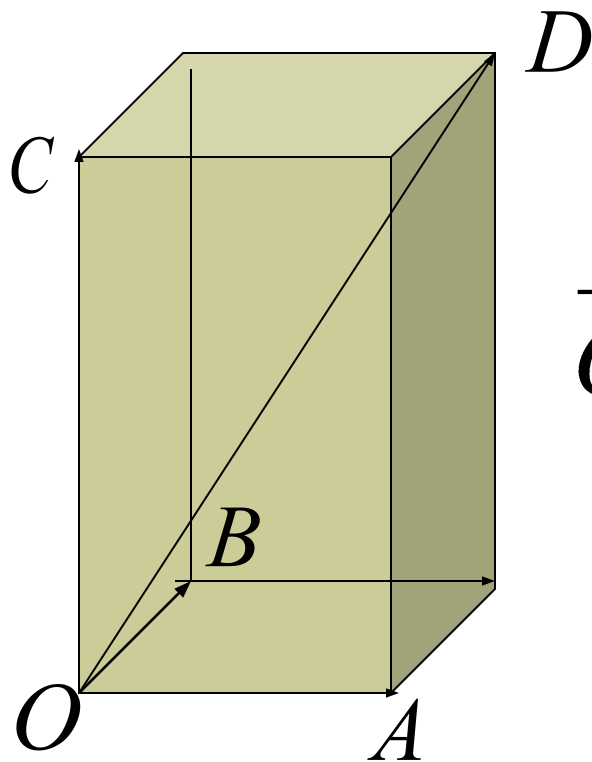
Построить: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Построение:



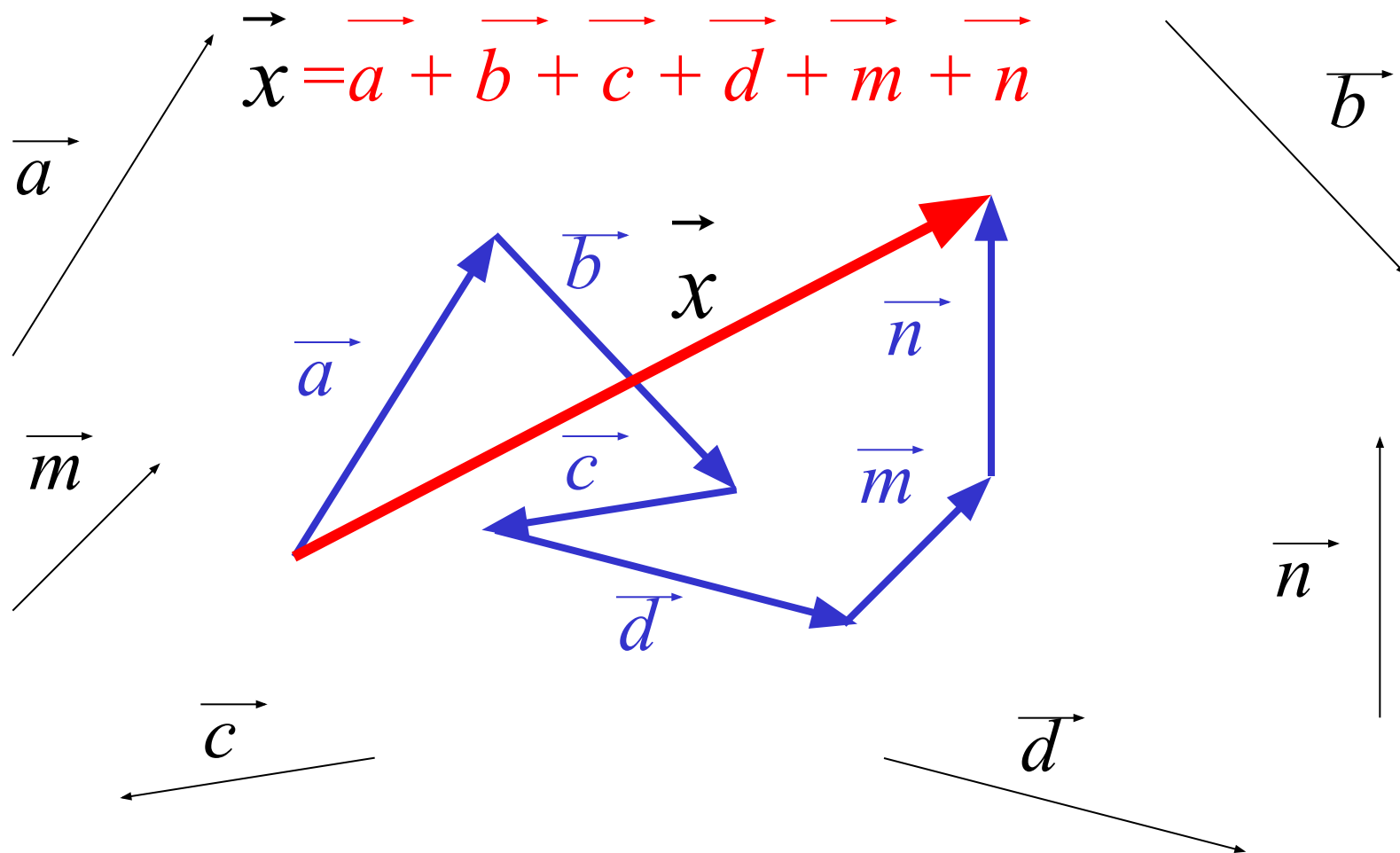
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Правило параллелепипеда



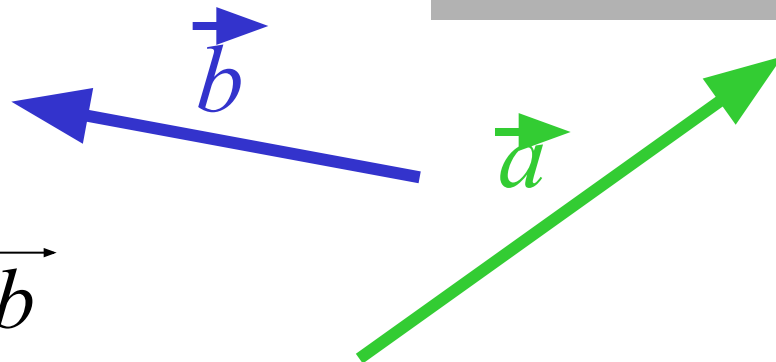
$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

Правило многоугольника



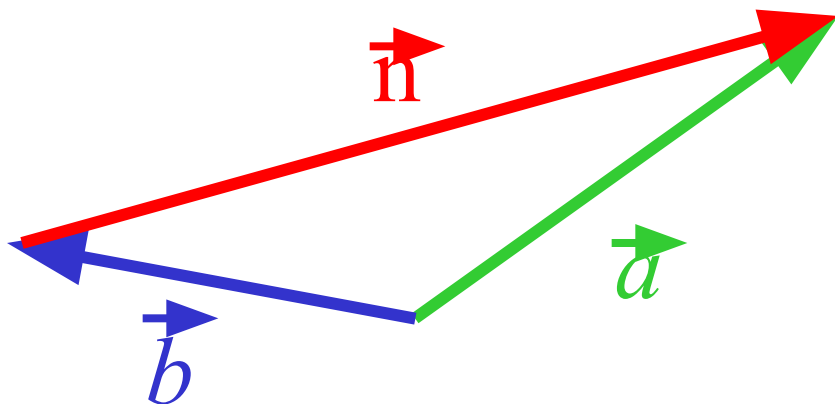
Вычитание векторов

Дано: \vec{a} , \vec{b}



Построить: $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$

Построение:

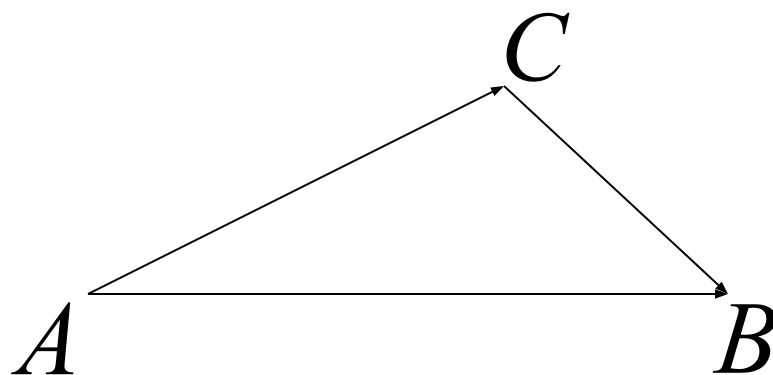
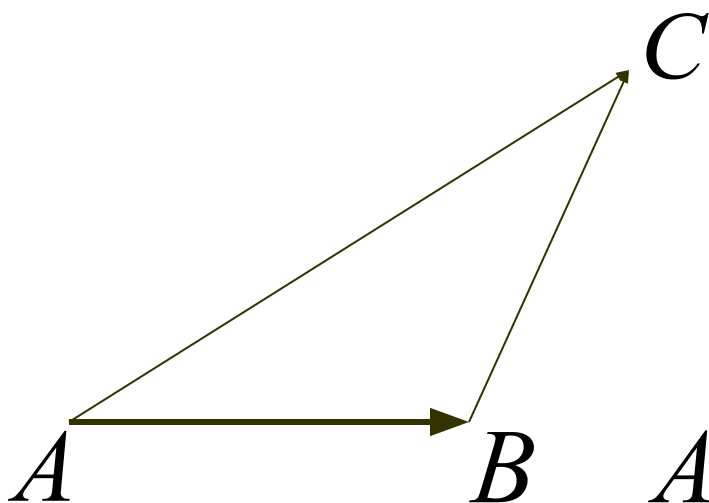


$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{n}$$

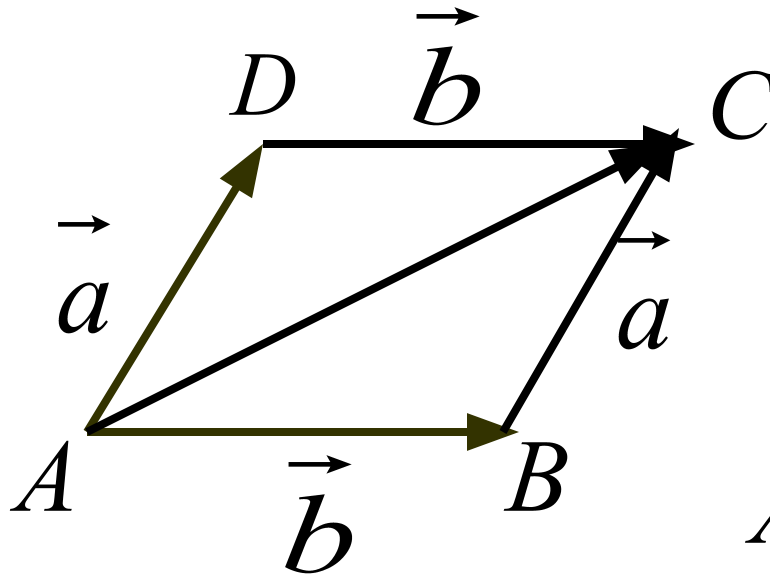
Сумма и разность векторов

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

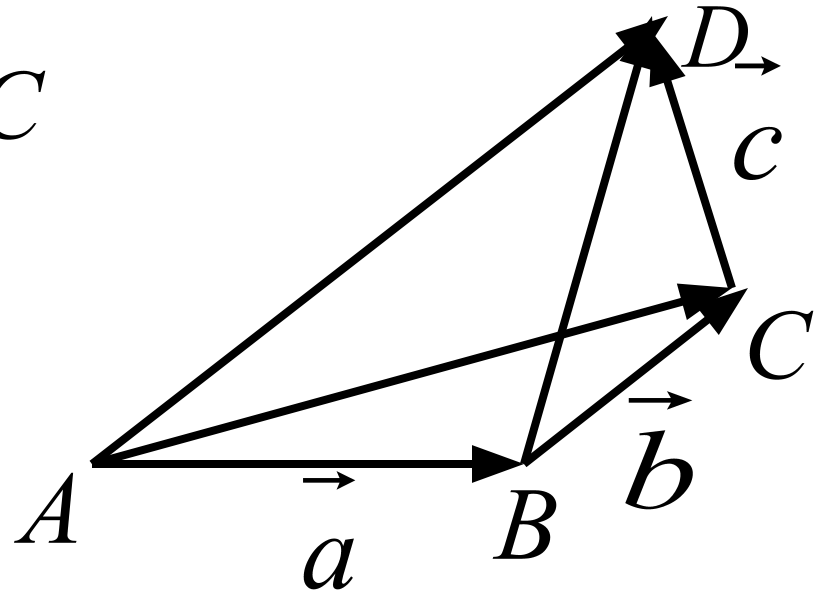


Законы сложения векторов



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a}, \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}.\end{aligned}$$

ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ
ЗАКОН



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \\ \overrightarrow{BD} &= \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$

СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

[Назад](#)

Умножение вектора \vec{a} на число k

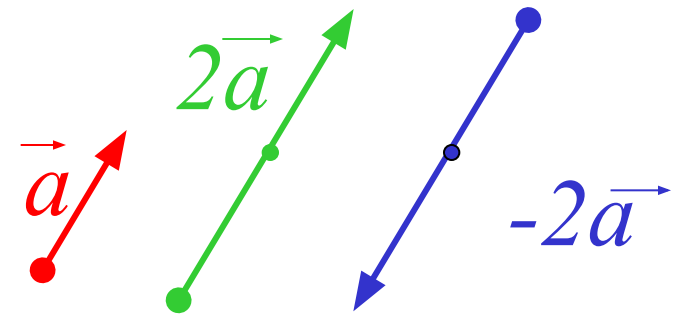
$$k \cdot \vec{a} = \vec{b},$$

$|\vec{a}| \neq 0$, k – произвольное число

$$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|,$$

если $k \geq 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

если $k < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Для любых чисел k, l и любых векторов \vec{a}, \vec{b} справедливы равенства:

1°. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон),

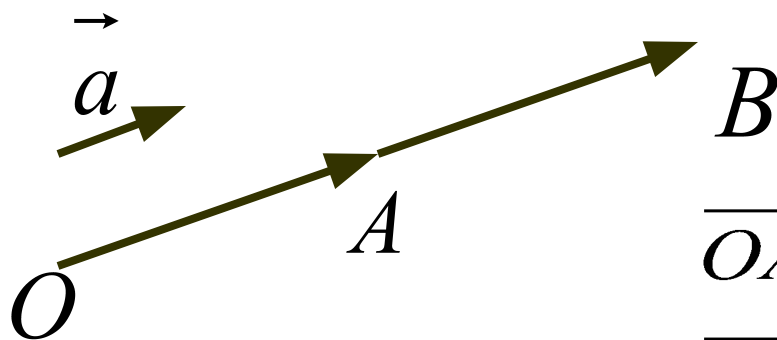
2°. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон),

3°. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

Умножение вектора на число

Сочетательный закон

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$



$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{a}, \overrightarrow{OB} = 6\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot (3\vec{a})$$

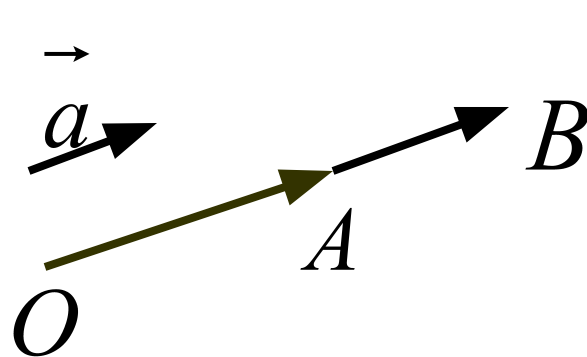
$$6\vec{a} = 2(3\vec{a})$$

$$(2 \cdot 3)\vec{a} = 2 \cdot (3\vec{a})$$

Умножение вектора на число

Первый распределительный закон

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$



$$\vec{OA} = 3\vec{a},$$

$$\vec{AB} = 2\vec{a}$$

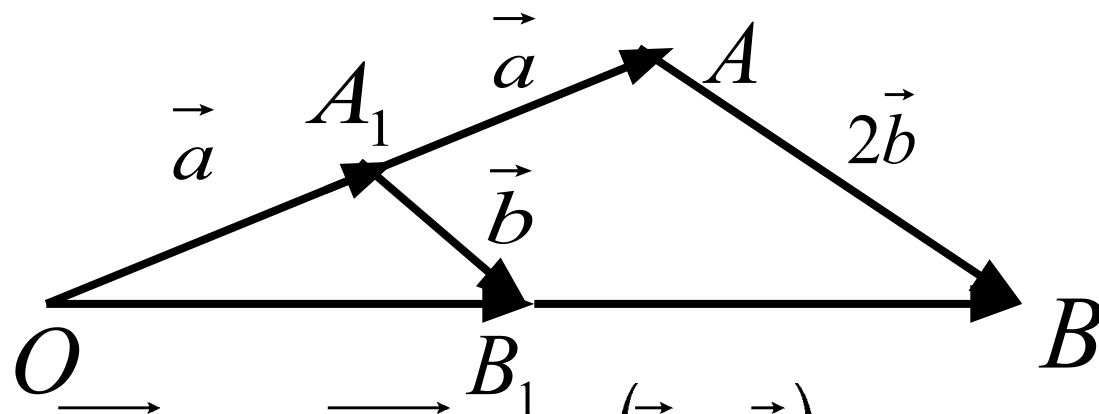
$$\vec{OB} = 5\vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$5\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}, \text{ тогда } (3 + 2)\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$$

Умножение вектора на число

Второй распределительный закон

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$



$$1) \vec{OB} = 2 \cdot \vec{OB_1} = 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}),$$

$$2) \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}, \quad \vec{OB} = 2\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\text{следовательно} \quad 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

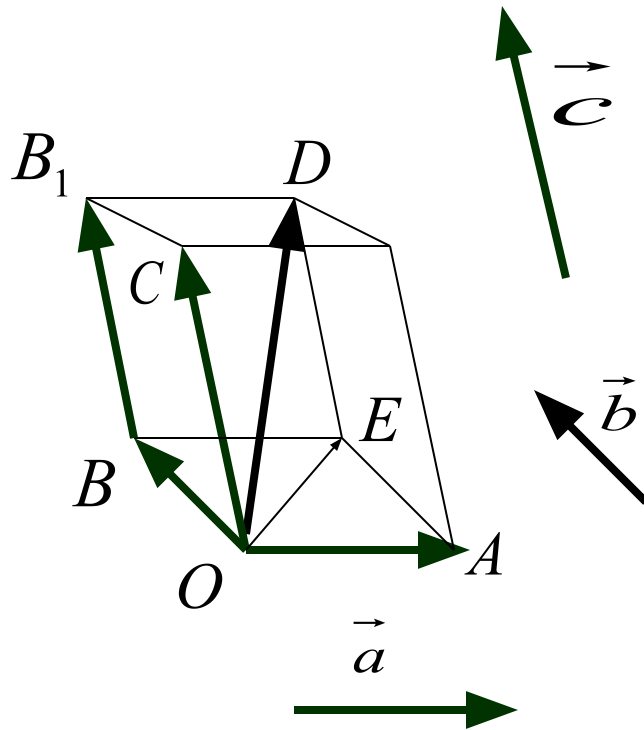
Компланарные векторы

Векторы называются *компланарными*, если при откладывании их от одной точки они будут лежать в одной плоскости.

Замечания

- Если хотя бы один из трёх векторов — нулевой, то три вектора считаются **компланарными**.
- Тройка векторов, содержащая пару коллинеарных векторов, **компланарна**.

Компланарные векторы



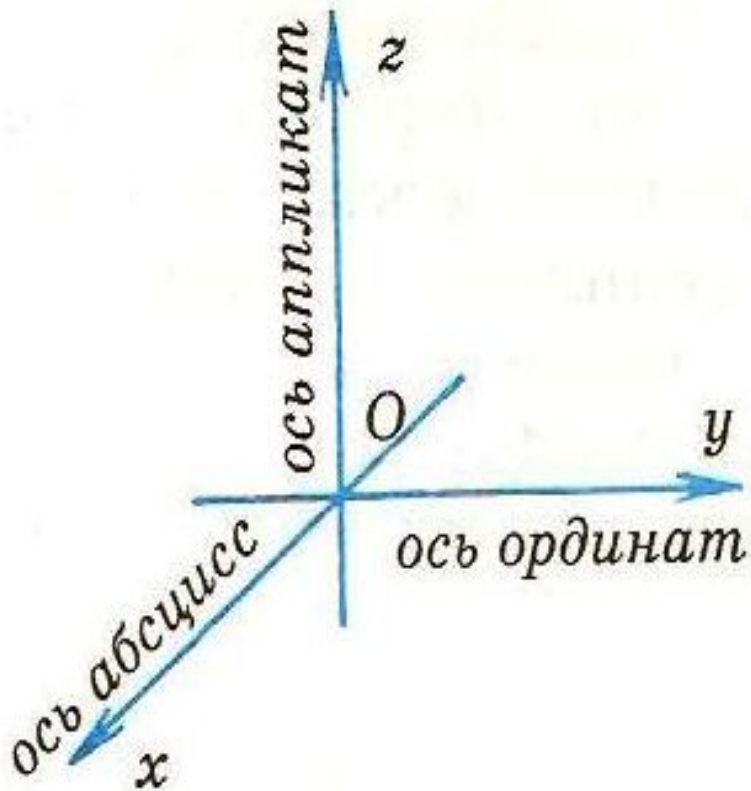
Компланарные векторы

$\vec{BB_1}$, \vec{OD} и \vec{OE} .

Некомпланарные векторы

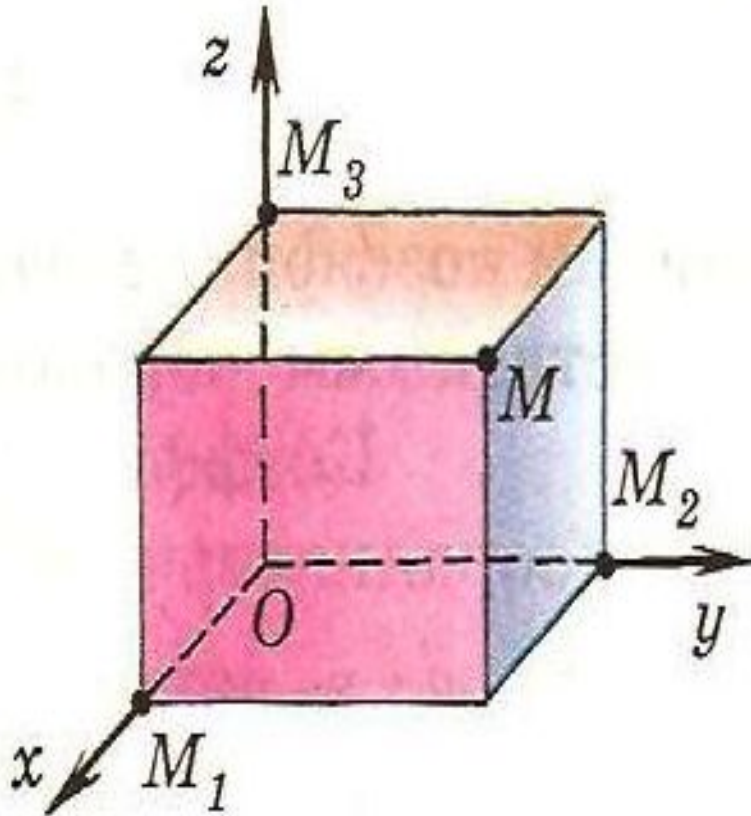
\vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} .

Прямоугольная система координат



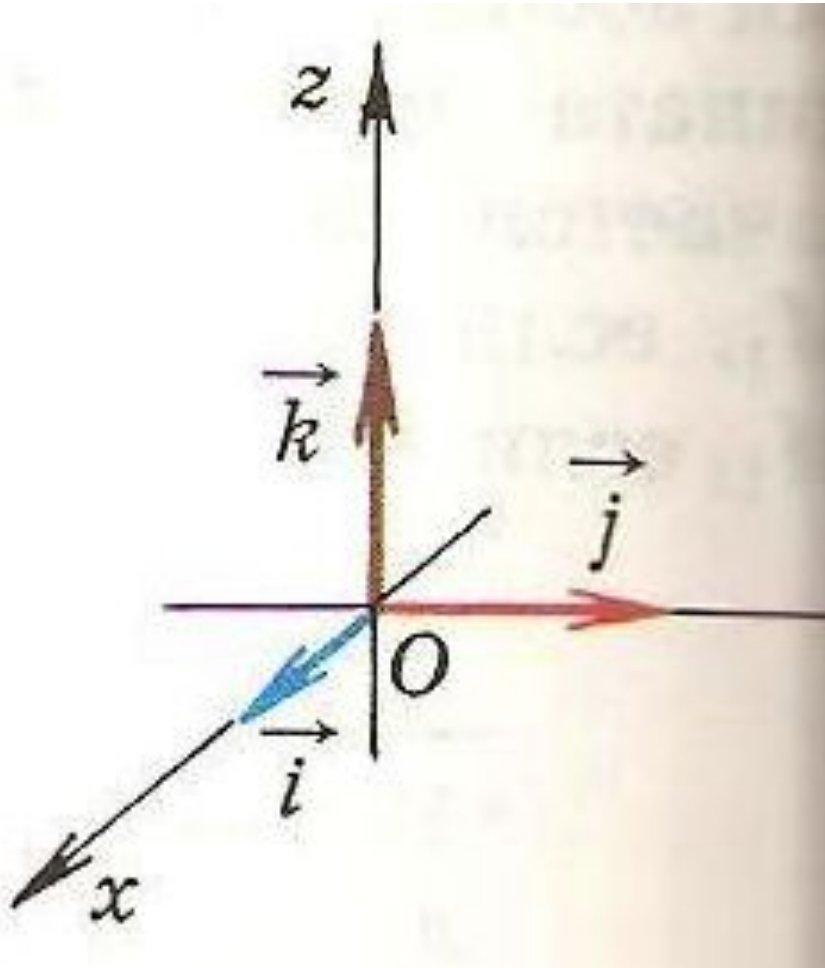
- Тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат.
- Впервые введена Р. Декартом (1596-1650)

Координаты точки



- Каждая точка в пространстве задаётся тройкой чисел (x, y, z) называемых координатами точки в пространстве

Координаты вектора



- Векторы (i , j , k) единичные векторы
- Любой вектор можно разложить по координатным векторам

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

Длина вектора

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$$

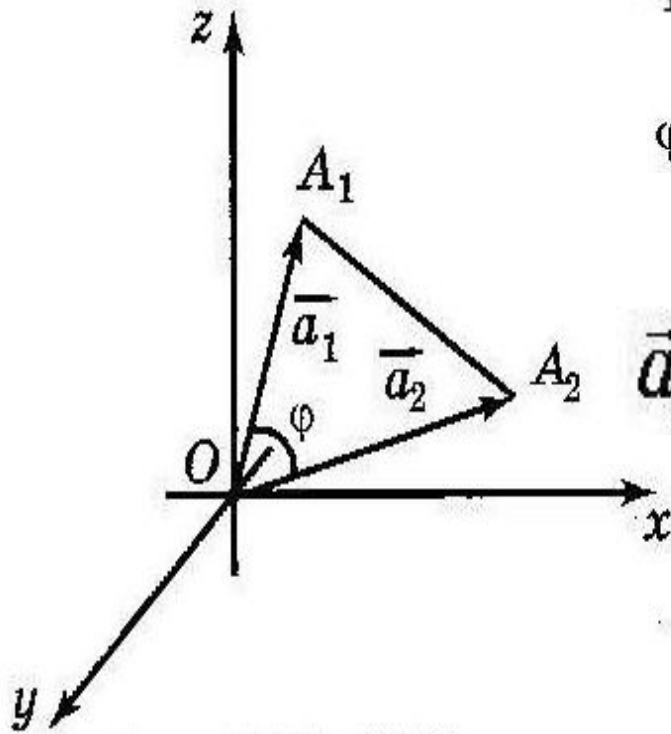
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,$$

φ — угол между векторами \vec{a}_1 и \vec{a}_2 .



$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Свойства скалярного произведения. Угол между векторами.

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} .$$

$$2. (t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b}) .$$

$$3. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} .$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$