I.Механика. Гравитационное поле.

Закон всемирного тяготения

Для материальных точек и тел сферической формы закон записывается в следующем виде (Рис.24):

$$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}$$

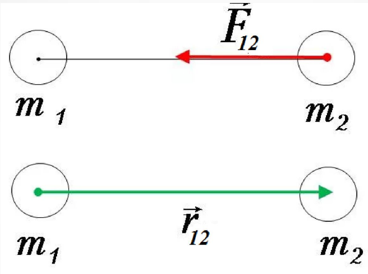


Рис.24

Выражение для ускорения свободного падения на поверхности Земли (Рис.25) можно получить приравнивая силу тяжести к гравитационной силе: $mg_0 = G\,\dfrac{mM}{R^2}$, откуда $g_0 = G\,\dfrac{M}{R^2}$, где m – масса

тела, M – масса Земли, R – ее радиус.

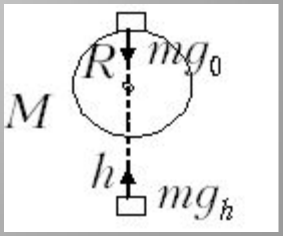


Рис.25

I.Механика. Гравитационное поле.

На высоте *h* от поверхности Земли $mg_h = G\dfrac{mM}{(R+h)^2}$ и для ускорения свободного падения получим $g_h = G\dfrac{M}{(R+h)^2} = g_0\dfrac{R^2}{(R+h)^2}$.

Движение спутников планет по круговым орбитам.
Запишем для этого движения второй закон Ньютона:

$$ma_n = \frac{mv^2}{R+h} = \frac{m(2\pi)^2}{T^2}(R+h) = mg_0\frac{R^2}{(R+h)^2} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

где *m* – масса спутника, *M* – масса планеты, *R* – ее радиус, *h* –высота орбиты над поверхностью планеты, g_0 - ускорение свободного падения на ее поверхности. Из этого уравнения можно найти скорость спутника v и его период обращения *T*.
Если $h \ll R$, т.е. спутник летает на небольшой высоте, тогда

$\dfrac{mv^2}{R} = mg_0$ и для первой космической скорости v_1 получим:

$$v = v_1 = \sqrt{R g_0}$$

.

I.Механика. Гравитационное поле.

v_1- скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало r_a v_a спутником Земли (не вернулось на Землю).

Эллиптические орбиты. $v_п$

В общем случае движение планет и их спутников происходит по эллиптическим орбитам. Гравитационные силы Солнца или планет не создают момента силы, поэтому момент импульса планет или спутников сохраняется и $r_п$ - радиус орбиты и $v_п$ скорость на орбите в перигее, а и r_a v_a радиус и скорость в апогее (Рис.26).

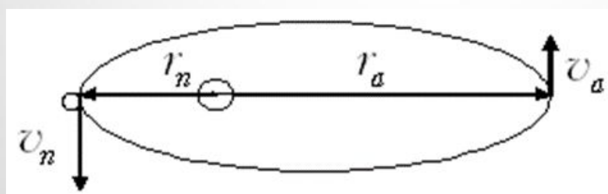


Рис.26

Между ними существует следующее соотношение:

$$L = mr_п^2 v_п = mr_a v_a$$

I.Механика. Гравитационное поле.

Потенциальная энергия гравитационного поля.

Рассмотрим гравитационное взаимодействие материальной точки массой m и шара (Земли) массой M и радиуса R (Рис.26).

$$dU = -dA = -\vec{F}d\vec{s} = -F\,ds\cos\alpha = -\left(-G\frac{mM}{r^2}\right)dr$$

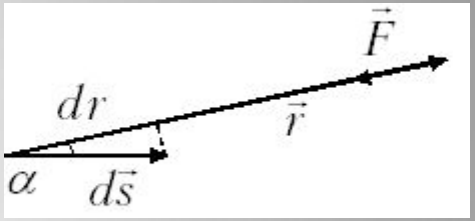


Рис.26

Беря неопределенный интеграл, получим:

$$U(r) = \int G\frac{mM}{r^2}dr + C = -G\frac{mM}{r} + C$$

Если потенциальная энергия обращается в ноль на бесконечности, то константа интегрирования C=0 и $U(r) = -G\frac{mM}{r}$

Если принять потенциальную энергию равной нулю на поверхности Земли $U(r = R) = -G\frac{mM}{R} + C = 0$ и $C = G\frac{mM}{R}$.

Потенциальная энергия в этом случае принимает вид:

$$U(r) = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{r}$$

I.Механика. Гравитационное поле.

Если высота над поверхностью шара (Земли) мала $h << R$,то

$$U = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{R+h} = G\frac{mM(R+h-R)}{R^2} = G\frac{mMh}{R^2} = mgh$$

и

получаем известное выражение для потенциальной энергии тела на высоте *h* от поверхности Земли.

Вторая космическая скорость – скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло поле притяжение Земли (удалилось от него на бесконечность). Если принять потенциальную энергию на бесконечности, равной нулю, то закон сохранения энергии запишется в виде: $\frac{mv_2^2}{2} - G\frac{mM}{R} = 0$, где выражение в

правой части равенства – полная энергия тела на поверхности Земли. На бесконечно большом расстоянии от Земли кинетическая и потенциальная энергии обращаются в ноль и

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2G\frac{MR}{R^2}} = \sqrt{2g_0R} = 11{,}2 \text{—}$$

Расчет первой космической скорости у поверхности Земли

$$v_I = \sqrt{gR}$$

$$v_I = \sqrt{9{,}8\frac{м}{с^2} * 6{,}4 * 10^6 м} = 7900\frac{м}{с} = 7{,}9\frac{км}{с}$$

Вторая космическая скорость

Вторая космическая скорость – минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли (или небесного тела) для того, чтобы оно преодолело гравитационное притяжение Земли (или небесного тела).

$$v_{II} = \sqrt{2gR}$$

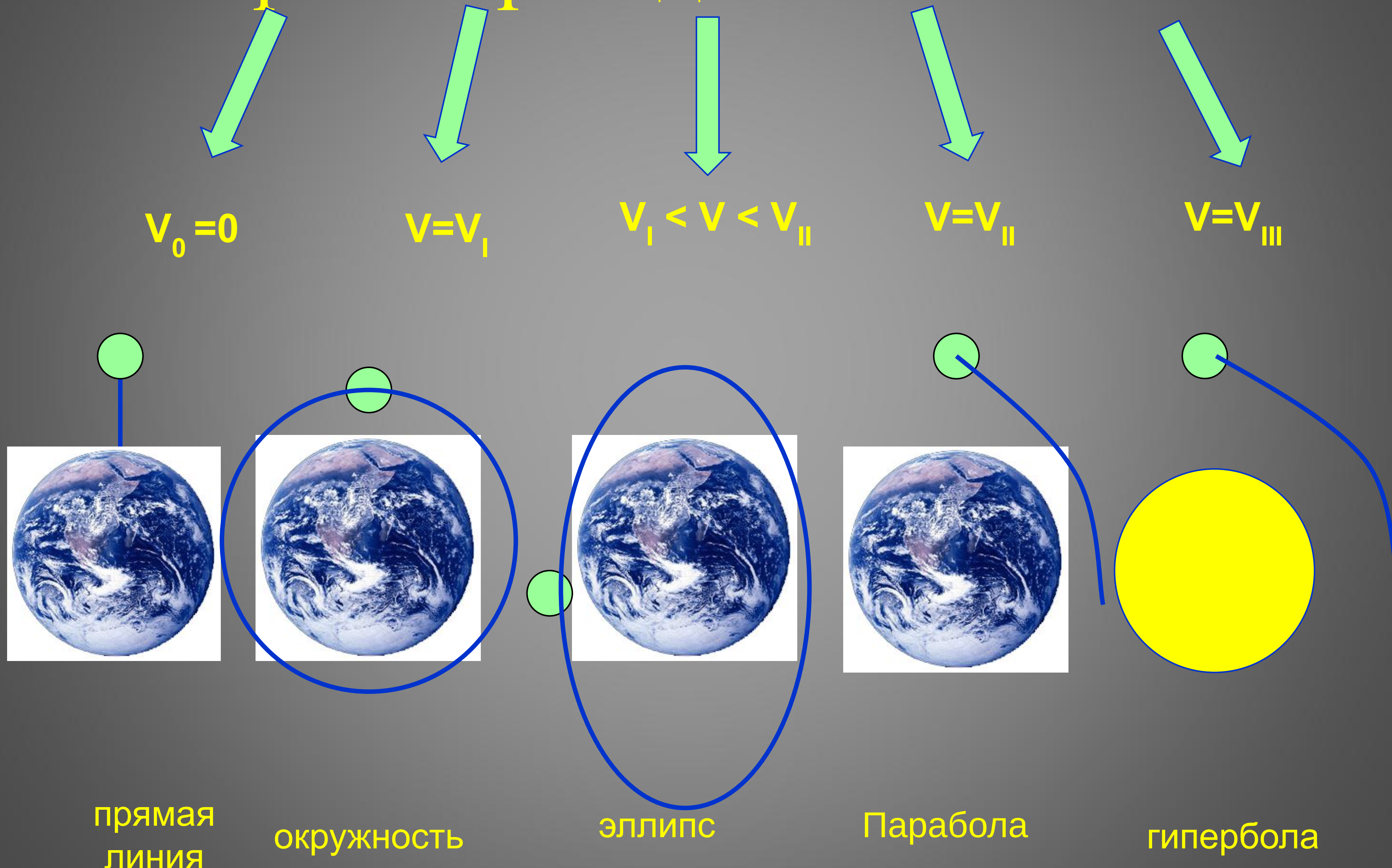
V_{II}= 11,2 км/с

Третья космическая скорость

Минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли для того, чтобы оно преодолело гравитационное притяжение Солнца.

$$v_{III} = 16{,}7\,\frac{км}{с}$$

Траектории движения тел



I.Механика. Метод Потенциальных кривых

$F = -\dfrac{dU}{dx}$ отрицательна.

Слева от минимума тангенс угла наклона касательной отрицателен, а сила положительна. В точке минимума сила равна нулю, т.е. это есть положение равновесия. При смещении от этой точки вправо возникает сила возвращающая материальную точку в положение равновесия. Тот же результат будет и при смещении влево. Поэтому равновесие в этом случае является устойчивым. Вблизи максимума потенциального барьера положение равновесия неустойчиво. Пусть $E_{полн}$ – полная энергия материальной точки. Полная энергия $E_{полн} = E_{кин} + E_{пот} \geq E_{пот}$. В точках 3 и 4 пересечения прямой полной энергии с потенциальной кривой полная энергия равна потенциальной, поэтому движение на участке 3-4 возможно, а вне этого отрезка, где $E_{полн} < E_{пот}$ невозможно.

I.Механика. Метод Потенциальных кривых

отрицательна.

Слева от минимума тангенс угла наклона касательной отрицателен, а сила положительна. В точке минимума сила равна нулю, т.е. это есть положение равновесия. При смещении от этой точки вправо возникает сила возвращающая материальную точку в положение равновесия. Тот же результат будет и при смещении влево. Поэтому равновесие в этом случае является устойчивым. Вблизи максимума потенциального барьера положение равновесия неустойчиво. Пусть $E_{полн}$ – полная энергия материальной точки. Полная энергия $E_{полн} = E_{кин} + E_{пот} \geq E_{пот}$. В точках 3 и 4 пересечения прямой полной энергии с потенциальной кривой полная энергия равна потенциальной, поэтому движение на участке 3-4 возможно, а вне этого отрезка, где $E_{полн} < E_{пот}$ невозможно.

I.Механика. Гравитационное поле.

Примеры решения задач

Задача 31. Найдите путь, который пройдет тело за 1 с, свободно падая без начальной скорости на высоте от поверхности Земли, равной ее радиусу.

Решение. При свободном падении путь, проходимый телом

Равен $s = \frac{g_h t^2}{2}$, где g_h - ускорение свободного падения на высоте

$h = R$ и $g_h = g_0 \frac{R^2}{(R + R)^2} = \frac{g_0}{4}$, откуда $s = 1,25$м.

Задача 32. Найдите силу притяжения к Земле космического корабля массы 10 тонн, находящегося на расстоянии от поверхности Земли, в четыре раза большем ее радиуса.

Решение. На расстоянии 5 радиусов Земли на космонавта будет действовать сила притяжения, равная

$$mg_h = mg_0 \frac{R^2}{(R + 4R)^2} = \frac{mg_0}{25} = 4\text{кН}$$

I.Механика. Гравитационное поле.

Задача 33. Найдите отношение скоростей двух космических кораблей, вращающихся по круговым орбитам на расстояниях от поверхности Земли, равных одному и двум земным радиусам.

Решение. Запишем второй закон Ньютона, для спутников, вращающихся вокруг Земли на расстояниях одного и двух радиусов от поверхности под действием соответствующих сил тяжести:

$$\frac{m_1 v_1^2}{R+R} = m_1 g_R = m_1 g_0 \frac{R^2}{(R+R)^2} = \frac{m_1 g_0}{4}$$

$$\frac{m_2 v_2^2}{R+2R} = m_2 g_{2R} = m_2 g_0 \frac{R^2}{(R+2R)^2} = \frac{m_2 g_0}{9}$$

Разделив первое уравнение на второе и извлекая квадратный корень получим 1,22.

Задача 34. Найдите период обращения спутника, движущегося по круговой орбите вблизи поверхности некоторой планеты, средняя плотность вещества которой равна 3,3 г/см^3. Гравитационная постоянная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг$\cdot$с^2.

I.Механика. Гравитационное поле.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для вращательного движение, выразив нормальное ускорение через период обращения:

$$ma_n = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = mg_0 = mG\frac{M}{R^2}$$

Выразим в этом выражении массу планеты *M* через плотность и объем шара, тогда получим:

$$a_n = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\rho\, 4/3\,\pi, \text{ откуда}$$

$$T = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{G\rho}} = 6,5\cdot 10^5 \text{с.}$$

Задача 35. Спутник запущен вертикально вверх со второй космической скоростью. На некоторой высоте над поверхностью Земли потенциальная энергия спутника составляет 75% его первоначальной энергии. Потенциальная энергия на поверхности Земли при этом принимается нулевой. Найдите отношение этой высоты к радиусу Земли.

I.Механика. Гравитационное поле.

Решение. Запишем закон сохранения энергии, приняв, что потенциальная энергия обращается в ноль на поверхности Земли:

$$G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{R+h} = 3/4\,m\frac{v_2^2}{2} = 3/4\,m\frac{2g_0R}{2} = 3/4\,mG\frac{M}{R^2},$$

откуда

$$h = 3R.$$

Задача 36. Спутник запускается со второй космической скоростью. Найдите, во сколько раз уменьшится его кинетическая энергия по сравнению с начальной на высоте, равной радиусу Земли. Участок разгона ракеты и сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Примем потенциальную энергию на поверхности Земли равной нулю, тогда на основе закона сохранения энергии:

$$m\frac{v_2^2}{2} = mG\frac{MR}{R^2} = G\frac{mM}{R} = m\frac{v^2}{2} + G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{2R},$$ откуда

$$\frac{m\frac{v_2^2}{2}}{m\frac{v^2}{2}} = \frac{G\frac{mM}{R}}{G\frac{mM}{2R}} = 2$$

I.Механика. Гравитационное поле.

- **Задача 37.** Найдите расстояние, на которое ракета, запущенная вертикально вверх с поверхности Земли с первой космической скоростью v_1, удалится от поверхности Земли. Радиус Земли равен R = 6400 км. Вращение Земли не учитывать.
- **Решение.** Принимая потенциальную энергию равной нулю на поверхности Земли, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{R+h},$$

где $\frac{mv_1^2}{2}$ – начальная кинетическая энергия ракеты, соответствующая

первой космической скорости $v_1 = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{G\frac{M}{R^2}R} = \sqrt{G\frac{M}{R}}$, h –

высота подъема ракеты, на которой ее скорость обращается в ноль. Подставляя v_1 в первое уравнение, получим

$$\frac{m_1 v_1^2}{R+R} = g,$$

откуда h=R=6400 км.

I.Механика. Гравитационное поле.

Задача 38. Определите, при каком значении высоты над поверхностью Земли использование формулы зависимости потенциальной энергии от высоты $E_{\text{пот}} \approx mg_o h$ приводит к ошибке 25%. Радиус Земли равен 6400 км.

Решение. Потенциальная энергия тела в поле притяжения Земли, обращающаяся в ноль на ее поверхности, имеет вид:

$$E_{\text{пот}} = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{r}$$

Подставляя $h = r - R$, будем иметь:

$$E_{\text{пот}} = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{r} = G\frac{mM(r-R)}{(R+h)R} = mG\frac{Mh}{R^2}\frac{R}{R+h} = mg_0h\frac{R}{R+h}.$$

Ошибка в 25% получится при $\dfrac{R}{R+h} = \dfrac{3}{4}$, откуда $h = R/3 \approx 2130$ км.