

Тема: Исследование функции на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

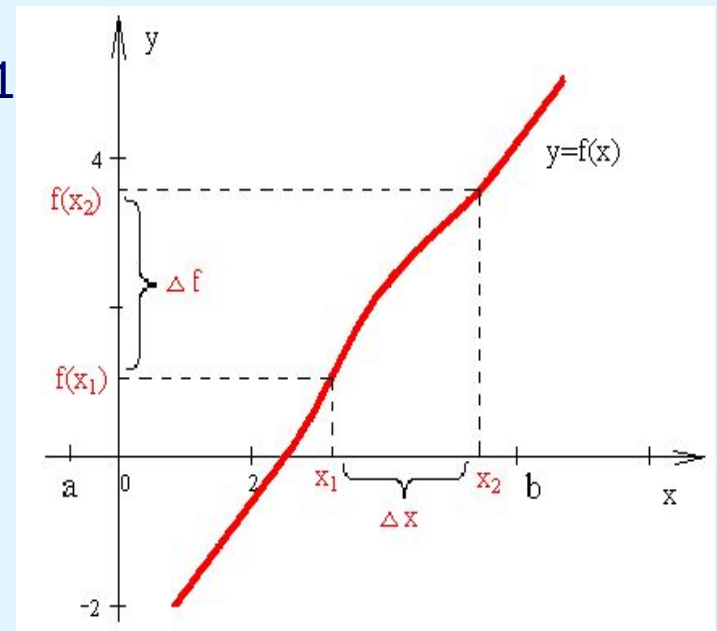
- Монотонность функции
- Экстремумы функции
- Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Возрастание и убывание функции

Опр. 1 Функция $y=f(x)$, определяемая на интервале $(a;b)$, называется **возрастающей** на этом интервале, если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_2 и x_1 – любые две точки из интервала, следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Если обозначить $\Delta x = x_2 - x_1$
и $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$, то

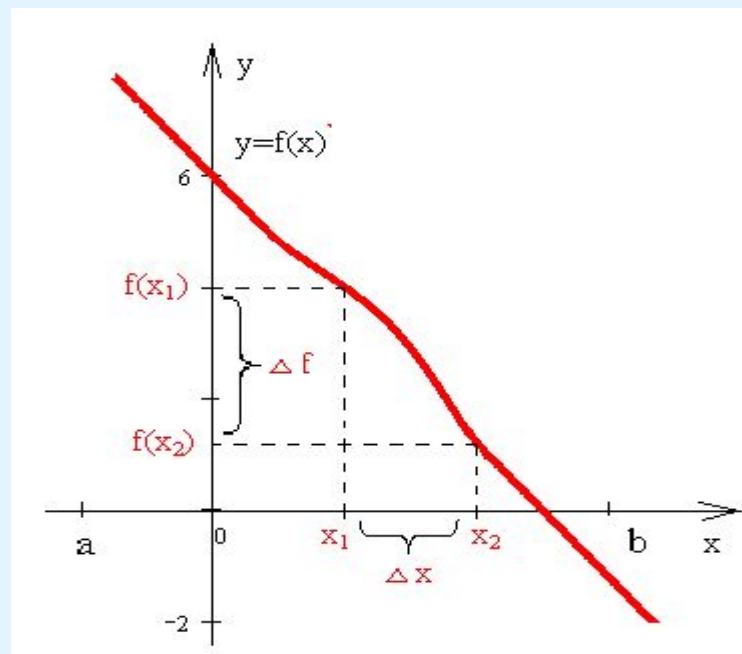
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$$



Опр. 2 Функция $y=f(x)$, определяемая на интервале $(a;b)$, называется **убывающей** на этом интервале, если из неравенства $x_2 > x_1$, следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Заметим, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$$



Теорема 1. (необходимое условие возрастания функции)

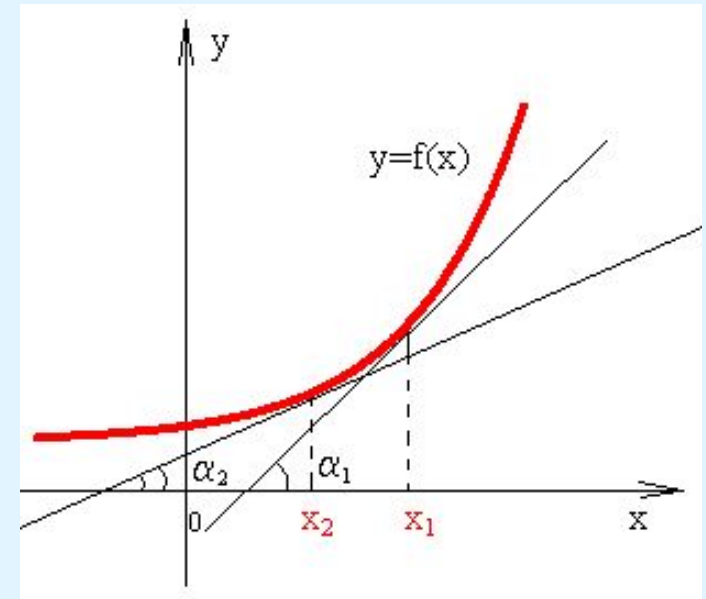
Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ возрастает, то ее производная не может быть отрицательной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x) \geq 0$ для $a < x < b$.

Доказательство: Пусть $y=f(x)$ возрастает на

$(a;b)$,
тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$

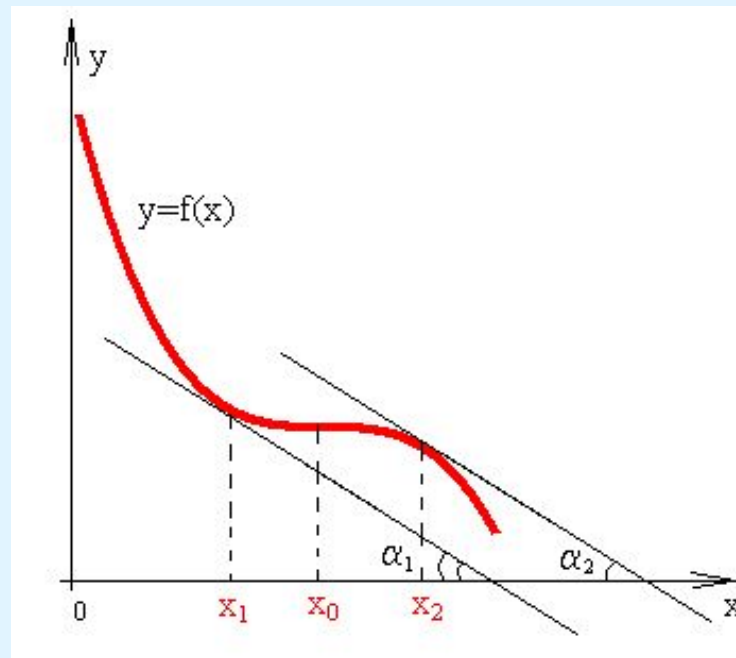
Тогда при $\Delta x \square 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$

т.к. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) > 0$
Ч.Т.Д.



Теорема 2. (Необходимое условие убывания функции)

Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ убывает, то ее производная не может быть положительной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x) \leq 0$ для $a < x < b$.



Теорема 3. (Достаточное условие возрастания функции)

Если непрерывная на $[a;b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет положительную производную, то функция возрастает на $[a;b]$

Доказательство: Пусть $y=f'(x)$ для всех $a < x < b$. Рассмотрим $x_2 > x_1$ из $[a;b]$.

По теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1) f'(c)$, где $x_1 \leq c < x_2$, поэтому по условию $f'(c) > 0$

и $x_2 - x_1 > 0$ имеем $f(x_2)-f(x_1) > 0$, т.е. из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция возрастает, ч.т.д.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Теорема 4. (Достаточное условие убывания функции)

Если непрерывная на $[a;b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет отрицательную производную, то функция убывает на $[a;b]$.

Пример 1. Найти интервал монотонности функции $y=x^3-3x$.

Решение. Находим область определения функции $D(y)=\mathbb{R}$

Находим производную
функции

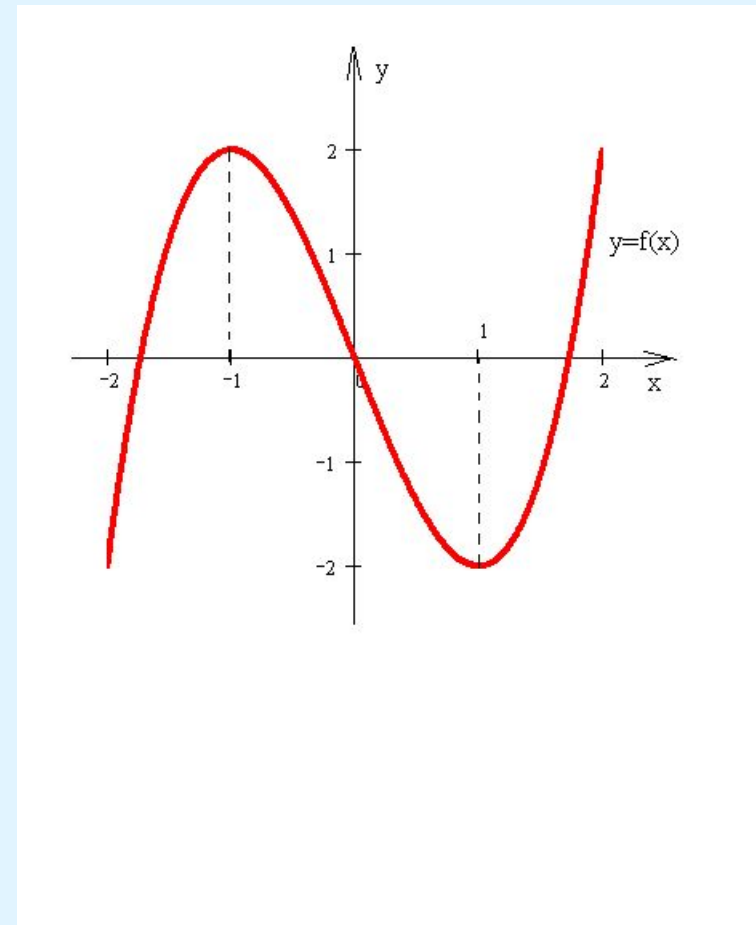
$$y' = 3x^2 - 3$$

$y' > 0$, если $3x^2 - 3 > 0$ при
 $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$y' < 0$ при $x \in (-1; 1)$

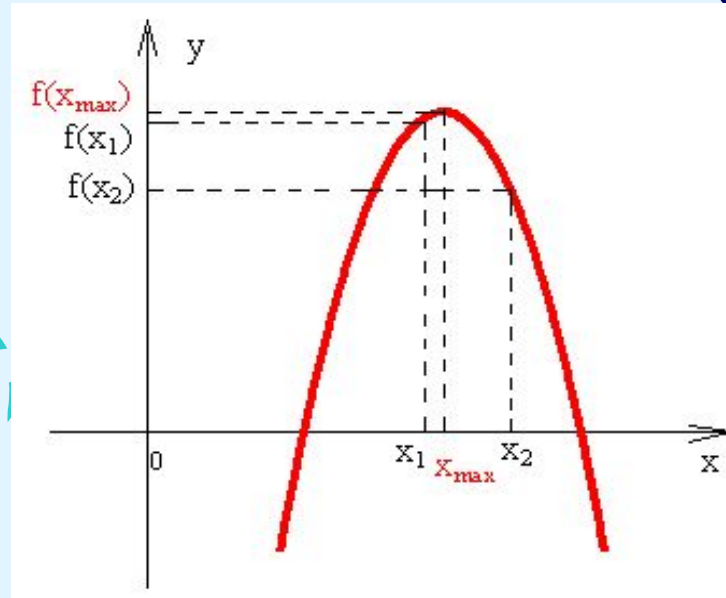
Ответ:

функция возрастает
на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$,
функция убывает на
 $[-1; 1]$

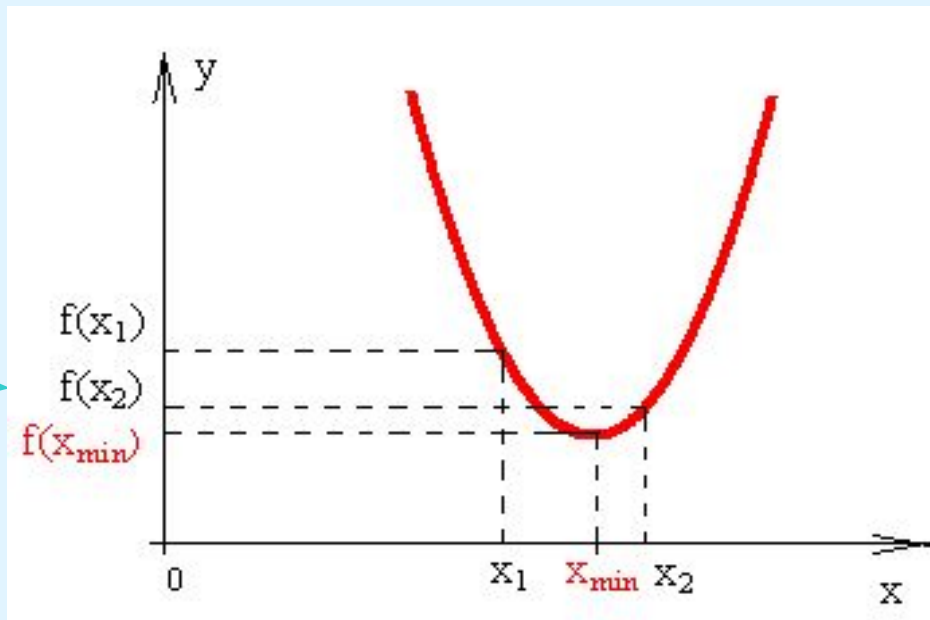


Точки экстремума и экстремумы функции

Опр. 3 Точка x_0 называется точкой максимума функции $y=f(x)$, если существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется $f(x) < f(x_0)$



Опр. 4 Точка x_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если существует число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется $f(x) > f(x_0)$



Точка максимума и точка минимума называются точками **экстремума**.

Значение функции в точках экстремума называется **экстремумом функции**, т. е.

$f_{\max} = f(x_{\max})$ – максимум функции

$f_{\min} = f(x_{\min})$ – минимум функции.

Теорема 5. (Необходимое условие экстремума)

Если дифференциальная функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна 0, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Пусть x_0 – точка максимума, тогда в окрестности точки x_0 выполняется $f(x_0) > f(x)$, поэтому

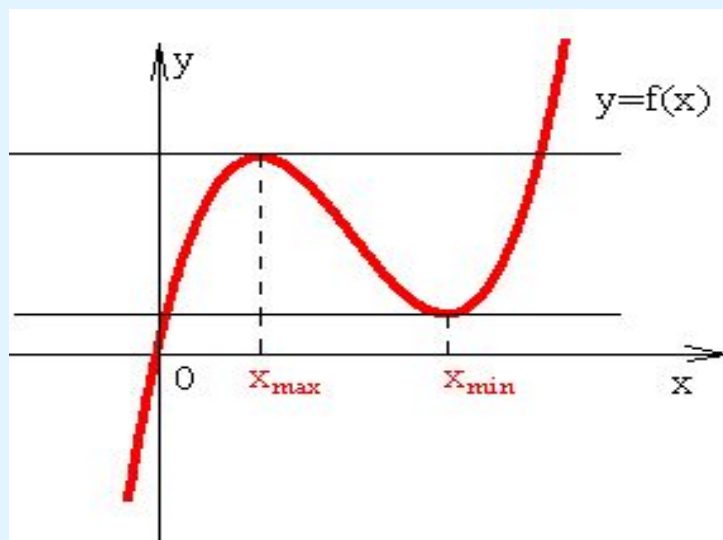
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0, \text{ если } \Delta x > 0 \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0, \text{ если } \Delta x < 0$$

По условию существует производная, которая равна $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Имеем: $f'(x_0) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ и $f'(x_0) \geq 0$ при $\Delta x < 0$, следовательно $f'(x_0) = 0$, ч.т.д.

Обратное утверждение, в общем случае не верно, т.е. из $f'(x_0) = 0$ не следует, что x_0 – точка экстремума.

Геометрический смысл. Если x_0 – точка экстремума и в точке x_0 существует производная, то в точке на графике функции касательная параллельна оси Ox .



Теорема 6. (Достаточное условие экстремума)

Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в δ -окружности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) $f'(x)$ меняет знак, то x_0 – точка экстремума, причем, если с «+» на «-», то x_0 – точка максимума, с «-» на «+», то x_0 – точка минимума.

Доказательство: Рассмотрим δ -окр-сть точки x_0 . Пусть $f'(x) > 0$ при любых $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при любых $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \delta; x_0)$ и убывает на $(x_0; x_0 + \delta)$, следовательно $f(x_0)$ – наибольшее значение на $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т.е. $f(x) < f(x_0)$ для $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, следовательно точка x_0 – точка максимума функции, ч.т.д.

Пример 2. Найти экстремумы функции

$$y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$$

Решение. $D(y) = R_y; \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} y' = 0$ при $x=8$

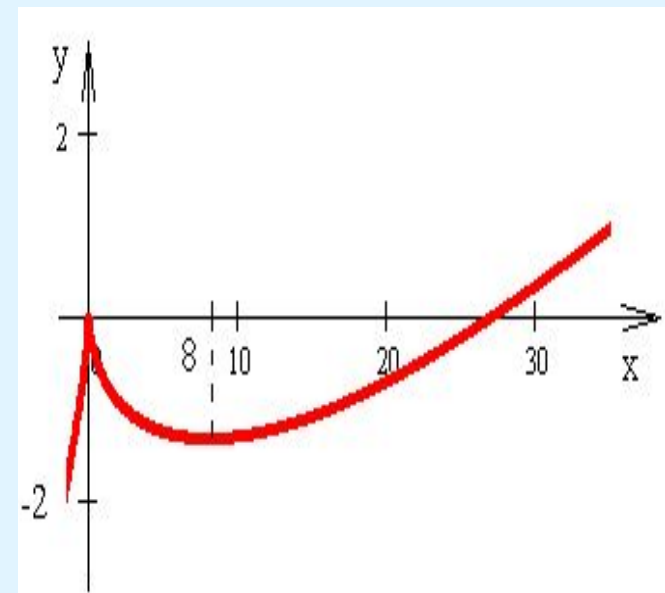
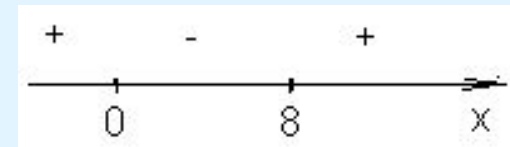
и y' не существует при $x=0$

Поставим эти точки на числовой прямой и расставим знаки производной.

$$x_{\max} = 0, \quad x_{\min} = 8$$

$$y_{\max} = 0, \quad y_{\min} = 8/3 - 4 = -4/3$$

Ответ: $y_{\min} = -4/3; y_{\max} = 0$



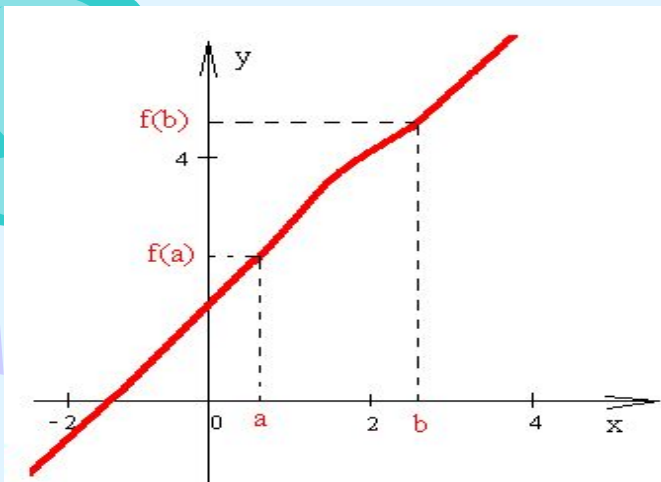
Теорема 7. (Достаточное условие экстремума, если существует y'')

Если в точке x_0 существует $f'(x)$ и $f'(x_0)=0$, а вторая производная не равна 0, т.е. $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ в точке x_0 функция имеет минимум.

значение функции

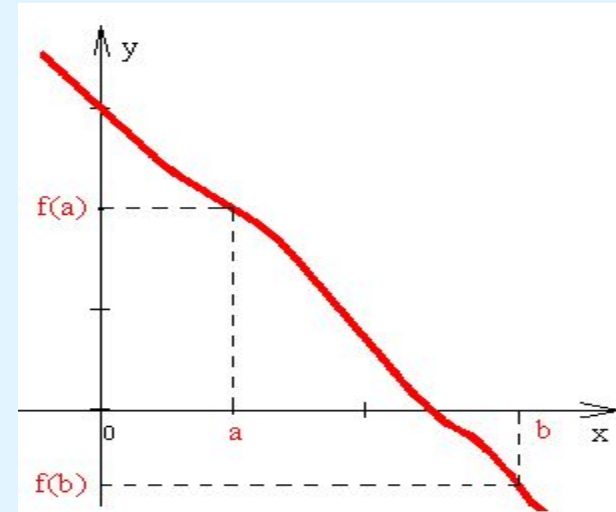
Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[a; b]$.

1. Функция возрастает на $[a; b]$ 2. Функция убывает на $[a; b]$



$$\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$$

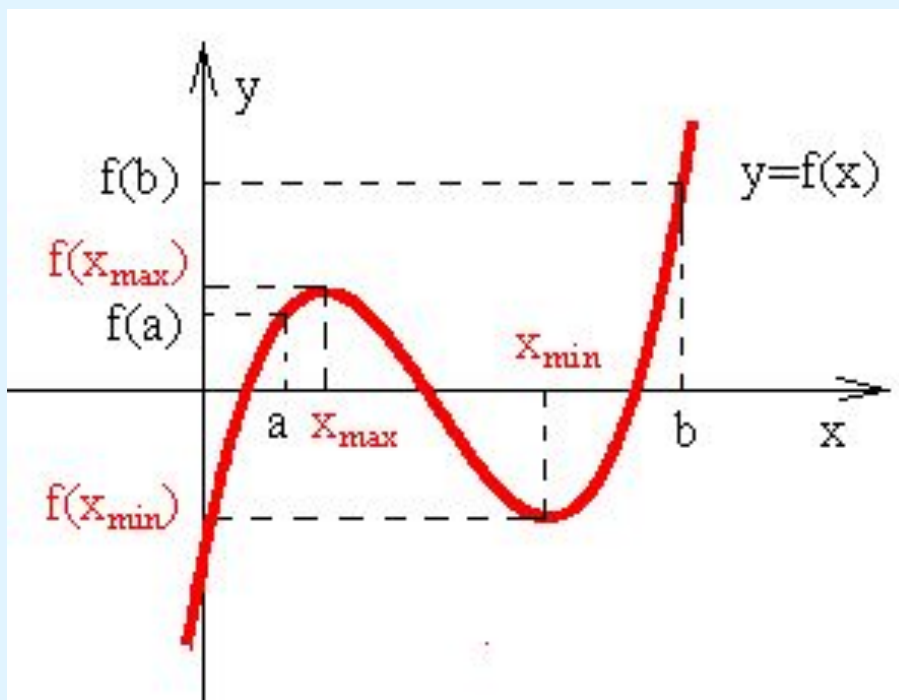
$$\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$$



$$\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$$


$$\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$$

3. Функция немонотонна на $[a;b]$

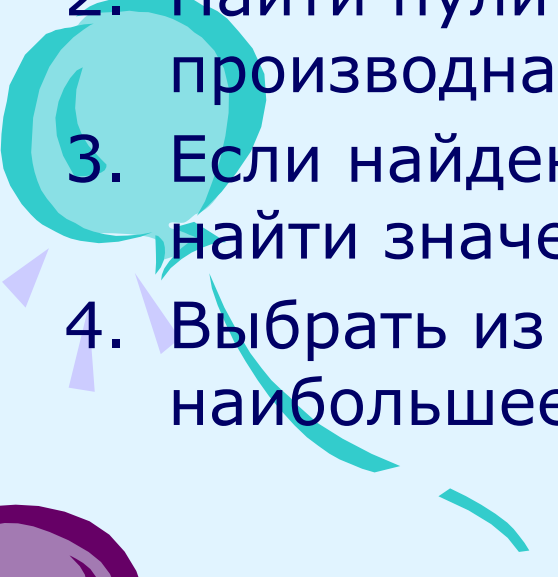



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$$

$$\min_{[a;b]} f(x) = f_{\min}$$



Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1. Найти $f(a)=A$ и $f(b)=B$.
 2. Найти нули производной и точки, в которых производная не существует.
 3. Если найденные точки принадлежат $[a;b]$, то найти значения функции в этих точках.
 4. Выбрать из всех найденных значений функции наибольшее и наименьшее.
- 
- 

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на $[-2;1]$

Решение: 1. $f(-2)=3 \cdot 16 + 4 \cdot (-8) + 1 = 48 - 32 + 1 = 17,$

$f(1)=3+4+1=8.$

2. Находим производную функции $f'(x)=12x^3+12x^2$

$f'(x)=0$ при $x=0 \in [-2;1],$
 $x=-1 \in [-2;1].$

3. $f(0)=1, f(-1)=3-4+1=0.$


4. Сравниваем найденные значения функции, имеем $0 < 1 < 8 < 17.$

Ответ: $\max_{[-2;1]} f(x) = 17 ; \min_{[-2;1]} f(x) = 0$



ПРИМЕНЕНИЕ

Решением задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения занимается линейное программирование.



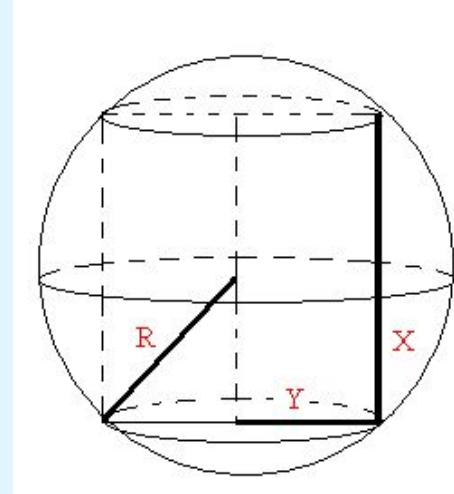
Задачи: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами;

Задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли.



Пример 4.

Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы размеры цилиндра?



Пусть x – высота, y – радиус основания цилиндра.

$$4y^2 + x^2 = 4R^2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2} \Rightarrow V = \pi y^2 x = \pi \left(\frac{4R^2 - x^2}{4} \right) x$$

Рассмотрим функцию $V(x) = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4}, x \in [0; 2R]$

$$x = \frac{2R\sqrt{3}}{3} - \text{точка максимума} \Rightarrow y = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: размеры цилиндра: высота $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, радиус основания $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$