

# I. Механика. Гравитационное поле.

## Закон всемирного тяготения

Для материальных точек и тел сферической формы закон записывается в следующем виде (Рис.24):

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

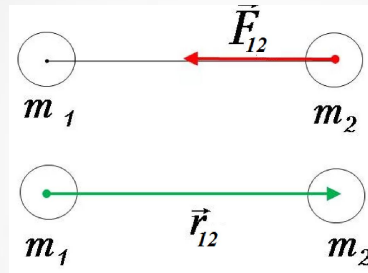
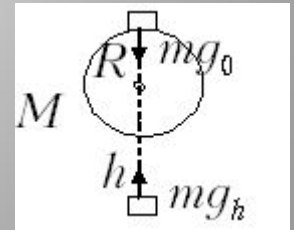


Рис.24

Выражение для ускорения свободного падения на поверхности Земли (Рис.25) можно получить приравняв силу тяжести к гравитационной силе:  $mg_0 = G \frac{mM}{R^2}$ , откуда  $g_0 = G \frac{M}{R^2}$ , где  $m$  – масса



тела,  $M$  – масса Земли,  $R$  – ее радиус.

Рис.25

# I. Механика. Гравитационное поле.

На высоте  $h$  от поверхности Земли  $mg_h = G \frac{mM}{(R+h)^2}$  и для ускорения свободного падения получим  $g_h = G \frac{M}{(R+h)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$ .

**Движение спутников планет по круговым орбитам.**

Запишем для этого движения второй закон Ньютона:

$$ma_n = \frac{mv^2}{R+h} = \frac{m(2\pi)^2}{T^2} (R+h) = mg_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} = G \frac{mM}{(R+h)^2}$$

где  $m$  – масса спутника,  $M$  – масса планеты,  $R$  – ее радиус,  $h$  – высота орбиты над поверхностью планеты,  $g_0$  – ускорение свободного падения на ее поверхности. Из этого уравнения можно найти скорость спутника  $v$  и его период обращения  $T$ .

Если  $h \ll R$ , т.е. спутник летает на небольшой высоте, тогда

$\frac{mv^2}{R} = mg_0$  для первой космической скорости получим:

$$v = v_1 = \sqrt{Rg_0}$$

# I. Механика. Гравитационное поле.

$V_1$ - скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало спутником Земли (не вернулось на Землю).

**Эллиптические орбиты.**

$v_n$

В общем случае движение планет и их спутников происходит по эллиптическим орбитам. Гравитационные силы Солнца или планет не создают момента силы, поэтому момент импульса планет или спутников сохраняется и  $r_n$  - радиус орбиты и  $v_n$  скорость на орбите в перигее, а  $r_a$  радиус и скорость в апогее (Рис.26).

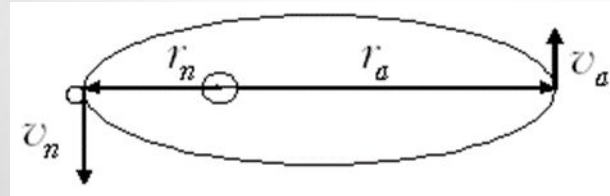


Рис.26

Между ними существует следующее соотношение:

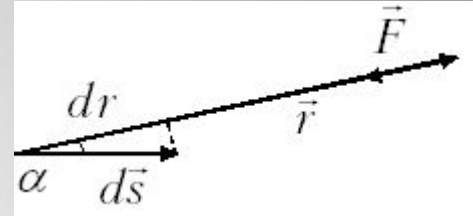
$$L = mr_n^2 v_n = mr_a v_a$$

# I. Механика. Гравитационное поле.

## Потенциальная энергия гравитационного поля.

Рассмотрим гравитационное взаимодействие материальной точки массой  $m$  и шара (Земли) массой  $M$  и радиуса  $R$  (Рис.26).

$$dU = -dA = -\vec{F} d\vec{s} = -F ds \cos\alpha = -\left(-G \frac{mM}{r^2}\right) dr$$



Беря неопределенный интеграл, получим:

$$U(r) = \int G \frac{mM}{r^2} dr + C = -G \frac{mM}{r} + C$$

Рис.26

Если потенциальная энергия обращается в ноль на бесконечности, то константа интегрирования  $C=0$  и  $U(r) = -G \frac{mM}{r}$

Если принять потенциальную энергию равной нулю на поверхности Земли  $U(r=R) = -G \frac{mM}{R} + C = 0$  и  $C = G \frac{mM}{R}$ .

Потенциальная энергия в этом случае принимает вид:

$$U(r) = G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{r}$$

# I. Механика. Гравитационное поле.

Если высота над поверхностью шара (Земли) мала  $h \ll R$ , то

$$U = G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{R+h} = G \frac{mM}{R^2} (R+h-R) = G \frac{mMh}{R^2} = mgh$$

получаем известное выражение для потенциальной энергии тела на высоте  $h$  от поверхности Земли.

**Вторая космическая скорость** – скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло поле притяжения Земли (удалилось от него на бесконечность). Если принять потенциальную энергию на бесконечности, равной нулю, то закон сохранения энергии запишется в виде:  $\frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{R} = 0$ , где выражение в

правой части равенства – полная энергия тела на поверхности Земли. На бесконечно большом расстоянии от Земли кинетическая и потенциальная энергии обращаются в ноль и

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{mM}{R}} = \sqrt{2G \frac{MR}{R^2}} = \sqrt{2g_0 R} = 11,2 \text{ км/с}$$

# Расчет первой космической скорости у поверхности Земли

$$v_I = \sqrt{gR}$$

$$v_I = \sqrt{9,8 \frac{\mathcal{M}}{c^2} * 6,4 * 10^6 \mathcal{M}} = 7900 \frac{\mathcal{M}}{c} = 7,9 \frac{\text{км}}{c}$$

# Вторая космическая скорость

Вторая космическая скорость – минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли (или небесного тела) для того, чтобы оно преодолело гравитационное притяжение Земли (или небесного тела).

$$v_{II} = \sqrt{2gR}$$

$$V_{II} = 11,2 \text{ км/с}$$

# Третья космическая скорость

Минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли для того, чтобы оно преодолело гравитационное притяжение Солнца.

$$v_{III} = 16,7 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$



# Траектории движения тел



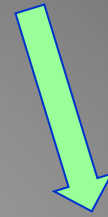
$$V_0 = 0$$



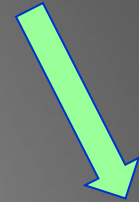
$$V = V_I$$



$$V_I < V < V_{II}$$



$$V = V_{II}$$



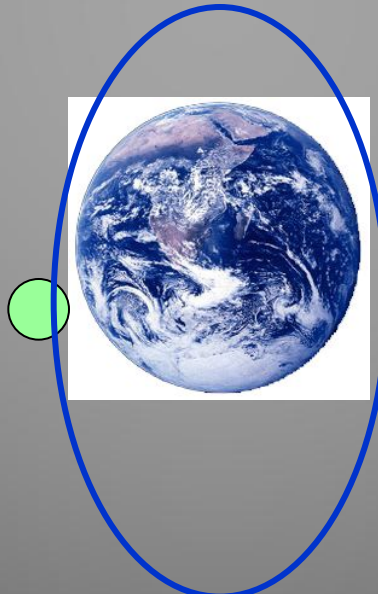
$$V = V_{III}$$



прямая  
линия



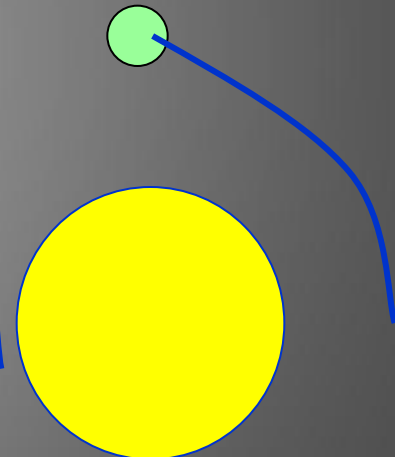
окружность



эллипс



Парабола



гипербола

# I. Механика. Метод Потенциальных кривых

$$F = -\frac{dU}{dx} \text{ отрицательна.}$$

Слева от минимума тангенс угла наклона касательной отрицателен, а сила положительна. В точке минимума сила равна нулю, т.е. это есть положение равновесия. При смещении от этой точки вправо возникает сила возвращающая материальную точку в положение равновесия. Тот же результат будет и при смещении влево. Поэтому равновесие в этом случае является устойчивым. Вблизи максимума потенциального барьера положение равновесия неустойчиво. Пусть  $E_{\text{полн}}$  – полная энергия материальной точки. Полная энергия  $E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} \geq E_{\text{пот}}$ . В точках 3 и 4 пересечения прямой полной энергии с потенциальной кривой полная энергия равна потенциальной, поэтому движение на участке 3-4 возможно, а вне этого отрезка, где  $E_{\text{полн}} < E_{\text{пот}}$  невозможно.

# I. Механика. Метод Потенциальных кривых

отрицательна.

Слева от минимума тангенс угла наклона касательной отрицателен, а сила положительна. В точке минимума сила равна нулю, т.е. это есть положение равновесия. При смещении от этой точки вправо возникает сила возвращающая материальную точку в положение равновесия. Тот же результат будет и при смещении влево. Поэтому равновесие в этом случае является устойчивым. Вблизи максимума потенциального барьера положение равновесия неустойчиво. Пусть  $E_{полн}$  – полная энергия материальной точки. Полная энергия  $E_{полн} = E_{кин} + E_{пот} \geq E_{пот}$ . В точках 3 и 4 пересечения прямой полной энергии с потенциальной кривой полная энергия равна потенциальной, поэтому движение на участке 3-4 возможно, а вне этого отрезка, где  $E_{полн} < E_{пот}$  невозможно.

# I. Механика. Гравитационное поле.

## Примеры решения задач

**Задача 31.** Найдите путь, который пройдет тело за 1 с, свободно падая без начальной скорости на высоте от поверхности Земли, равной ее радиусу.

**Решение.** При свободном падении путь, проходимый телом

Равен  $s = \frac{g_h t^2}{2}$ , где  $g_h$  - ускорение свободного падения на высоте  $h = R$  и  $g_h = g_0 \frac{R^2}{(R + R)^2} = \frac{g_0}{4}$ , откуда  $s = 1,25$  м.

**Задача 32.** Найдите силу притяжения к Земле космического корабля массы 10 тонн, находящегося на расстоянии от поверхности Земли, в четыре раза большем ее радиуса.

**Решение.** На расстоянии 5 радиусов Земли на космонавта будет действовать сила притяжения, равная

$$mg_h = mg_0 \frac{R^2}{(R + 4R)^2} = \frac{mg_0}{25} = 4 \text{ кН}$$

# I. Механика. Гравитационное поле.

**Задача 33.** Найдите отношение скоростей двух космических кораблей, вращающихся по круговым орбитам на расстояниях от поверхности Земли, равных одному и двум земным радиусам.

**Решение.** Запишем второй закон Ньютона, для спутников, вращающихся вокруг Земли на расстояниях одного и двух радиусов от поверхности под действием соответствующих сил тяжести:

$$\frac{m_1 v_1^2}{R + R} = m_1 g_R = m_1 g_0 \frac{R^2}{(R + R)^2} = \frac{m_1 g_0}{4}$$

$$\frac{m_2 v_2^2}{R + 2R} = m_2 g_{2R} = m_2 g_0 \frac{R^2}{(R + 2R)^2} = \frac{m_2 g_0}{9}$$

Разделив первое уравнение на второе и извлекая квадратный корень получим 1,22.

**Задача 34.** Найдите период обращения спутника, движущегося по круговой орбите вблизи поверхности некоторой планеты, средняя плотность вещества которой равна  $3,3 \text{ г/см}^3$ . Гравитационная постоянная  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ .

# I. Механика. Гравитационное поле.

**Решение.** Запишем второй закон Ньютона для вращательного движение, выразив нормальное ускорение через период обращения:

$$ma_n = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R = mg_0 = mG \frac{M}{R^2}$$

Выразим в этом выражении массу планеты  $M$  через плотность и объем шара, тогда получим:

$$a_n = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = G \rho \frac{4}{3} \pi R$$

$$T = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{G\rho}} = 6,5 \cdot 10^5 \text{ с.}$$

**Задача 35.** Спутник запущен вертикально вверх со второй космической скоростью. На некоторой высоте над поверхностью Земли потенциальная энергия спутника составляет 75% его первоначальной энергии. Потенциальная энергия на поверхности Земли при этом принимается нулевой. Найдите отношение этой высоты к радиусу Земли.

# I. Механика. Гравитационное поле.

**Решение.** Запишем закон сохранения энергии, приняв, что потенциальная энергия обращается в ноль на поверхности Земли:

$$G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{R+h} = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{3}{4} m \frac{2g_0 R}{2} = \frac{3}{4} mG \frac{M}{R^2},$$

$$h = 3R.$$

**Задача 36.** Спутник запускается со второй космической скоростью. Найдите, во сколько раз уменьшится его кинетическая энергия по сравнению с начальной на высоте, равной радиусу Земли.

Участок разгона ракеты и сопротивление воздуха не учитывать.

**Решение.** Примем потенциальную энергию на поверхности Земли равной нулю, тогда на основе закона сохранения энергии:

$$m \frac{v_2^2}{2} = mG \frac{MR}{R^2} = G \frac{mM}{R} = m \frac{v^2}{2} + G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{2R} \text{ отсюда}$$

$$\frac{m \frac{v_2^2}{2}}{m \frac{v^2}{2}} = \frac{G \frac{mM}{R}}{G \frac{mM}{2R}} = 2$$

$$\frac{v_2^2}{v^2} = 2$$

# I. Механика. Гравитационное поле.

• **Задача 37.** Найдите расстояние, на которое ракета, запущенная вертикально вверх с поверхности Земли с первой космической скоростью  $v_1$ , удалится от поверхности Земли. Радиус Земли равен  $R = 6400$  км. Вращение Земли не учитывать.

• **Решение.** Принимая потенциальную энергию равной нулю на поверхности Земли, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{R+h},$$

где  $\frac{mv_1^2}{2}$  – начальная кинетическая энергия ракеты, соответствующая

первой космической скорости  $v_1 = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{G \frac{M}{R^2} R} = \sqrt{G \frac{M}{R}}$ ,  $h$  –

высота подъема ракеты, на которой ее скорость обращается в ноль.

Подставляя  $v_1$  в первое уравнение, получим

$$\frac{m_1 v_1^2}{R+R} = g,$$

откуда  $h=R=6400$  км.



# I. Механика. Гравитационное поле.

**Задача 38.** Определите, при каком значении высоты над поверхностью Земли использование формулы зависимости потенциальной энергии от высоты  $E_{\text{пот}} \approx m g_0 h$  приводит к ошибке 25%. Радиус Земли равен 6400 км.

**Решение.** Потенциальная энергия тела в поле притяжения Земли, обращаясь в ноль на ее поверхности, имеет вид:

$$E_{\text{пот}} = G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{r}$$

Подставляя  $h = r - R$ , будем иметь:

$$E_{\text{пот}} = G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{r} = G \frac{mM(r - R)}{(R + h)R} = mG \frac{Mh}{R^2} \frac{R}{R + h} = mg_0 h \frac{R}{R + h}.$$

Ошибка в 25% получится при  $\frac{R}{R + h} = \frac{3}{4}$ , откуда  $h = R/3 \approx 2130$  км.