ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГБОУ №1392
им. Д. Рябинкина

Давтян Римма
Артемовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков по x.

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ПОРЯДОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Примеры.

Первый порядок $y' = xy$

Второй порядок $y'' + 2y' + y = 0$

Третий порядок $y''' = e^{2x}$

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Дифференциальное уравнение называется **линейным**, если его левая часть является многочленом от неизвестной функции и ее производных различных порядков, то есть имеет общий вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$$

Коэффициенты линейного уравнения

Правая часть, свободный член

ОДНОРОДНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Дифференциальное уравнение называется **однородным**, если его правая часть равна нулю. В противном случае оно называется **неоднородным**.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

Коэффициенты линейного уравнения

Правая часть равна нулю.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно x.

Решить, или **проинтегрировать**, данное дифференциальное уравнение – означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется **интегральной кривой**.

ОБЩЕЕ И ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Общим решением дифференциального уравнения называется решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое получается из общего, если приписать входящим в него произвольным постоянным определенные значения.

ПРИМЕР

Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + y = 0$$

Легко сообразить, что sin x и cos x являются решениями.

Общее решение:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Частное решение: $$y = 2\sin x - 5\cos x$$

ПРОВЕРКА РЕШЕНИЙ

Если в результате решения некоторого дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то подставив эту функцию в уравнение, можно проверить правильность решения.

Пример. Функция: $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ есть решение уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Проверка.

$$y' = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x$$
$$y'' = (C_1 + 2C_2 + C_2 x)e^x$$
$$\Rightarrow \quad y'' - 2y' + y = 0$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение **разрешено относительно производной**, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y)$$