Практическое занятие №2. Вычисление вероятностей событий с использованием формулы полной вероятности и формулы Байеса

Задача . . В торговую фирму поступили телевизоры от трех фирм изготовителей в соотношении 2:5:3. Телевизоры, поступающие от первой фирмы, требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, от второй и третьей — соответственно в 8% и 6% случаев. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение. В опыте, рассматриваемом в задаче, можно выделить два этапа. На первом этапе осуществляется продажа торговой фирмой телевизора, изготовленного в одной из трех фирм, упомянутых в условии задачи. Второй этап представляет собой эксплуатацию телевизора, в результате чего он либо ломается в течение гарантийного срока, либо нет.

Построим систему гипотез как возможных исходов первого этапа опыта:

$$H_i = \{\text{проданный телевизор был произведен } i\text{-й фирмой}\},\ i = \overline{1,3}.$$

Очевидно, что построенная система событий удовлетворяет требованиям, предъявляемым к гипотезам, так как эти события являются несовместными (телевизор не может быть изготовлен двумя фирмами одновременно), и никакие другие исходы первого этапа опыта невозможны (так как в продажу поступили телевизоры только указанных фирм).

Определим событие, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{проданный телевизор потребует гарантийного ремонта}\}.$$

Согласно условию задачи телевизоры поступили в продажу от трех фирм в пропорции 2:5:3. Обозначим через x количество телевизоров, приходящихся на одну долю в указанной пропорции. Тогда общее количество телевизоров, поступивших в продажу:

$$2x + 5x + 3x = 10x.$$

При этом количество телевизоров, поступивших от первой фирмы равно $2x$, следовательно, согласно классической формуле вычисления вероятностей:

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{2x}{10x} = \frac{1}{5}.$$

Аналогично найдем вероятности остальных гипотез:

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(H_3) = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A относительно каждой из гипотез заданы в условии задачи:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}15, \qquad \mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}08, \qquad \mathbf{P}(A|H_3) = 0{,}06.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}15 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}06 = 0{,}088.$$

З а д а ч а . После осмотра больного врач считает, что равновозможно одно из двух заболеваний C или D. Для уточнения диагноза больного направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании C в 30 процентах случаев, а при заболевании D — в 20 процентах случаев. Анализ дал положительную реакцию. Какое заболевание становится более вероятным?

Решение. В данной задаче опыт, так же, как и в предыдущей задаче, может быть разбит на два этапа. На первом этапе врач ставит диагноз. Систему гипотез можно сформулировать следующим образом:

$$H_1 = \{\text{пациент имеет заболевание C}\},$$
$$H_2 = \{\text{пациент имеет заболевание D}\}.$$

Для ответа на поставленный в задаче вопрос нужно найти апостериорные вероятности гипотез. Априорные вероятности гипотез, согласно условию задачи, равны:

$$\mathbf{P}(H_1) = 0{,}5, \quad \mathbf{P}(H_2) = 0{,}5.$$

Рассмотрим событие

$$A = \{\text{анализ дал положительную реакцию}\}.$$

Для нахождения апостериорных вероятностей гипотез, т. е. $\mathbf{P}(H_1|A)$ и $\mathbf{P}(H_2|A)$, воспользуемся формулой Байеса. Для того чтобы воспользоваться формулой Байеса, необходимо найти условные вероятности события A относительно каждой из гипотез. Согласно условию задачи они равны соответственно:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}3, \qquad \mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}2.$$

Воспользуемся формулой Байеса:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6,$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{4} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4.$$

Так как $\mathbf{P}(H_1|A) > \mathbf{P}(H_2|A)$, то заболевание С становится более вероятным.

Ответ. Более вероятно заболевание С.

Задача [illegible]. В тире имеется пять винтовок, вероятности попадания из которых соответственно равны 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Стрелок берет наудачу одну из винтовок. Найти вероятность попадания в цель.

Решение.

Воспользуемся формулой полной вероятности. Вероятность попадания в цель равна

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)P(A/H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятность выбора стрелком i-й винтовки, очевидно, что $P(H_i)=1/5$, $i=1, \ldots, 5$; $P(A/H_i)$ – вероятность попадания стрелком из i-й винтовки, $i=1, \ldots, 5$, эти вероятности заданы.

Отсюда имеем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1}{5}\cdot 0{,}5+\ldots+\frac{1}{5}\cdot 0{,}9=\frac{0{,}5+\ldots+0{,}9}{5}=\frac{3{,}5}{5}=0{,}7.$$

Задача [illegible]. Среди поступающих на склад деталей 30% из цеха 1, 70% – из цеха 2. Вероятность брака для цеха 1 равна 0,02, для цеха 2 – 0,03. Наудачу взятая деталь оказалась доброкачественной. Какова вероятность того, что она изготовлена в цехе 1?

Обозначим гипотезы: H_1 – деталь поступила из цеха 1, H_2 – деталь поступила из цеха 2. Очевидно, что $P(H_1)=0{,}7$, $P(H_1)=0{,}3$. Далее обозначим A – наудачу взятая деталь оказалась доброкачественной. По условию задачи имеем: $P(A/H_1)=1-0{,}02=0{,}98$, $P(A/H_2)=1-0{,}03=0{,}97$. Тогда по формуле Байеса искомая вероятность равна

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{0{,}7\cdot 0{,}98}{0{,}7\cdot 0{,}98+0{,}3\cdot 0{,}97}=\frac{0{,}686}{0{,}686+0{,}291}=\frac{0{,}686}{0{,}977}=0{,}7021.$$

Задача [illegible]. В первом ящике находится 5 белых и 3 черных шара, а во втором – 3 белых и 5 черных. Из первого ящика перекладывают во второй наугад два шара, а затем берут из второго один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется черным.

Решение.

Переложить из второго ящика можно: 2 белых шара (гипотеза H_1); 1 белый и 1черный шар (гипотеза H_2); 2 черных шара (гипотеза H_3).

Вероятность гипотезы H_1 равна

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{2!\cdot 6!}{8!} = \frac{6}{8\cdot 7} = \frac{3}{28}.$$

Вероятность гипотезы H_3 равна

$$P(H_1) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{2!\cdot 6!}{8!} = \frac{5\cdot 4}{8\cdot 7} = \frac{10}{28}.$$

Отсюда вероятность гипотезы H_2 равна

$$P(H_2) = 1 - \frac{3}{28} - \frac{10}{28} = \frac{15}{28}.$$

Обозначим искомое событие A – «выбран черный шар».

Определим по классической формуле условные вероятности:

$$P(A/H_1) = \frac{5}{6};\; P(A/H_2) = \frac{4}{6};\; P(A/H_3) = \frac{3}{6}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{3}{28}\cdot\frac{5}{6} + \frac{10}{28}\cdot\frac{4}{6} + \frac{15}{28}\cdot\frac{3}{6} = \frac{15+40+45}{28\cdot 6} = \frac{100}{168}.$$

Задача 12. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех группах. В первой группе из 30 студентов 8 выполнили работу на «отлично», во второй, где 28 студентов, – 6 «отличных» работ, в третьей, где 27 студентов, – 9 работ выполнены на «отлично». Найти вероятность того, что первая выбранная наудачу работа из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу, окажется «отличной».

Решение.

Имеем три гипотезы: H_1 – выбрана работа из 1-й группы, H_2 – выбрана работа из 1-й группы, H_3 – выбрана работа из 1-й группы. Очевидно, что

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Обозначим искомое событие A – выбрана работа, выполненная на «отлично». Определим по классической формуле условные вероятности:

$$P(A/H_1) = \frac{8}{30};\ P(A/H_2) = \frac{6}{28};\ P(A/H_3) = \frac{9}{27}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{30} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{28} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{27} = \frac{1}{3}\cdot\frac{8\cdot 28\cdot 27 + 6\cdot 30\cdot 27 + 9\cdot 30\cdot 28}{30\cdot 28\cdot 27} =$$

$$\frac{19}{70} \approx 0{,}271.$$

Задача [illegible]. Укупорка банок томатного сока производится двумя автоматами, продукция которых поступает на общий конвейер. Производительность второго автомата в 1,5 раза выше производительности первого. Доля банок с дефектами упаковки в среднем составляет 0,5% – у первого и 0,02% – у второго автомата. Какова вероятность того, что взятая наугад банка сока будет иметь дефекты упаковки?

Решение.

Обозначим искомое событие A – «взятая наугад банка сока будет иметь дефекты упаковки». Вероятность этого события по формуле полной вероятности равна:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A \setminus H_i), \qquad (1)$$

где H_i – гипотезы, означающие: H_1 – укупорка банки томатного сока произведена первым автоматом; H_2 – укупорка банки томатного сока произведена вторым автоматом;

$P(A \setminus H_i)$ – условные вероятности события A при выполнении указанных гипотез.

Очевидно, что $P(A \setminus H_1)=0{,}005$, $P(A \setminus H_2)=0{,}0002$.

Определим далее вероятности гипотез $P(H_i)$, учитывая, что:

$$P(H_1)+P(H_2)=1; \qquad (2)$$

$$P(H_2)=1{,}5P(H_1). \qquad (3)$$

Подставив равенство (3) в уравнение (2), получим $2{,}5P(H_1)=1$, откуда получим

$$P(H_1) = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4\,.$$

Отсюда определим вероятность второй гипотезы

$$P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6\,.$$

Подставив найденные вероятности в формулу (1), получим:

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}005 + 0{,}6 \cdot 0{,}0002 = 0{,}00212\,,\ \text{или } 0{,}212\%.$$

Домашнее задание

Задача . Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

Задача . 1/3 ламп производится на первом заводе, 1/4 – на втором, остальные – на третьем. Вероятности брака в продукции первого, второго и третьего заводов соответственно равны 0,2, 0,15 и 0,05. Найдите вероятность того, что бракованная лампа произведена на первом, втором или третьем заводе.