Тема: Исследование функции на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

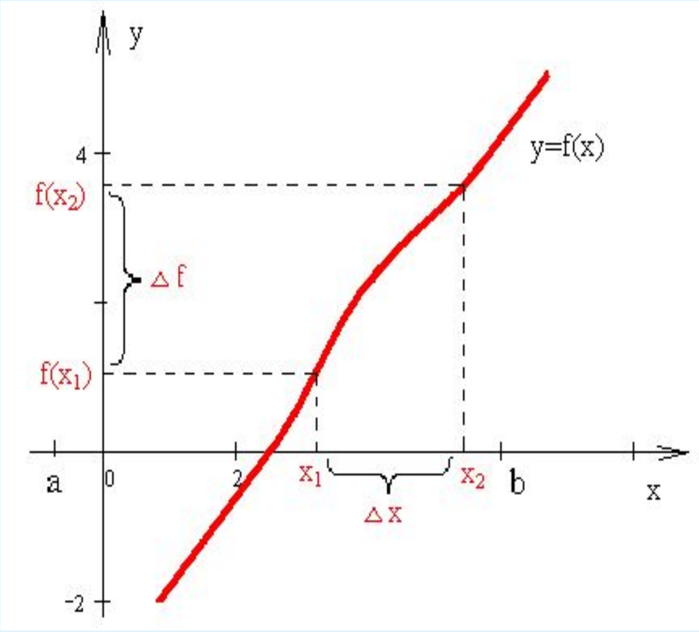
- Монотонность функции
- Экстремумы функции
- Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Возрастание и убывание функции

<u>*Опр. 1*</u> Функция $y=f(x)$, определяемая на интервале $(a;b)$, называется ***возрастающей*** на этом интервале, если из неравенства $x_2>x_1$, где x_2 и x_1 – любые две точки из интервала, следует неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

Если обозначить $\Delta x= x_2-x_1$ и $\Delta f= f(x_2)-f(x_1)$, то

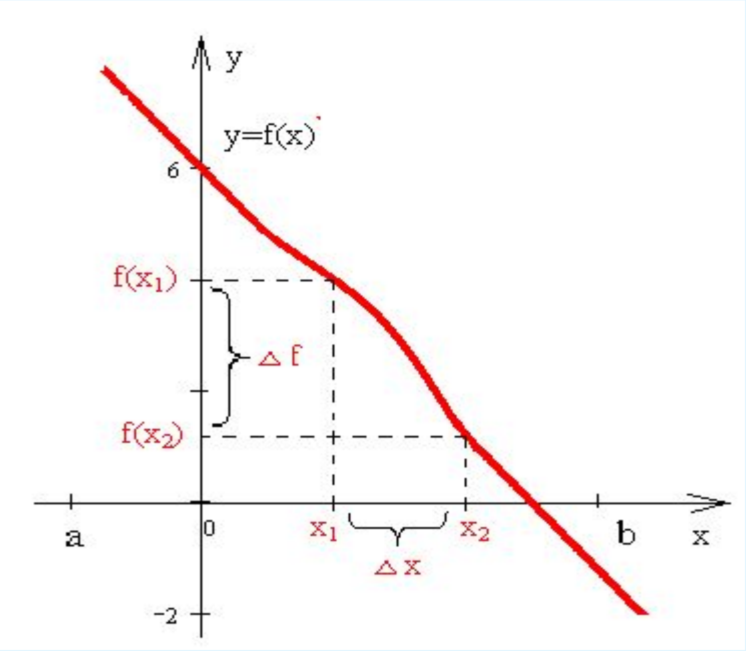
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$$



Опр. 2 Функция y=f(x), определяемая на интервале (a;b), называется ***убывающей*** на этом интервале, если из неравенства $x_2>x_1$, следует неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.

Заметим, что

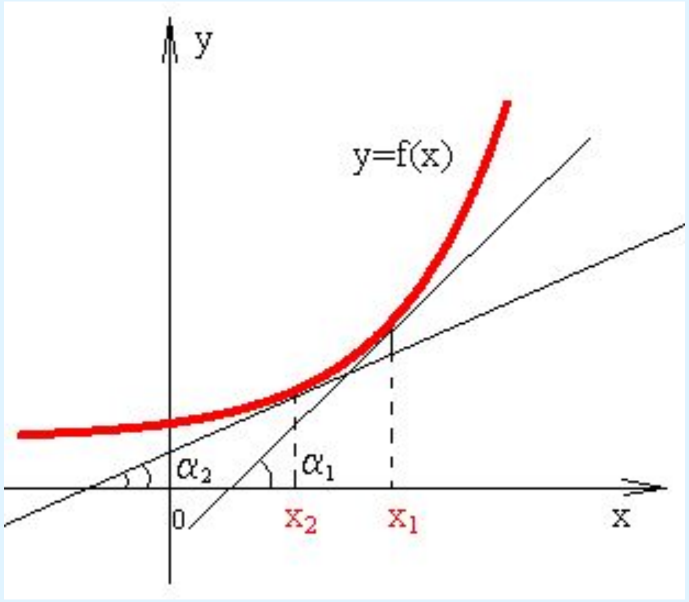
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$$



Теорема 1. (необходимое условие возрастания функции)

Если дифференцируемая в интервале (a;b) функция $y=f(x)$ возрастает, то ее производная не может быть отрицательной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x)\geq 0$ для $a<x<b$.

Доказательство: Пусть $y=f(x)$ возрастает на (a;b), тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$

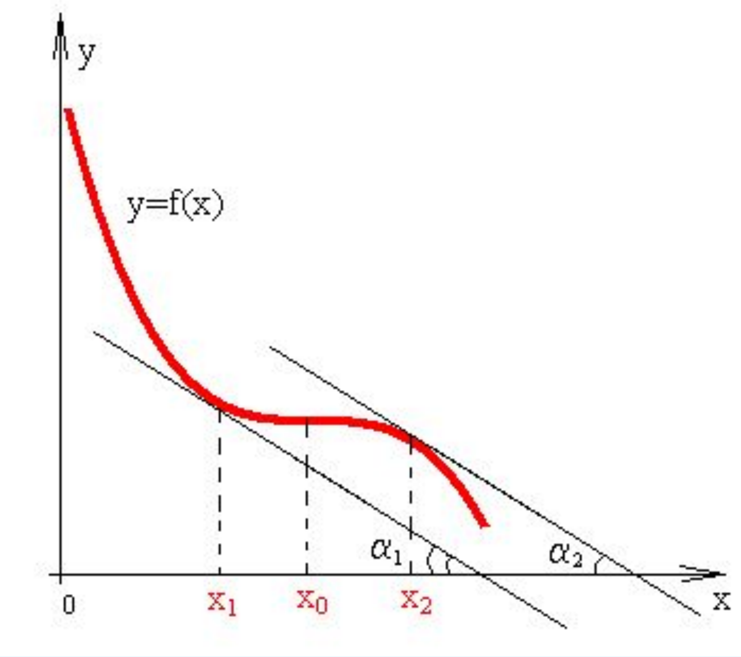


Тогда при Δx□0, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0$

т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$, то $f'(x)>0$ ч.т.д.

Теорема 2. (Необходимое условие убывания функции)

Если дифференцируемая в интервале (a;b) функция y=f(x) убывает, то ее производная не может быть положительной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x) \le 0$ для $a < x < b$.



Теорема 3. (Достаточное условие возрастания функции)

Если непрерывная на [a;b] функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет положительную производную, то функция возрастает на [a;b]

Доказательство: Пусть $y=f'(x)$ для всех $a<x<b$. Рассмотрим $x_2>x_1$ из [a;b].

По теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(c)$, где $x_1\le c<x_2$,

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

поэтому по условию $f'(c)>0$

и $x_2-x_1>0$ имеем $f(x_2)-f(x_1)>0$, т.е. из $x_2>x_1$ следует $f(x_2)>f(x_1)$, т. е. функция возрастает, ч.т.д.

Теорема 4. (Достаточное условие убывания функции)

Если непрерывная на [a;b] функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет отрицательную производную, то функция убывает на [a;b].

Пример 1. Найти интервал монотонности функции $y=x^3-3x$.

<u>Решение.</u> Находим область определения функции $D(y)=R$

Находим производную функции

$y' = 3x^2 - 3$

$y' > 0$, если $3x^2 - 3 > 0$ при

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

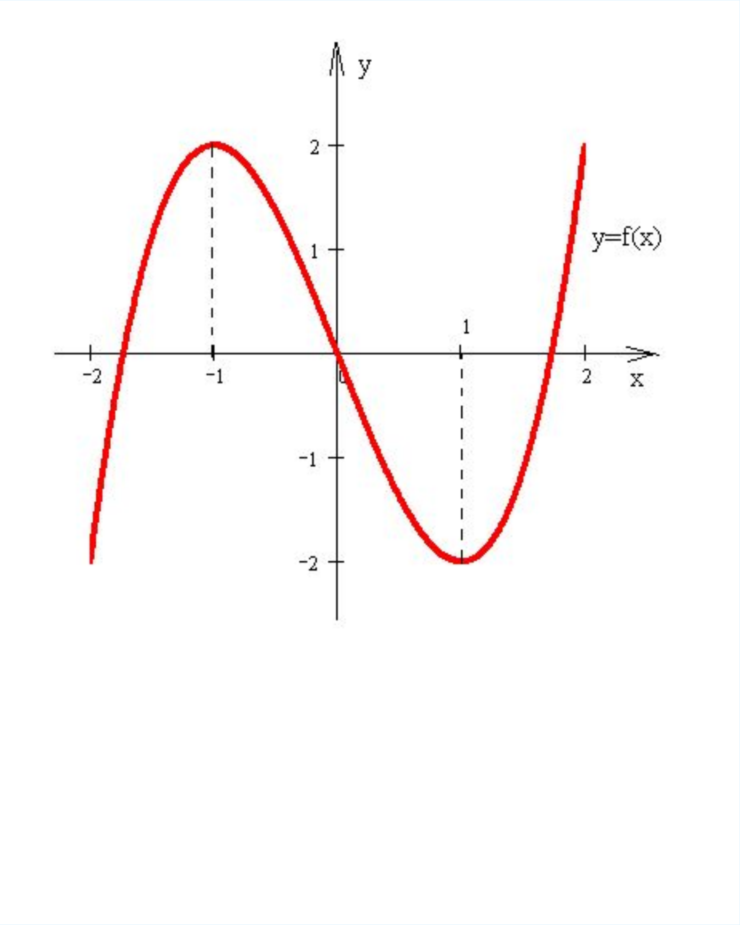
$y' < 0$ при $x \in (-1; 1)$

Ответ:

функция возрастает

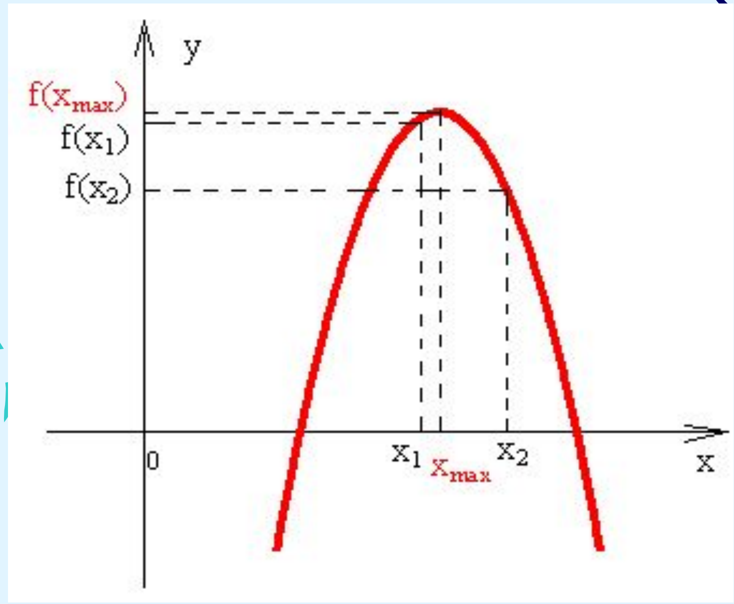
на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$,

функция убывает на $[-1; 1]$

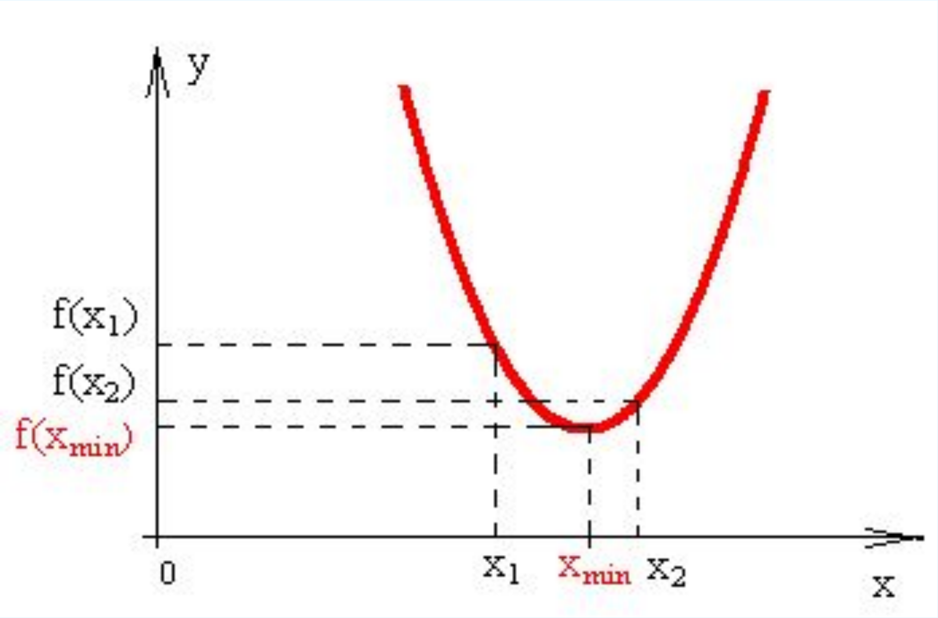


Точки экстремума и экстремумы функции

Опр. 3 Точка x_0 называется точкой максимума функции $y=f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется $f(x) < f(x_0)$



Опр. 4 Точка x_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если существует число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется $f(x)> f(x_0)$



Точка максимума и точка минимума называются точками ***экстремума***.

Значение функции в точках экстремума называется **экстремумом функции**, т. е.

$f_{max}=f(x_{max})$ – максимум функции

$f_{min}=f(x_{min})$ – минимум функции.

Теорема 5. (Необходимое условие экстремума)

Если дифференциальная функция y=f(x) имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна 0, т.е. $f'(x_0)=0$.

Доказательство: Пусть x_0 – точка максимума, тогда в окрестности точки x_0 выполняется $f(x_0)>f(x)$, поэтому

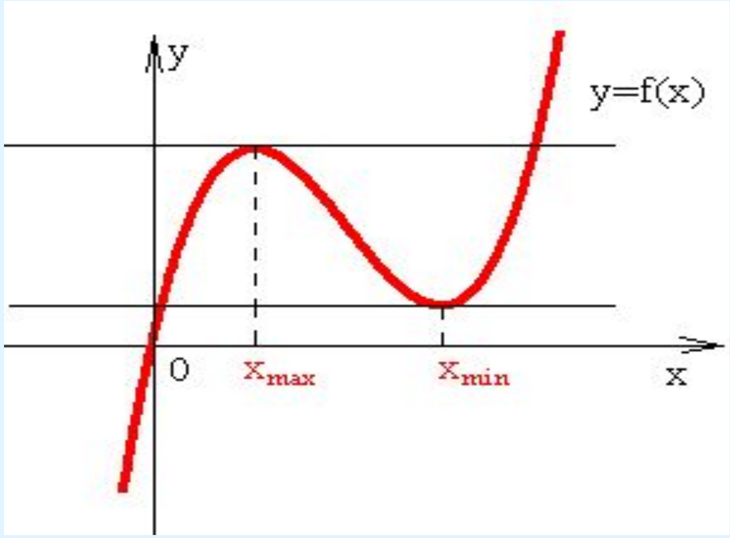
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0, если\,\Delta x>0$$ и $$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0, если\,\Delta x<0$$

По условию существует производная, которая равна $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$

Имеем: $f'(x_0)\le 0$ при $\Delta x>0$ и $f'(x_0)\ge 0$ при $\Delta x<0$, следовательно $f'(x_0)=0$, ч.т.д.

Обратное утверждение, в общем случае не верно, т.е. из $f'(x_0) = 0$ не следует, что x_0 – точка экстремума.

Геометрический смысл. Если x_0 – точка экстремума и в точке x_0 существует производная, то в точке на графике функции касательная параллельна оси Ох.



Теорема 6. (Достаточное условие экстремума)

Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в δ-окружности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) $f'(x)$ меняет знак, то x_0 – точка экстремума, причем,

если с «+» на «-», то x_0 – точка максимума,

с «-» на «+», то x_0 – точка минимума.

__Доказательство:__ Рассмотрим δ-окр-сть точки x_0. Пусть $f'(x) > 0$ при любых $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при любых $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \delta;\ x_0)$ и убывает на $(x_0;\ x_0 + \delta)$, следовательно $f(x_0)$ – наибольшее значение на

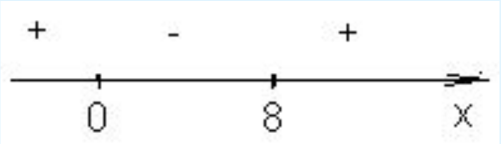
$(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, т.е. $f(x) < f(x_0)$ для $x \in (x_0 - \delta;\ x_0) \cup (x_0;\ x_0 + \delta)$, следовательно точка x_0 – точка максимума функции, ч.т.д.

Пример 2. Найти экстремумы функции

$$y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$$

<u>*Решение*</u>. D(y)=R, $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$, y' =0 при x=8

и y' не существует при x=0

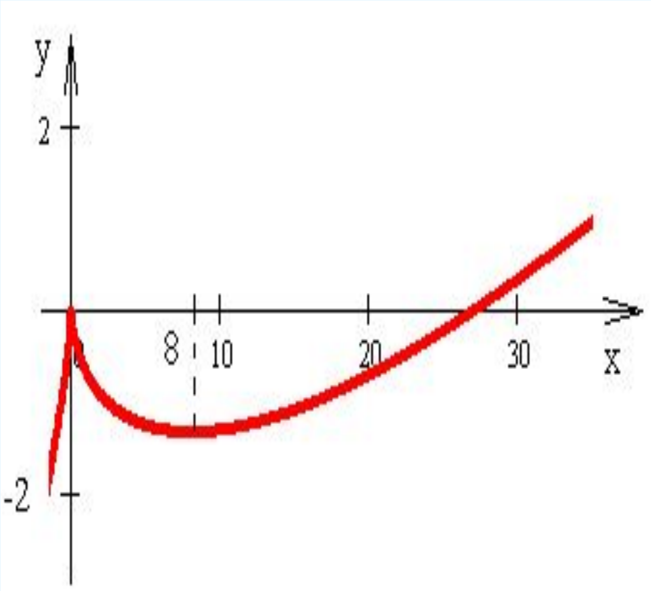


Поставим эти точки на числовой прямой и расставим знаки производной.

x_{max}=0, x_{min}=8

y_{max}=0, y_{min}=8/3-4=- 4/3

Ответ: y_{min}=-4/3; y_{max}=0



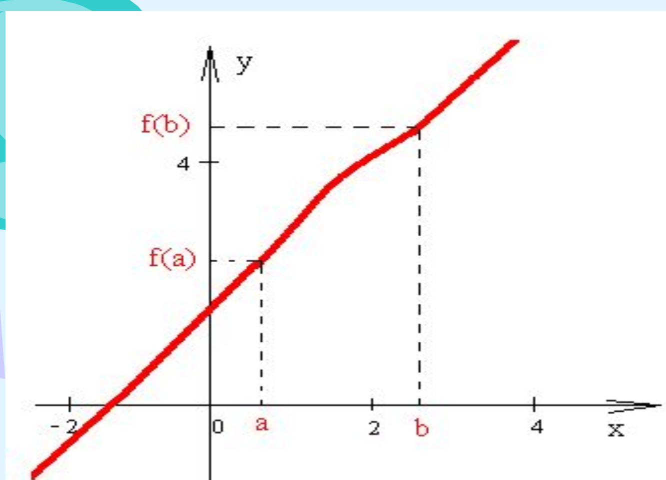
Теорема 7. (Достаточное условие экстремума,если существует y’’)

Если в точке x_0 существует f’(x) и $f'(x_0)=0$, а вторая производная не равна 0,т.е. $f''(x_0)\neq 0$, то при $f''(x_0)< 0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x_0)> 0$ в точке x_0 функция имеет минимум.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке [a;b].

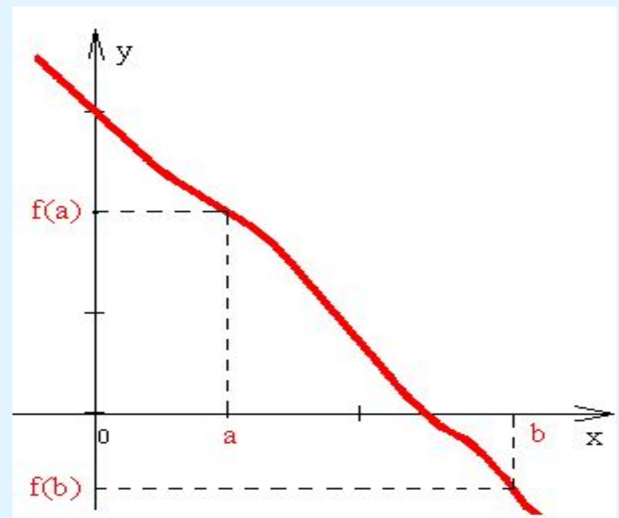
1.Функция возрастает на [a;b]



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$$

$$\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$$

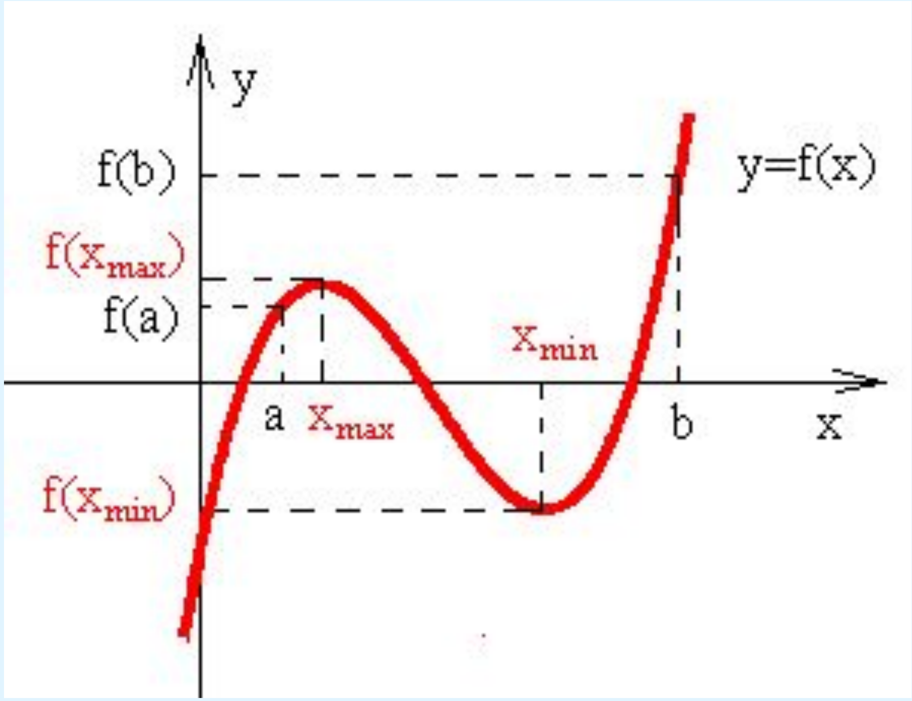
2. Функция убывает на[a;b]



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(a)$$

$$\min_{[a;b]} f(x) = f(b)$$

3. Функция немонотонна на [a;b]



$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f_{min}$

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1. Найти $f(a)=A$ и $f(b)=B$.
2. Найти нули производной и точки, в которых производная не существует.
3. Если найденные точки принадлежат $[a;b]$, то найти значения функции в этих точках.
4. Выбрать из всех найденных значений функции наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на $[-2;1]$

Решение: 1. $f(-2)=3\cdot16+4\cdot(-8)+1=48-32+1=17$,

$f(1)=3+4+1=8$.

2.Находим производную функции $f'(x)=12x^3+12x^2$

$f'(x)=0$ при $x=0 \in [-2;1]$, $x=-1\in[-2;1]$.

3. $f(0)=1$, $f(-1)=3-4+1=0$.

4. Сравниваем найденные значения функции, имеем $0<1<8<17$.

Ответ: $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=17$; $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=0$

ПРИМЕНЕНИЕ

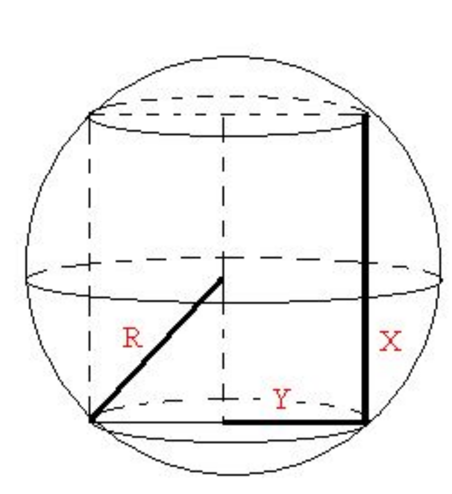
Решением задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения занимается *линейное программирование*.

Задачи: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами;

Задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли.

Пример 4.

Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы размеры цилиндра?



Пусть x – высота, y –радиус основания цилиндра.

$4y^2+x^2=4R^2$ => $y=\frac{\sqrt{4R^2-x^2}}{2}$ => $V=\pi y^2 x=\pi\left(\frac{4R^2-x^2}{4}\right)x$

Рассмотрим функцию $V(x)=\pi R^2 x-\frac{\pi x^3}{4}$, $x\in[0;2R]$

$x=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ - точка максимума => $y=\frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Ответ: размеры цилиндра: высота $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$,радиус основания $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$