Занятие №5. Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.

Прокофьев Александр Александрович,

Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ

Содержание курса

№	Тема занятий
1	Основные структурные изменения и особенности проведения государственной аттестации учащихся в 2015. Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
2	Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
3	Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.
4	Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.
⑤	Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.
Итоговая аттестация	По результатам посещаемости и успешности выполнения контрольных работ.

Содержание занятия

- О комбинированных методах решения задач с параметрами
- Решение задач разными методами в литературе для подготовки к ЕГЭ 2015 (проф. уровень)
- Технология подготовки учащихся к овладению комбинированными методами решения задач с параметрами, решение одной задачи разными методами
- Печатные и электронные ресурсы.

Пример . Исследовать функцию $y = \cos x \cos\left(x\sqrt{3}\right)$ на периодичность.

$\triangle$ $D(y) = \mathbb{R}$. Допустим, что данная функция имеет период $T \neq 0$. Тогда для $x_0 = 0 \in D(y)$ и $x_0 + T = T \in D(y)$ должно выполняться условие $y(x_0) = y(T) = 1$, т. е.

$$\cos T \cos\left(T\sqrt{3}\right) = 1. \tag{3}$$

Так как $-1 \leqslant \cos T \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos\left(T\sqrt{3}\right) \leqslant 1$, то равенство (3) возможно, если

$$\text{(А)} \begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos\left(T\sqrt{3}\right) = 1 \end{cases} \text{ или (Б) } \begin{cases} \cos T = -1, \\ \cos\left(T\sqrt{3}\right) = -1. \end{cases}$$

В случае (А) получаем $\begin{cases} T = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ T\sqrt{3} = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

т. е. $k = n\sqrt{3}$, и поэтому $\sqrt{3} = \dfrac{k}{n} \in \mathbb{Q}$, но $\sqrt{3}$ — иррациональное число.

В случае (Б) имеем $\begin{cases} T = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ T\sqrt{3} = \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

т. е. $\sqrt{3} = \dfrac{1 + 2k}{1 + 2n} \in \mathbb{Q}$. Опять получили противоречие. Следовательно, функция $y = \cos x \cos\left(x\sqrt{3}\right)$ — непериодическая. ▲

О комбинированных методах решения задач с параметром

Метод решения задачи с параметром можно назвать комбинированным, если на разных этапах решения задачи приходится использовать разные методы:

- алгебраический + (графический или геометрический);
- аналитический = (алгебраический + функциональный) + (графический или геометрический);
- графический (с применением производной) + алгебраический;
- алгебраический + графический + алгебраический;
- алгебраический + графический образ.

Можно также классифицировать по использованию в решении в том или ином порядке разделов математики: алгебра +

ализ + геометрия.

Часто подобные задачи сложны и специфичны!

О комбинированных методах решения задач с параметром

Пример. Найдите все значения параметра a такие, что каждый корень уравнения $3^{|x|+1} - a^3 + 240 \cdot \sin\frac{\pi|x|}{4} = 5a^2 + 3a + 3$ является корнем данного уравнения только при одном значении параметра.

Решение. Преобразуем уравнение $3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin\frac{\pi|x|}{4} = a^3 + 5a^2 + 3a$.

Введем функции $f(x) = 3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin\frac{\pi|x|}{4}$ и $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a$.

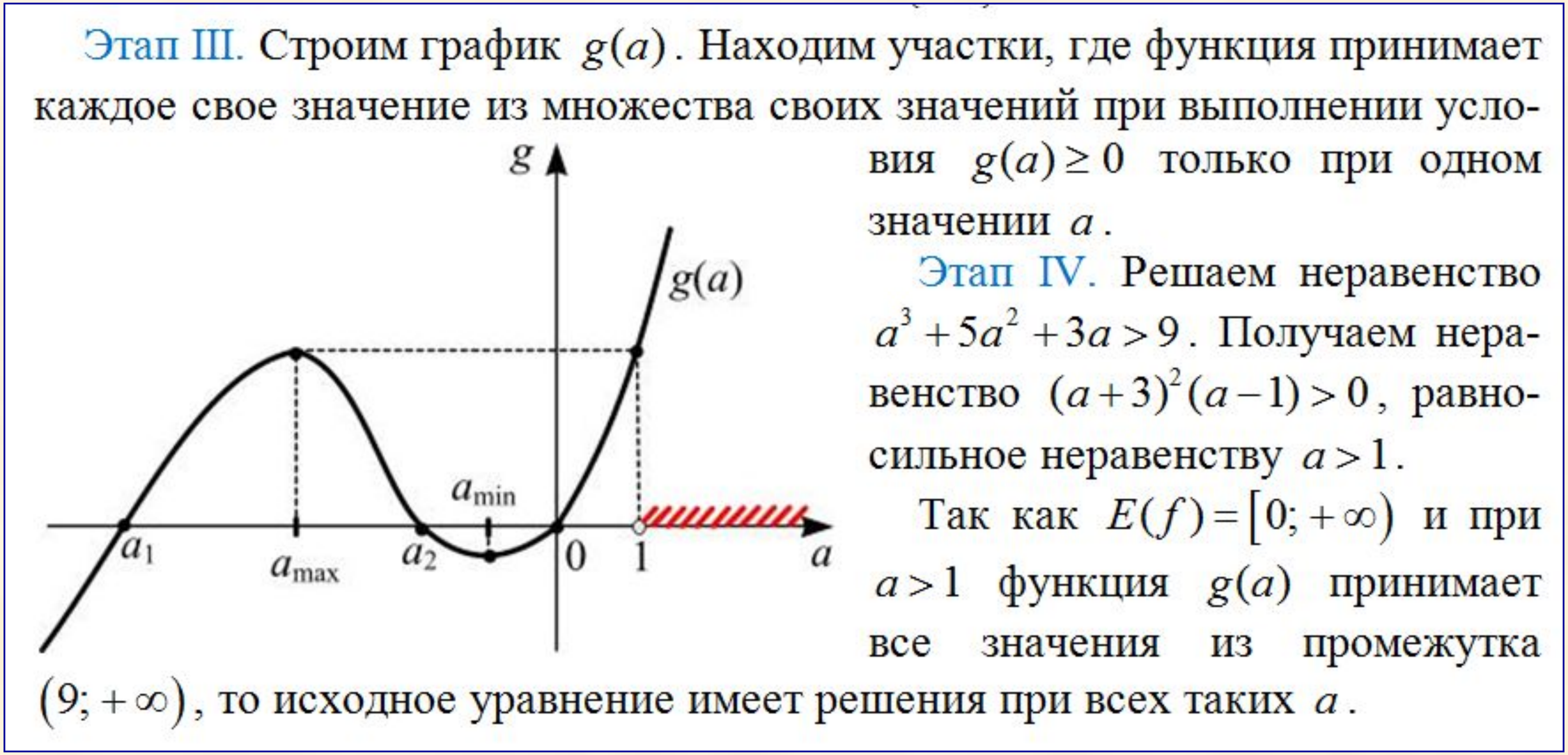
Тогда исходное уравнение имеет вид $f(x) = g(a)$.

Этап I. Выясняем свойства функции $f(x)$: $D(f) = \mathbb{R}$, непрерывна, четная и неотрицательная при всех $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$ и $E(f) = [0; +\infty)$.

Тогда уравнение $f(x) = g(a)$ имеет решение при a таких, что $g(a) \geq 0$.

Этап II. Исследуем функцию $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a$ (находим участки монотонности и знакоположительности ($g(a) \geq 0$), точки экстремумов $a_{\max} = -3$, $a_{\min} = -\frac{1}{3}$ и экстремумы $g_{\max}(-3) = 9$ и $g_{\min}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}$).

О комбинированных методах решения задач с параметром



Этап III. Строим график $g(a)$. Находим участки, где функция принимает каждое свое значение из множества своих значений при выполнении условия $g(a)\geq 0$ только при одном значении a.

Этап IV. Решаем неравенство $a^3+5a^2+3a>9$. Получаем неравенство $(a+3)^2(a-1)>0$, равносильное неравенству $a>1$.

Так как $E(f)=\left[0;+\infty\right)$ и при $a>1$ функция $g(a)$ принимает все значения из промежутка $(9;+\infty)$, то исходное уравнение имеет решения при всех таких a.

Ответ: $a>1$.

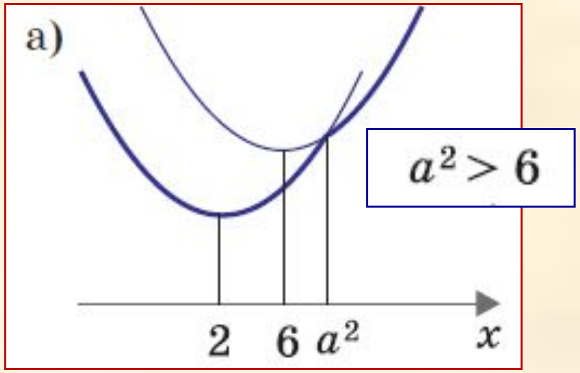
Комбинированные методы решения задач с параметром

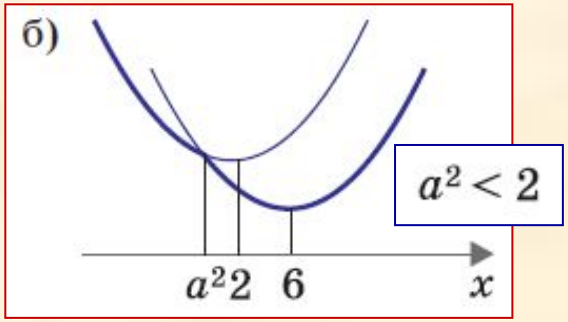
Задача 11. Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

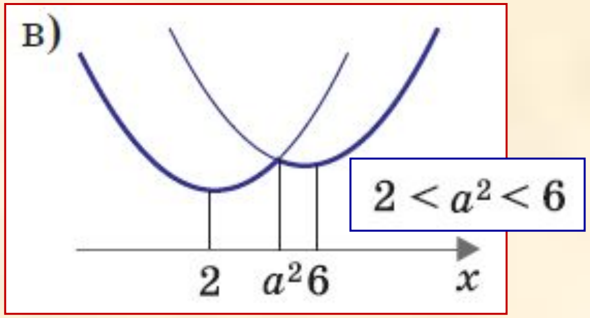
Решение. Если $x \geq a^2$, то $f(x) = x^2 - 12x + 4a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 6$. Если же $x \leq a^2$, то $f(x) = x^2 - 4x - 4a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = 2$, ветви которой также направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. .).

Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно — три, в единственном случае (рис. .*в*):

$$2 < a^2 < 6 \Leftrightarrow a \in \left(-\sqrt{6}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{6}\right).$$







Ответ: $a \in \left(-\sqrt{6}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{6}\right)$.

Комбинированные методы решения задач с параметром

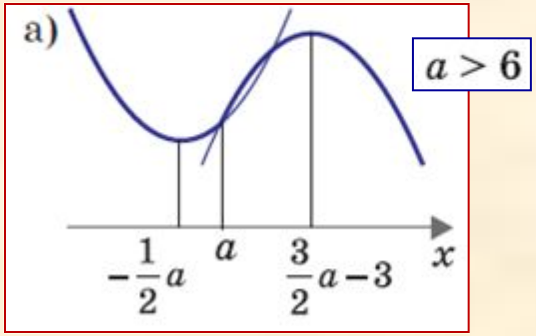
Задача 12. Найти все значения a, при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет нечетное число общих точек с графиком функции $f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)|x - a|$.

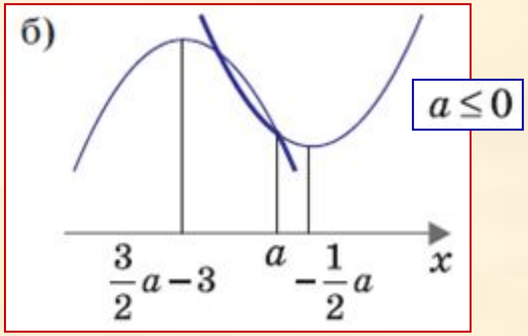
Решение. Если $x \ge a$, то $f(x) = -x^2 + (3a - 6)x + 3a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = \frac{3}{2}a - 3$. Если же $x \le a$, то $f(x) = x^2 + ax - 3a$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -\frac{1}{2}a$, ветви которой уже направлены вверх.

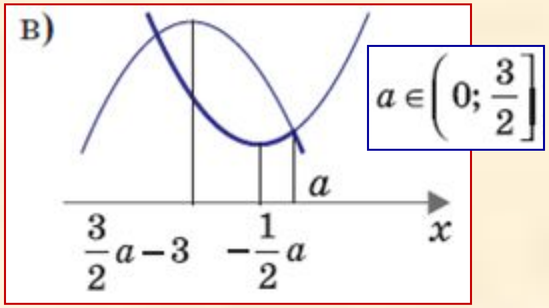
Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис.).

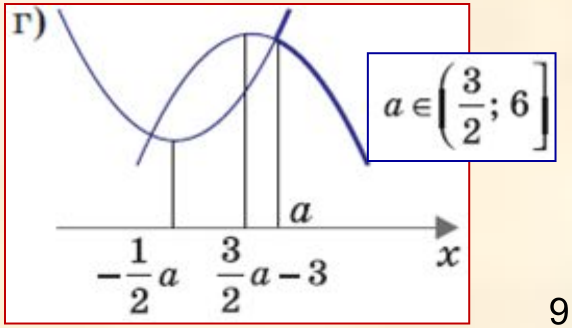
Любая горизонтальная прямая пересекает график функции $y = f(x)$ в нечетном числе точек тогда и только тогда, когда функция монотонна на всей числовой прямой. Это происходит в только в нном случае (рис. *б*): $\frac{3}{2}a - 3 \le a \le -\frac{1}{2}a \Leftrightarrow a \le 0$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0]$.









Комбинированный метод в задачах с параметром

Задача 4. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$ имеет ровно три различных корня?

Решение. Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y = |x^2 - 5|x||$ и $y = a(x + 4)$.

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(-4; 0)$.

Как видно из рисунка, существуют две прямые, проходящие через точку $(-4; 0)$ и пересекающие график функции $y = |x^2 - 5|x||$ ровно в трех точках. Одна из этих прямых есть ось Ox и соответствует значению $a = 0$. Другая прямая является касательной к графику функции $y = -x^2 + 5x$ в точке, принадлежащей интервалу $x \in (0; 5)$. Найдем значение a, соответствующее этой прямой. При таком a уравнение $-x^2 + 5x = a(x + 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (a - 5)x + 4a = 0$ должно иметь одно решение на интервале $x \in (0; 5)$. $D = (a - 5)^2 - 16a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 1$ или ~~$a = 25$~~.

Первый график

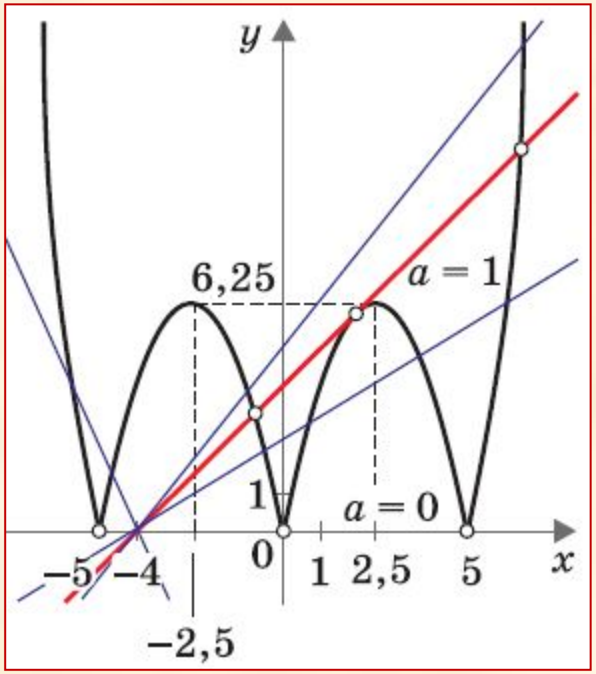
$$y = |x^2 - 5|x||$$

$y = x^2 + 5x$, если $x \le -5$;

$y = -x^2 - 5x$, если $-5 \le x \le 0$;

$y = -x^2 + 5x$, если $0 \le x \le 5$;

$y = x^2 - 5x$, если $x \ge 5$.



Ответ: $a = 0$, $a = 1$.

Сочетание алгебраического и геометрического методов

Пример. Пусть G — треугольник, образуемый при пересечении прямых l_1, l_2, l_3, заданных соответственно уравнениями

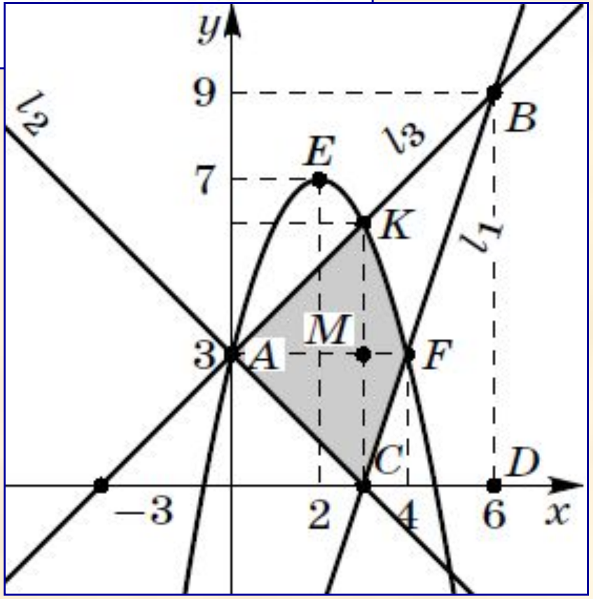
$$y - 3x + 9 = 0, \quad x + y - 3 = 0, \quad y - x - 3 = 0,$$

а фигура Ф состоит из точек множества G таких, что неравенство

$$t^2 + 2t(x-2) + 7 - y > 0$$

выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Ф.

Решение. Неравенство $t^2 + 2t(x-2) + 7 - y > 0$ является верным при всех $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена в его левой части отрицателен: $(x-2)^2 - (7-y) < 0$, т. е. $y < 7 - (x-2)^2$.



Если σ — площадь фигуры Ф, то $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где σ_1 — площадь треугольника ACF, σ_2 — площадь треугольника AKM, где $M(3;3)$ — точка пересечения AF и KC, σ_3 — площадь криволинейного треугольника KMF.

Так как $\sigma_1 = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 6$, $\sigma_2 = \frac{9}{2}$,

$$\sigma_3 = \int_3^4 (-x^2 + 4x)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_3^4 = \frac{5}{3}, \text{ то } \sigma = \frac{73}{6}.$$

Ответ: $\frac{73}{6}$.

Пример комбинации методов

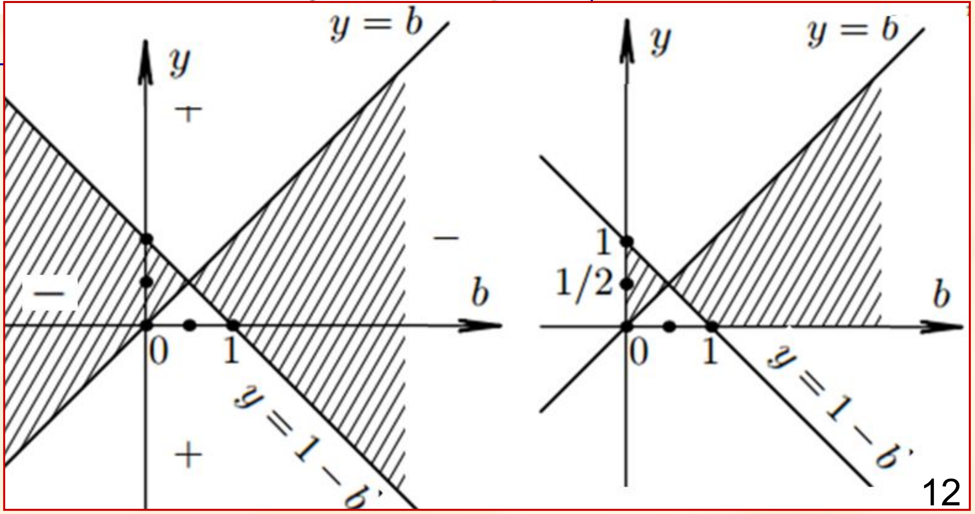
Пример. (химический факультет (весна), 2000, №6). При каждом значении параметра a решите неравенство $\sqrt{x+2a} > x + \sqrt{2a}$.

Решение. Введём обозначения $y = \sqrt{x+2a}$, $b = \sqrt{2a}$. Сразу заметим, что для y, b выполнены неравенства $y, b \geqslant 0$. Так как $x = y^2 - b^2$, исходное уравнение принимает вид $(y^2-b^2)-(y-b) < 0$, или

$$\begin{cases} (y-b)\big(y-(1-b)\big) < 0, \\ y \geqslant 0,\ b \geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Решим систему (*) двумя способами.

I. Графический способ. Так как уравнения $y = b$, $y = 1 - b$ задают прямые линии в плоскости $(b; y)$, удобно показать на графике области знакопостоянства функции $(y-b)\big(y-(1-b)\big) = 0$ и, учитывая неотрицательность переменных y, b, изобразить множество, являющееся решением системы.



Остаётся выписать ответ в терминах $(y; b)$:

если $b \in [0; 1/2]$, то $y \in (b; 1-b)$;
если $b \in (1/2; 1]$, то $y \in (1-b; b)$;
если $b > 1$, то $y \in [0; b)$.

Пример комбинации методов

$$\begin{cases} (y-b)(y-(1-b)) < 0, \\ y \geqslant 0,\ b \geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

II. Решим систему (*) аналитически. Для этого нам потребуется сравнить корни $y_1 = b$, $y_2 = 1-b$ между собой и с нулём. С нулём сравниваем, так как нам требуются неотрицательные корни. Из уравнений

$$b = 1-b, \qquad b = 0, \qquad 1-b = 0$$

находим решения $b = 0$, $b = 1/2$, $b = 1$. Значит, по переменной b исследуем систему (*) на каждом из участков по отдельности: $b \in [0;1/2]$, $b \in (1/2;1]$, $b > 1$. И опять приходим к ответу в терминах $(y;b)$:

если $b \in [0;1/2]$, то $y \in (b;1-b)$;
если $b \in (1/2;1]$, то $y \in (1-b;b)$;
если $b > 1$, то $y \in [0;b)$.

Вернемся к переменным (a,x):

$$\left[\begin{array}{l} b \in [0;1/2],\ y \in (b;1-b), \\ b \in (1/2;1],\ y \in (1-b;b), \\ b > 1,\ y \in [0;b) \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a \in [0;1/8],\ x \in (0;1-2\sqrt{2a}), \\ a \in (1/8;1/2],\ x \in (1-2\sqrt{2a};0), \\ a > 1/2,\ x \in [-2a;0). \end{array}\right.$$

Ответ: При $a < 0$ решений нет; если $a \in [0;1/8]$, то $x \in (0;1-2\sqrt{2a})$; если $a \in (1/8;1/2]$, то $x \in (1-2\sqrt{2a};0)$; если $a > 1/2$, то $x \in [-2a;0)$.

Пример с «пучком прямых» (ЕГЭ 2013)

Пример 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

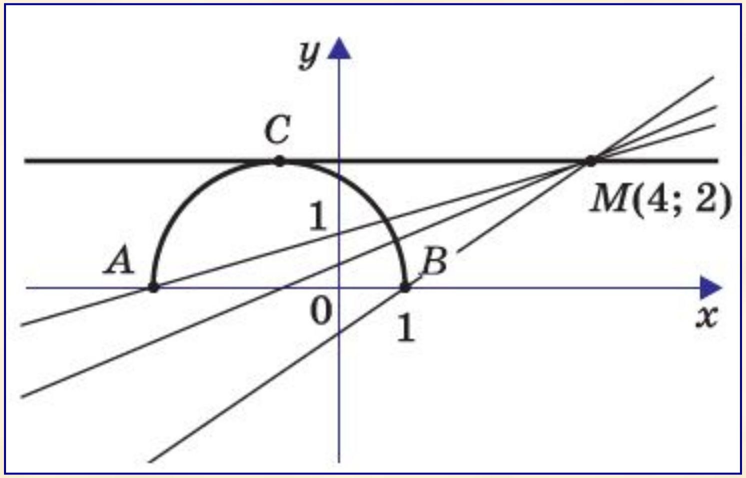
$$\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$$

и рассмотрим графики функций

$$y=\sqrt{3-2x-x^2} \text{ и } y=-ax+4a+2.$$

Поскольку правая часть в формуле $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ неотрицательна, то и левая ее часть не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2=3-2x-x^2, \\ y\ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2+y^2=4, \\ y\ge 0. \end{cases}$$



Графиком функции $y=-ax+4a+2$ является прямая. Заметим, что $y=-a(x-4)+2$ и если $x=4$, то $y=2$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y=-ax+4a+2$ при любом значении параметра проходит через точку $M(4;\, 2)$. Данное уравнение имеет единственный корень только в том случае, когда эта прямая имеет с полуокружностью единственную общую точку.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №5 – 6 (754)
С. ШЕСТАКОВ №5 – 6 (754)

Ответ: $\{0\}\cup\left[-\frac{2}{3};\, -\frac{2}{7}\right).$

(ЕГЭ, 2013). Найдите все значения a, при каждом из которых имеет единственный корень уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$.

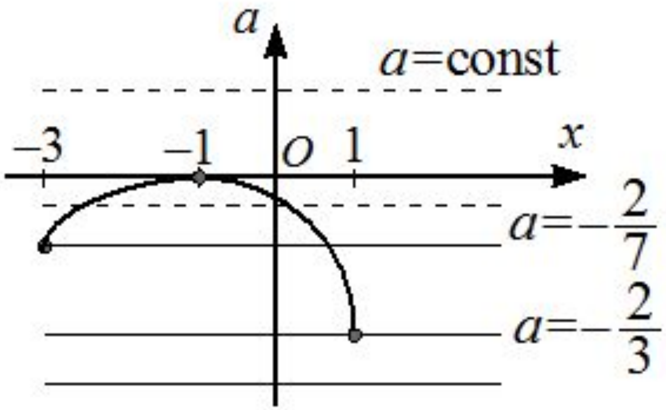
Решение. Так как $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3-2x-x^2}-2=a(4-x)$ и при $x=4$ подкоренное выражение отрицательно $3-2\cdot 4-4^2<0$, то можно записать $a=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$, $D(f)=[-3;1]$. Функция непрерывна на $D(f)$. Найдём её производную $f'(x)=\dfrac{-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}}{2\sqrt{3-2x-x^2}\cdot(4-x)^2}$.

Из уравнения $-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}=0$ получаем $x=-1$.

$-3<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$
$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$

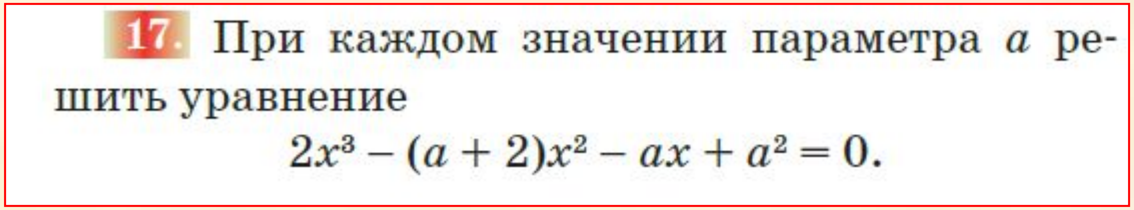
$$f(-3)=-\frac{2}{7},\ f(-1)=0,\ f(1)=-\frac{2}{3}.$$



Рисуем эскиз графика в системе координат Oxa и проводим прямые $a=\text{const}$. Определяем значения параметра, при которых эти прямые пересекают график функции $f(x)$ в одной точке.

Ответ: $a\in\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)\cup\{0\}$.

Параметр как неизвестное (комбинирование)



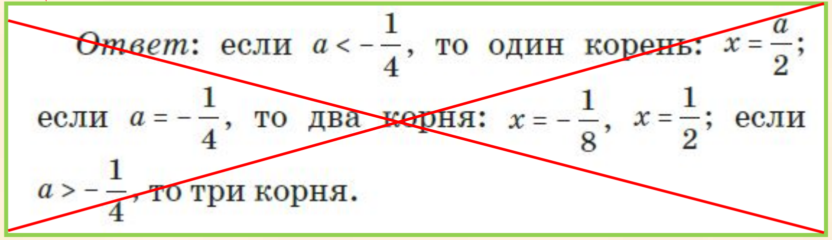
17. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2x^3-(a+2)x^2-ax+a^2=0.$$

Решение. Уравнение квадратное относительно a, решая его, получим:

$$\left[\begin{aligned}a&=2x\\a&=x^2-x\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x_1&=\frac{a}{2}\\x_{2,3}&=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}\end{aligned}\right..$$

ответ статьи



~~*Ответ*: если $a<-\frac{1}{4}$, то один корень: $x=\frac{a}{2}$; если $a=-\frac{1}{4}$, то два корня: $x=-\frac{1}{8}$, $x=\frac{1}{2}$; если $a>-\frac{1}{4}$, то три корня.~~

МАТЕМАТИКА

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г. №2 (729)

для учителей математики

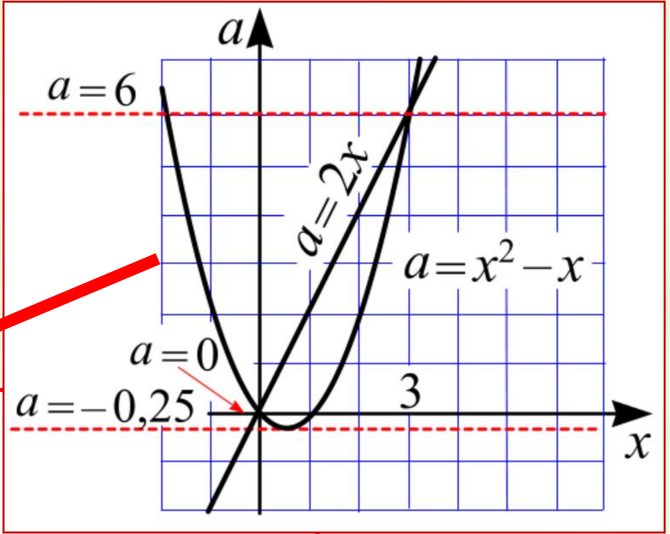
РЕШАЕМ ЗАДАЧИ
С ПАРАМЕТРАМИ
РАЗНЫМИ МЕТОДАМИ

А. АНДРЕЕВА,
г. Москва

февраль
2012

Требуется исследование

Графически
или
аналитически?



Ответ: если $a<-\frac{1}{4}$, то $x=\frac{a}{2}$; если $a=-\frac{1}{4}$, то $x=-\frac{1}{8}$, $x=\frac{1}{2}$; если $a=0$, то $x=0$, $x=1$; если $a=6$, то $x=-\frac{5}{2}$, $x=3$; если $-\frac{1}{4}<a<0$, $0<a<6$ и $a>6$, то $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

Комбинация методов

Пример. *Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение*

$$|y - x^2 + 4x - 5| + |y^2 - x^2 + 4x - 2ay + a^2 - 4| = 0$$

имеет ровно три различных решения.

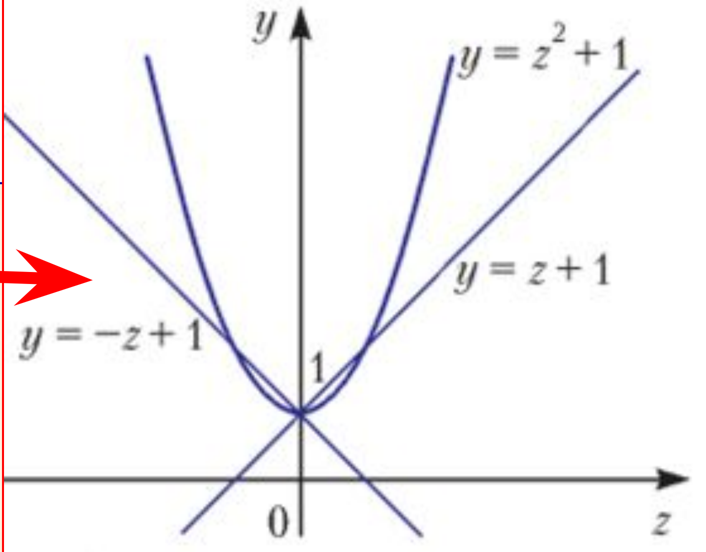
Решение.

Введя новую переменную $z = x - 2$ и преобразовав уравнение к виду $|y - 1 - z^2| + |(y - a)^2 - z^2| = 0$,

запишем равносильную систему $\begin{cases} y = z^2 + 1, \\ y = \pm z + a. \end{cases}$

Графически или аналитически?

Первое уравнение в системе координат zOy задает параболу с вершиной $(0; 1)$, а второе – «косой крест», состоящий из двух перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке $(0; a)$ (рис).



Очевидно, три общие точки парабола и крест имеют, только если центр креста совпадает вершиной параболы. Значит, $a = 1$.

Ответ: $a = 1.$

ОЛИМПИАДА
«ЛОМОНОСОВ-2012»
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

Окружность с изменяющимся радиусом

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства

$$x^2 + y^2 \le a$$

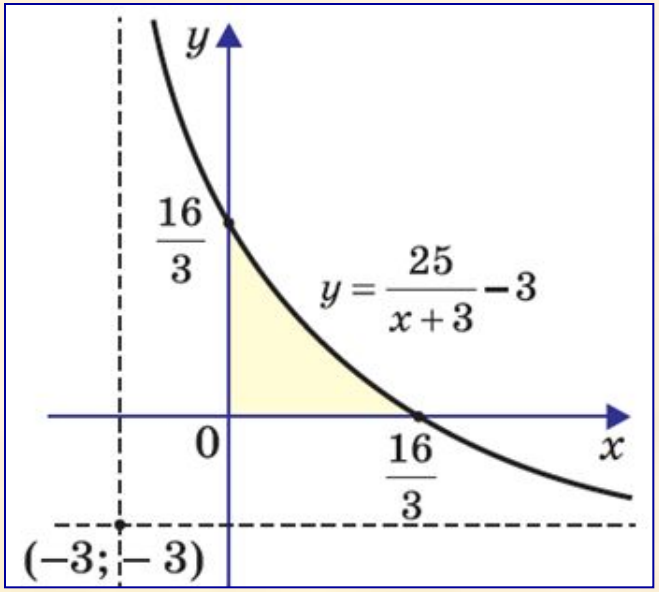
следует неравенство

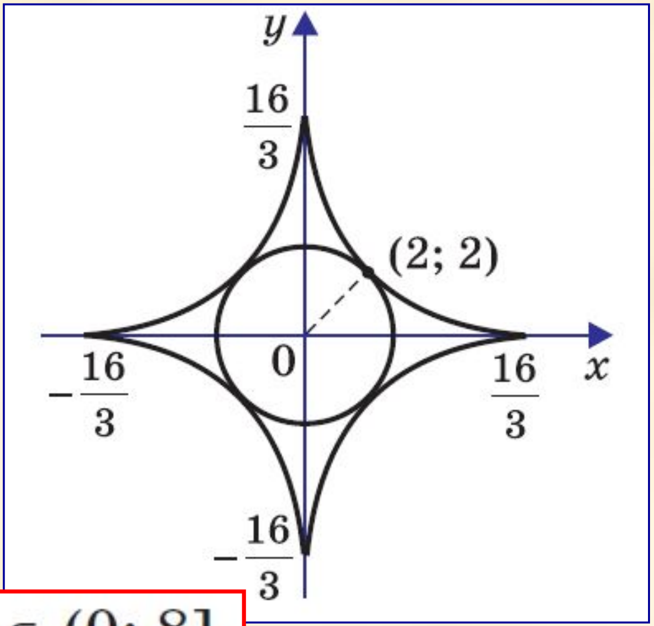
$$(|x| + 3)(|y| + 3) \le 25.$$

Решение. Согласно условию задачи, нужно найти такие значения параметра $a > 0$, при которых множество решений первого неравенства является подмножеством решений второго неравенства. Решением первого неравенства являются точки круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$.

Множества решений каждого неравенства симметричны относительно координатных осей и прямой $y = x$. Действительно, если $(x; y)$ — решение, то $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$, $(y; x)$ тоже решения. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x \ge 0$, $y \ge 0$. Тогда $|x| = x$, $|y| = y$ и второе неравенство примет вид:

$$y \le \frac{25}{x+3} - 3.$$





Ответ: $a \in (0; 8]$.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №6 (744)

О комбинированных методах и полезности решений одной задачи разными методами

Комбинированные методы основаны, как правило, на использовании особых свойств той или иной функции или уравнения, неравенства (а также их систем) и присущи решению только данной конкретной задачи.

Поэтому полезнее будет рассмотреть решение одной задачи, если ее формулировка это позволяет, разными методами (в том числе и разными графическими методами).

АБИТУРИЕНТ RU

Решение одной задачи с параметром разными методами

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1–15 март 2011

mat.1september.ru

5

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
Москва

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С5 ЕГЭ

ЧИСЛО π | см. с. 48

Первое сентября

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Функция и параметр

(типовые задания С5)

Прокофьев А.А. *Корянов А.Г.*

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

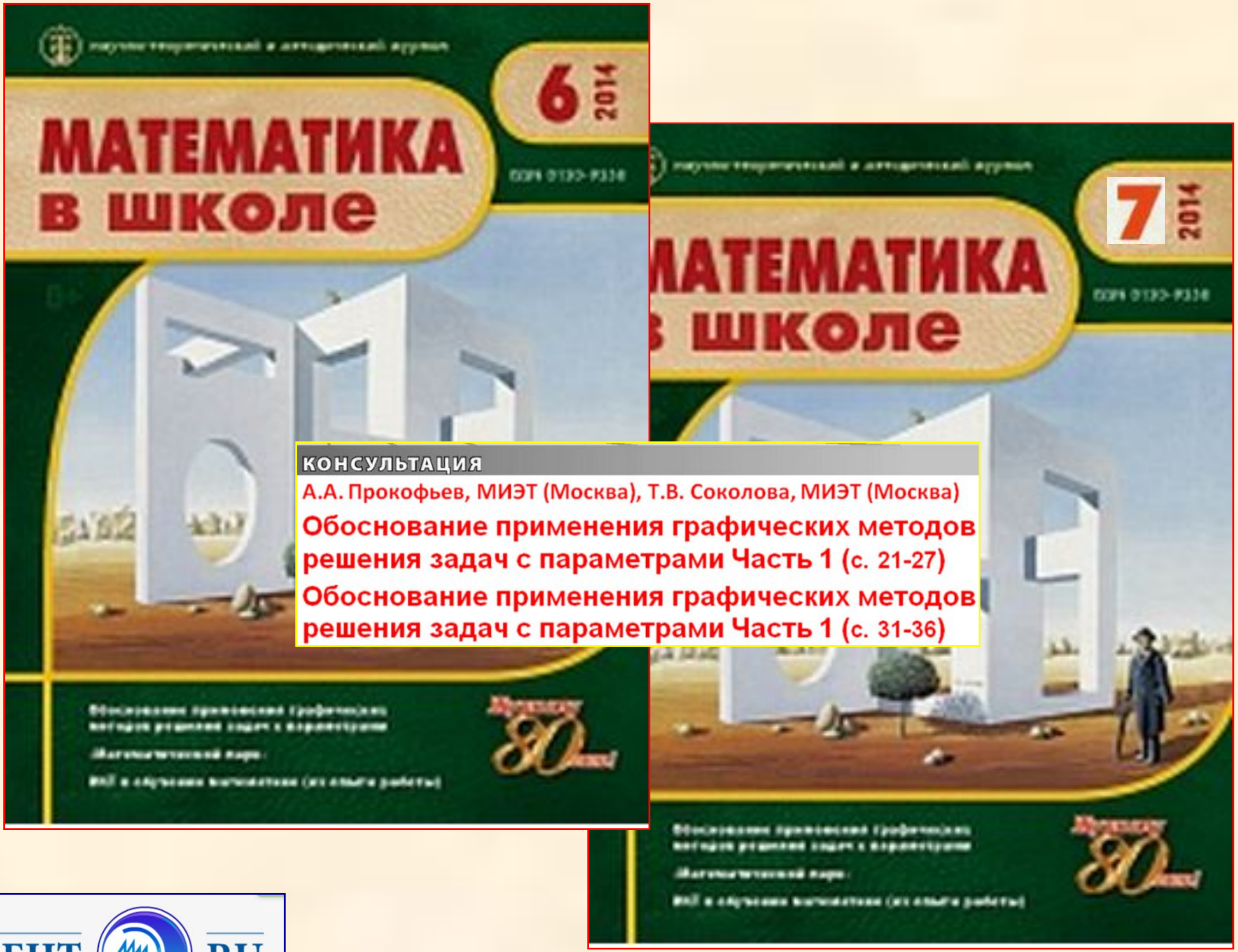
Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Адрес: http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.

Адрес: http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012. html

Разные способы решения одной задачи с параметром



КОНСУЛЬТАЦИЯ

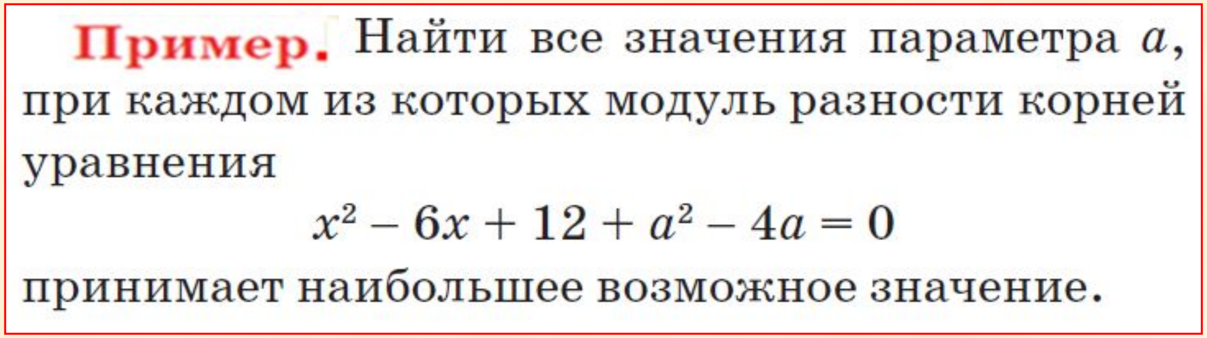
А.А. Прокофьев, МИЭТ (Москва), Т.В. Соколова, МИЭТ (Москва)

Обоснование применения графических методов решения задач с параметрами Часть 1 (с. 21-27)

Обоснование применения графических методов решения задач с параметрами Часть 1 (с. 31-36)

АБИТУРИЕНТ RU

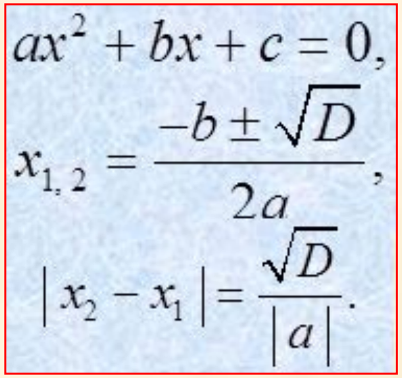
1. Решение одной задачи разными методами



Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

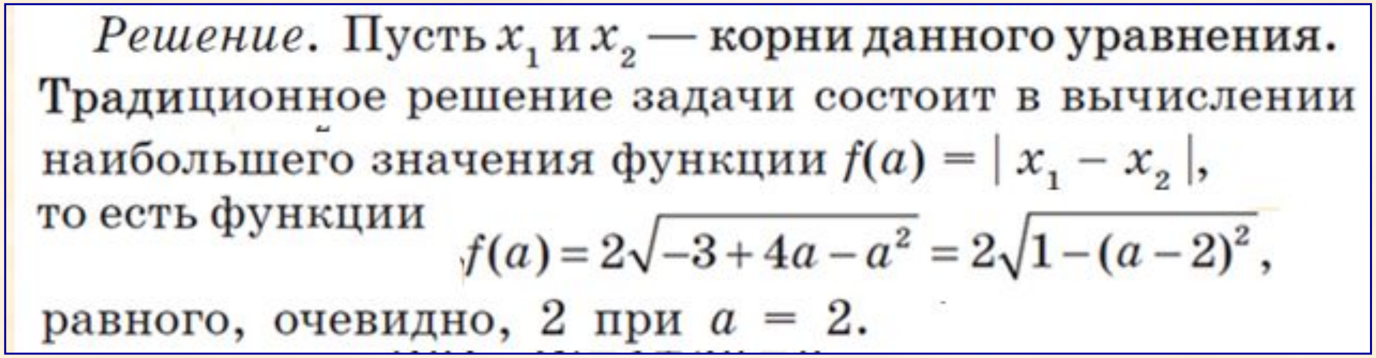
принимает наибольшее возможное значение.



$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

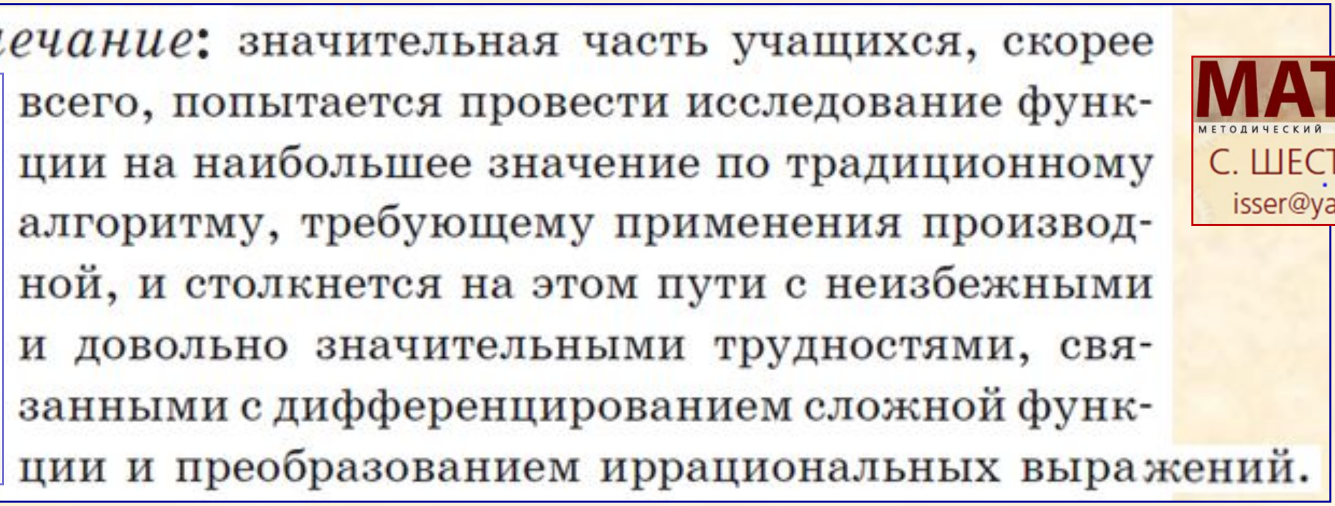
$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}.$$



Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Традиционное решение задачи состоит в вычислении наибольшего значения функции $f(a) = |x_1 - x_2|$, то есть функции

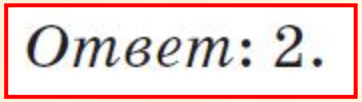
$$f(a) = 2\sqrt{-3 + 4a - a^2} = 2\sqrt{1 - (a-2)^2},$$

равного, очевидно, 2 при $a = 2$.



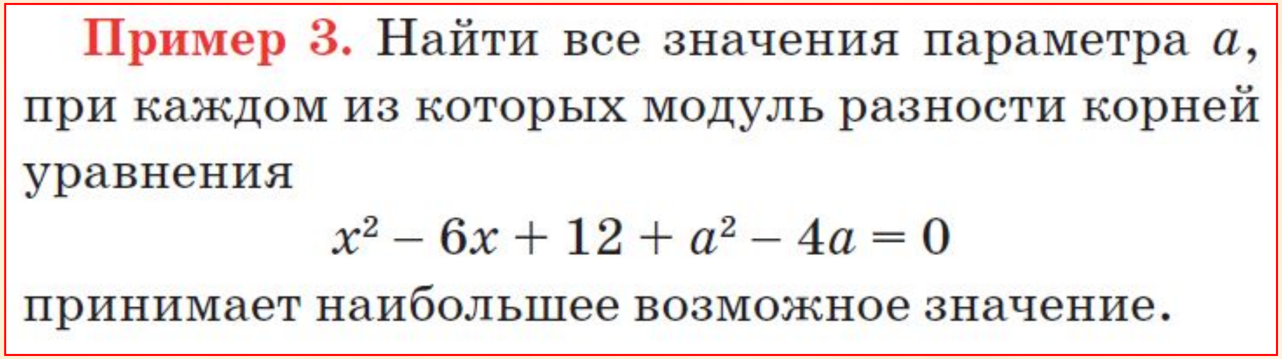
Замечание: значительная часть учащихся, скорее всего, попытается провести исследование функции на наибольшее значение по традиционному алгоритму, требующему применения производной, и столкнется на этом пути с неизбежными и довольно значительными трудностями, связанными с дифференцированием сложной функции и преобразованием иррациональных выражений.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
С. ШЕСТАКОВ июль–август 2014
isser@yandex.ru



Ответ: 2.

2. Решение одной задачи разными методами

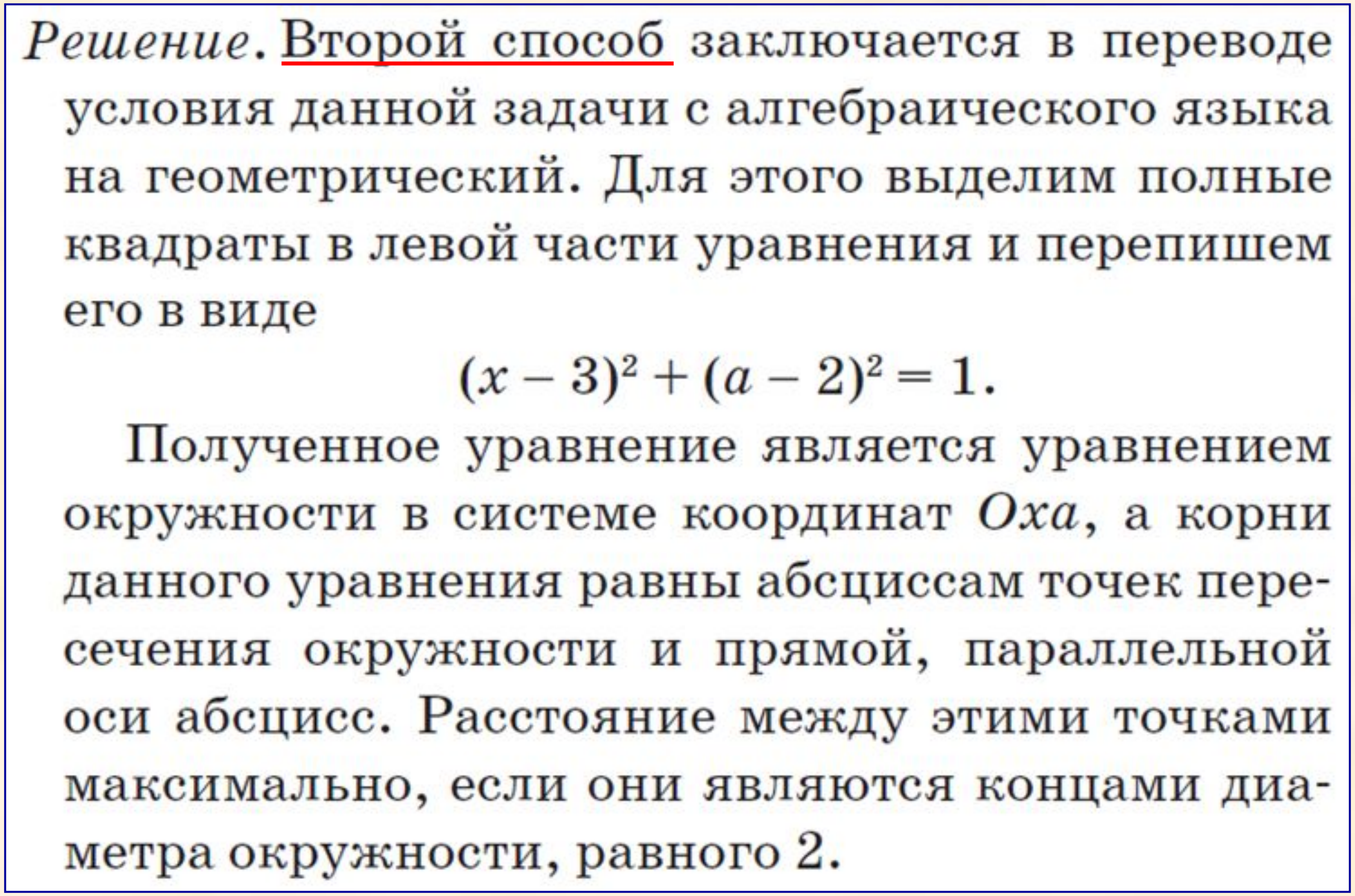


Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее возможное значение.

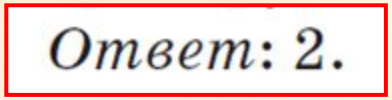
МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
С. ШЕСТАКОВ июль–август
isser@yandex.ru 2014



Решение. Второй способ заключается в переводе условия данной задачи с алгебраического языка на геометрический. Для этого выделим полные квадраты в левой части уравнения и перепишем его в виде

$$(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1.$$

Полученное уравнение является уравнением окружности в системе координат Oxa, а корни данного уравнения равны абсциссам точек пересечения окружности и прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние между этими точками максимально, если они являются концами диаметра окружности, равного 2.



Ответ: 2.

1. Четыре способа решения одной задачи

Пример (**ЕГЭ, 2010**). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение* $36^x-(8a+5)\cdot 6^x+16a^2+20a-14=0$ *имеет единственное решение.*

Решение (1-*й способ*). Пусть $6^x=t$, где $t>0$. Тогда задачу можно переформулировать:

при каких значениях параметра а имеет один положительный корень квадратное уравнение $t^2-(8a+5)\cdot t+16a^2+20a-14=0$?

Значит, другой корень должен быть неположительным. Используя теорему Виета, имеем два случая (t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения):

$$1)\ t_1t_2<0\ \Leftrightarrow\ 16a^2+20a-14<0\ \Leftrightarrow\ -1{,}75<a\le 0{,}5.$$

$$2)\ \begin{cases} t_1t_2=0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 16a^2+20a-14=0, \\ 8a+5>0 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ a=0{,}5.$$

Ответ: $-1{,}75<a\le 0{,}5$.

Замечание. $c=t_1t_2\le 0\ \Rightarrow\ D\ge 0$, где D – дискриминант уравнения.

2. Четыре способа решения одной задачи

Пример (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение* $36^x-(8a+5)\cdot 6^x+16a^2+20a-14=0$ *имеет единственное решение.*

Решение (*2-й способ*). Пусть $6^x=t$, где $t>0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2-(8a+5)\cdot t+16a^2+20a-14=0$.

Так как дискриминант D полученного уравнения положительный $D=(8a+5)^2-4(16a^2+20a-14)=81$, то уравнение имеет два различных корня $t=4a-2$ или $t=4a+7$, причем при всех значениях a верно неравенство $4a-2<4a+7$.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел $4a-2$ и $4a+7$ будет положительным, а другое неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases}4a+7>0,\\4a-2\le 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad -1{,}75<a\le 0{,}5.$$

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
1–15 март 2011

Ответ: $-1{,}75<a\le 0{,}5$.

3. Четыре способа решения одной задачи

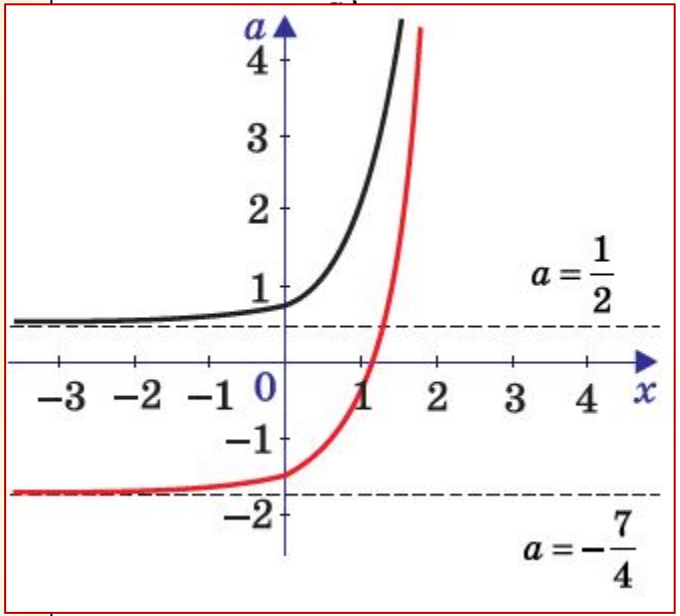
Пример (**ЕГЭ, 2010**). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение* $36^x-(8a+5)\cdot 6^x+16a^2+20a-14=0$ *имеет единственное решение.*

Решение (3-й *способ*). Пусть $6^x=t$, где $t>0$, тогда исходное уравнение примет вид $t^2-(8a+5)\cdot t+16a^2+20a-14=0$.

Вычислим дискриминант квадратного уравнения

$$D=(8a+5)^2-4(16a^2+20a-14)=81$$

и найдем его корни $t=4a-2$ или $t=4a+7$.



Возвратимся к переменной x: $6^x=4a-2$ или $6^x=4a+7$. Отсюда получаем $a=\dfrac{6^x+2}{4}$ и $a=\dfrac{6^x-7}{4}$ или $a=\dfrac{6^x}{4}+\dfrac{1}{2}$ и $a=\dfrac{6^x}{4}-\dfrac{7}{4}$. Построим схематично графики полученных функций. Рассмотрим прямые, параллельные оси Ox и пересекающие построенные графики. Единственная точка пересечения получается при $-1{,}75<a\le 0{,}5$

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,

1–15 март 2011

Ответ:

$-1{,}75<a\le 0{,}5.$

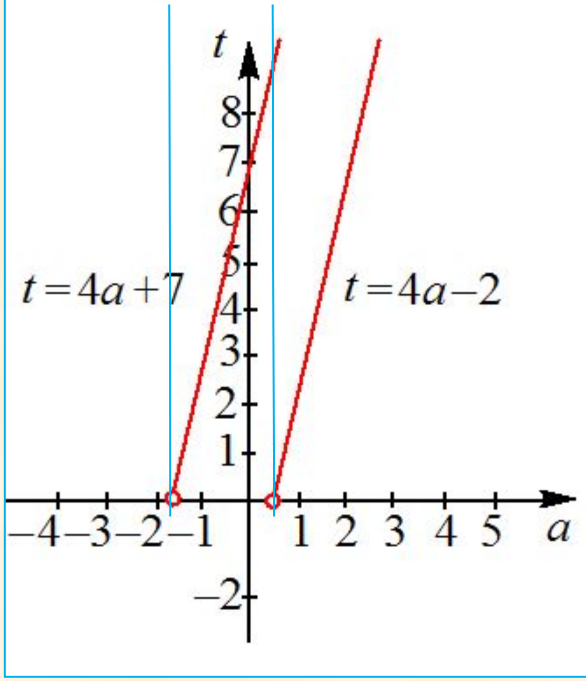
4. Четыре способа решения одной задачи

Пример (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение* $36^x-(8a+5)\cdot 6^x+16a^2+20a-14=0$ *имеет единственное решение.*

Решение (*4-й способ*). Пусть $6^x=t$, где $t>0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2-(8a+5)\cdot t+16a^2+20a-14=0$.

Переформулируем задачу:

при каких значениях параметра а имеет один положительный корень квадратное уравнение $t^2-(8a+5)\cdot t+16a^2+20a-14=0$?



Вычислим его дискриминант квадратного уравнения

$$D=(8a+5)^2-4(16a^2+20a-14)=81$$

и найдем корни $t=4a-2$ или $t=4a+7$.

Построим графики функций $t=4a-2$ или $t=4a+7$ при $t>0$, которые пересекают ось Oa при $a=0,5$ и $a=-1,75$ соответственно.

Прямые $a=\text{const}$ график ровно в одной точке при $-1,75<a\le 0,5$.

Ответ:

$-1,75<a\le 0,5.$

1. Четыре способа решения еще одной задачи

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
С. ШАРОВА, г. Урюпинск
сентябрь 2011

Найти значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет только одно решение.

Способ I (используем теорему равносильности):

$$\sqrt{x+1}=x+a \Leftrightarrow \begin{cases} x+a\ge 0, \\ x+1=(x+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a\ge 0, \\ x^2+(2a-1)x+\left(a^2-1\right)=0. \end{cases}$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело ровно один корень, надо потребовать, чтобы получившееся квадратное уравнение имело:

1) один корень, для которого выполнено условие $x+a\ge 0$;

2) два корня, x_- и x_+, но такие, что $x_-+a<0$, $x_++a\ge 0$, то есть $x_-<-a\le x_+$.

1. Квадратное уравнение имеет ровно один корень, если $D=0$, если $D=0$, то есть $D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=0 \Leftrightarrow a=1{,}25$.

2. Рассмотрим случай, когда квадратное уравнение имеет ɪва корня, то есть $D>0$: $5-4a>0 \Leftrightarrow a<1{,}25$;

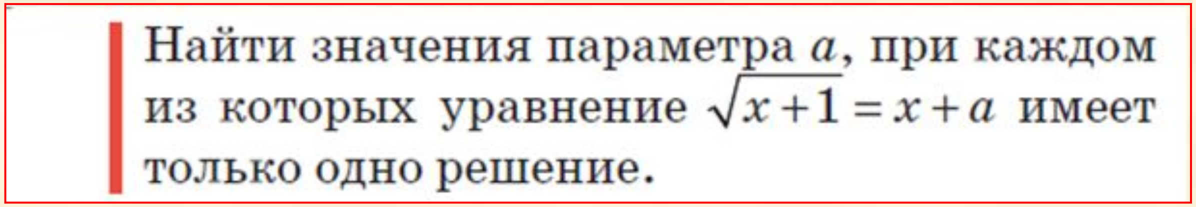
$$x_+=\frac{-(2a-1)+\sqrt{5-4a}}{2}, \quad x_-=\frac{-(2a-1)-\sqrt{5-4a}}{2}; \quad x_-<-a\le x_+,$$

$$\underline{1-\cancel{2a}-\sqrt{5-4a}<-\cancel{2a}\le 1-\cancel{2a}+\sqrt{5-4a}}, \quad 1+\sqrt{5-4a}\ge 0 \text{ при всех } a<1{,}25.$$

$$1-\sqrt{5-4a}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-4a\ge 0, \\ 5-4a>1 \end{cases} \Leftrightarrow 5-4a>1 \Leftrightarrow a<1.$$

Ответ: $a<1$ и $a=1{,}25$.

2. Четыре способа решения еще одной задачи



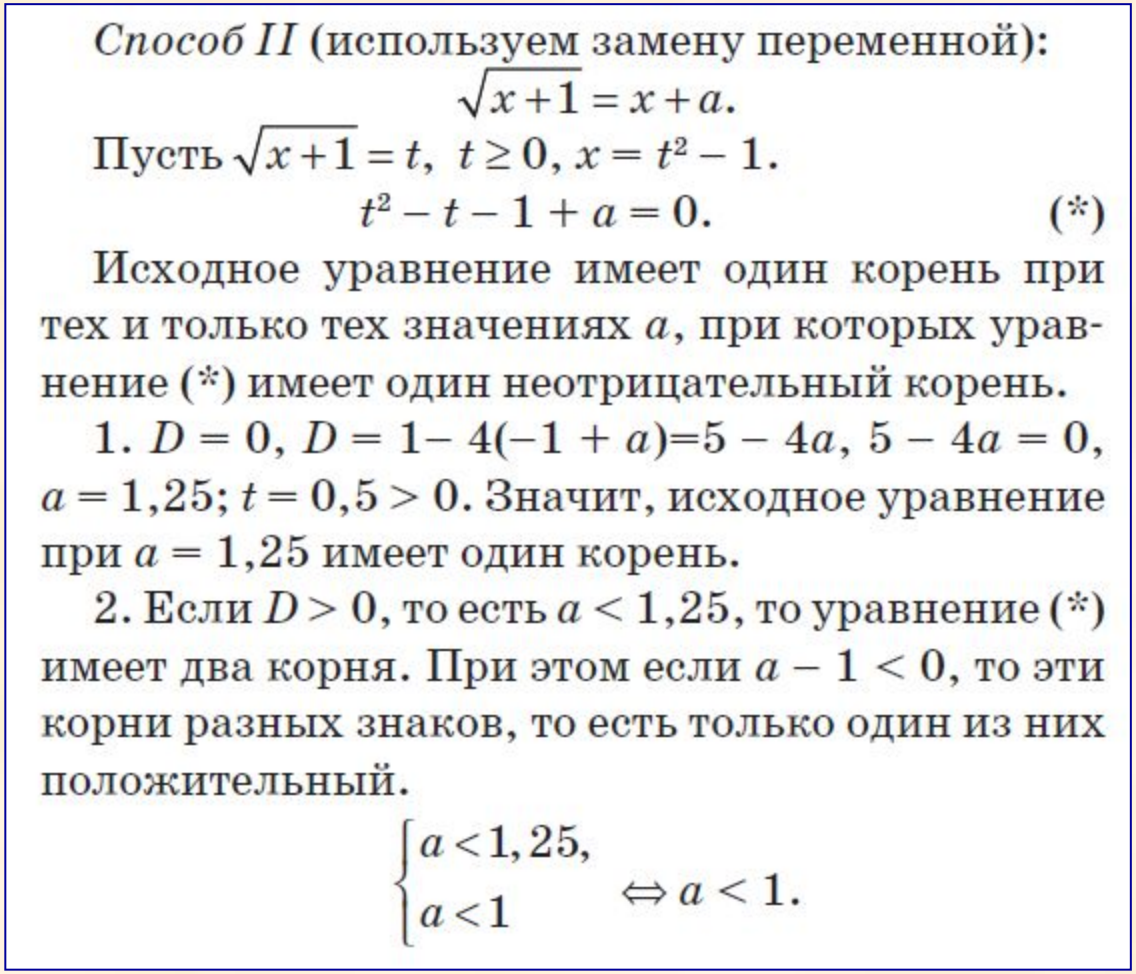
Найти значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет только одно решение.

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

С. ШАРОВА, г. Урюпинск

сентябрь 2011



Способ II (используем замену переменной):

$$\sqrt{x+1}=x+a.$$

Пусть $\sqrt{x+1}=t,\ t\geq 0,\ x=t^2-1.$

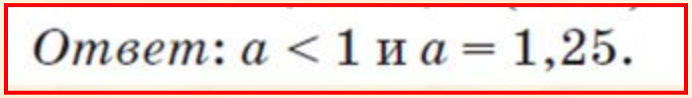
$$t^2-t-1+a=0. \qquad (*)$$

Исходное уравнение имеет один корень при тех и только тех значениях a, при которых уравнение (*) имеет один неотрицательный корень.

1. $D=0$, $D=1-4(-1+a)=5-4a$, $5-4a=0$, $a=1{,}25$; $t=0{,}5>0$. Значит, исходное уравнение при $a=1{,}25$ имеет один корень.

2. Если $D>0$, то есть $a<1{,}25$, то уравнение (*) имеет два корня. При этом если $a-1<0$, то эти корни разных знаков, то есть только один из них положительный.

$$\begin{cases} a<1,25, \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow a<1.$$



Ответ: $a<1$ и $a=1{,}25$.

3. Четыре способа решения еще одной задачи

Найти значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет только одно решение.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
С. ШАРОВА,
г. Урюпинск
сентябрь
2011

Способ III (графический способ). Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{x+1}-x=a$. Построим график функции, стоящей в левой части уравнения, $y=\sqrt{x+1}-x$.

1. $D(y)=[-1;+\infty)$.

2. Пересечение с осями: а) с Ox: $y=0$, $\sqrt{x+1}-x=0$,

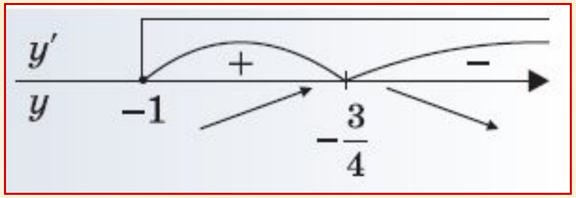
$$\sqrt{x+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

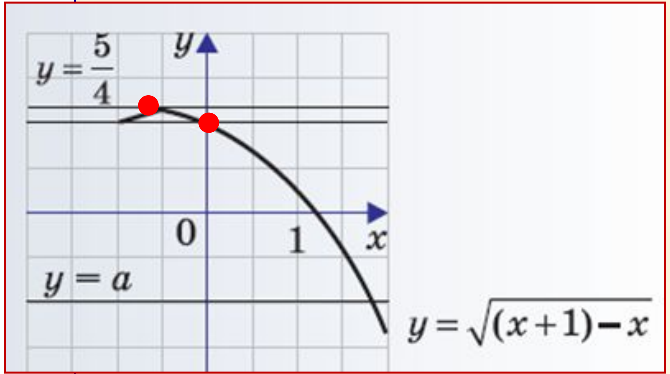
б) с Oy: $x=0$, $y=1$.

3. Найдем производную, критические точки и экстремумы функции:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-1,\quad y'=0,\quad \sqrt{x+1}=0,5,\quad x=-\frac{3}{4},$$

$$y_{\max}=y(-0,75)=1,25.$$





Ответ: $a<1$ и $a=1,25$.

4. Четыре способа решения еще одной задачи

Найти значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет только одно решение.

МАТЕМАТИКА
методический журнал для учителей математики
С. ШАРОВА, г. Урюпинск
сентябрь 2011

Способ IV (графический способ). Построим график левой и правой частей уравнения: $y=\sqrt{x+1}$, $y=x+a$.

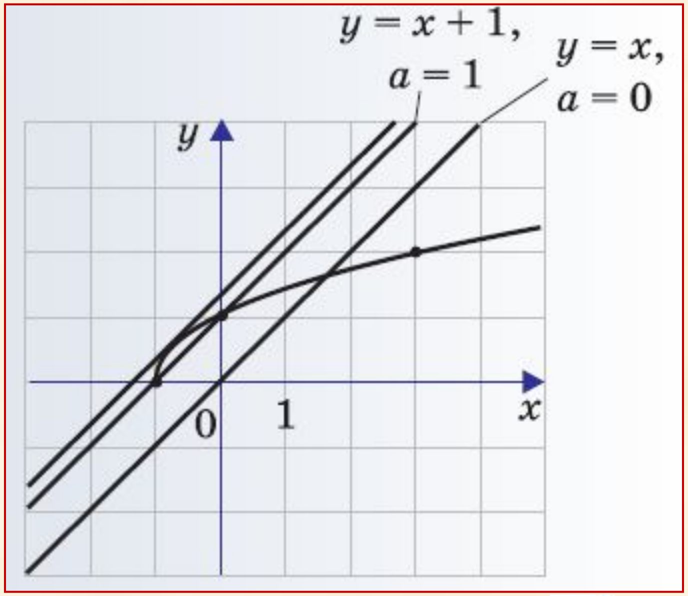
График функции $y=\sqrt{x+1}$ получается из графика функции $y=\sqrt{x}$ с помощью переноса его вдоль оси Ox влево на 1 единицу. График функции $y=x+a$ — прямая, параллельная прямой $y=x$ или совпадающая с ней при $a=0$.

1. Из рисунка 6 видно, что при $a<1$ графики функций пересекаются в одной точке, значит, исходное уравнение при $a<1$ имеет одно решение.

2. Условие касания:

$$*\quad\begin{cases}\sqrt{x_0+1}-\dfrac{x_0}{2\sqrt{x_0+1}}=a,\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+1}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,25,\\ x_0=-0,75.\end{cases}$$

$$(*)\quad\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f'(x)=g'(x).\end{cases}$$



$+1$

Ответ: $a<1$ и $a=1{,}25$.

1. Два способа решения одной задачи

20. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=\dfrac{(x-1)^2}{2} \\ \lg(5-a-y)=\lg(a-x) \end{cases}$$

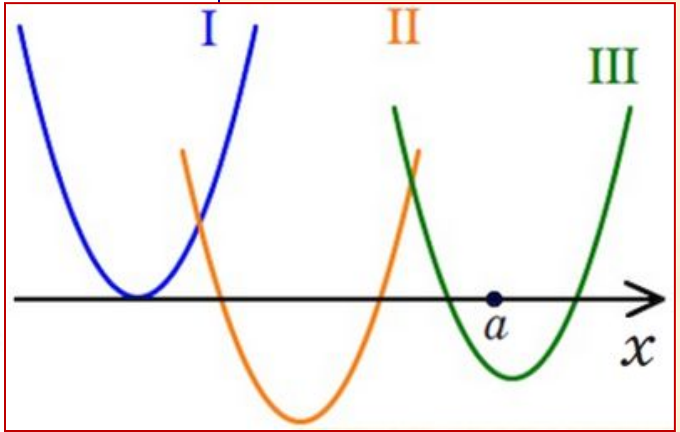
имеет решение.

Т/Р №95 А.Ларина

Решение: Переходим к равносильной системе:

Переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} y=\frac{(x-1)^2}{2}, \\ 5-a-y=a-x \\ a-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{(x-1)^2}{2}, \\ y=x-2a+5, \\ x<a; \end{cases}$$



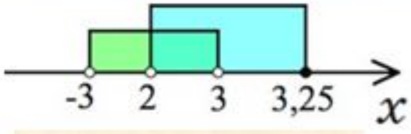
Нас будут интересовать те значения a, при которых **уравнение** $\frac{(x-1)^2}{2}=x-2a+5$ **при условии** $x<a$ **имеет решение.**

Рассмотрим $f(x)=(x-1)^2-2x+4a-10.$ После преобразования $f(x)$ выглядит так: $f(x)=x^2-4x+4a-9.$

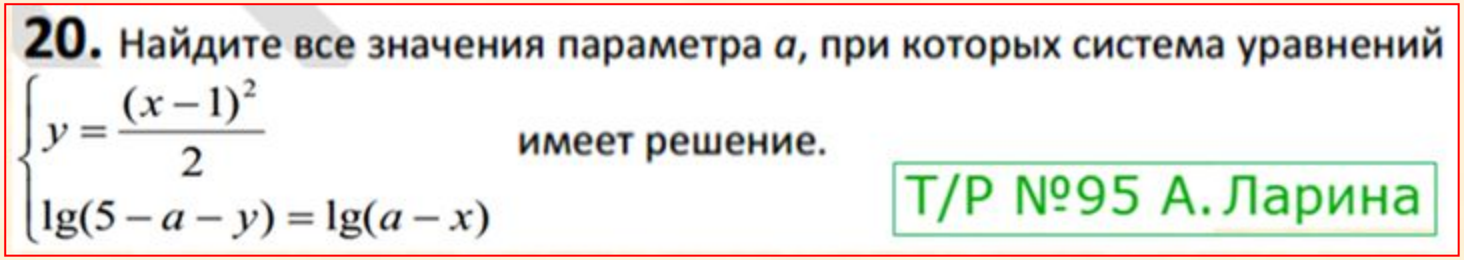
Нас устраивает ситуация, когда либо $f(a)<0$ (III вариант), либо $x_{versh}<a$ при условии $D\geq 0$ (I, II варианты).

Ответ: $(-3;3,25]$.

$$\left[\begin{array}{l} (a-1)^2-2a+4a-10<0, \\ \begin{cases} 2<a, \\ 4-(4a-9)\geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a-3)(a+3)<0, \\ \begin{cases} a>2, \\ a\leq 3,25; \end{cases} \end{array}\right.$$



2. Два способа решения одной задачи

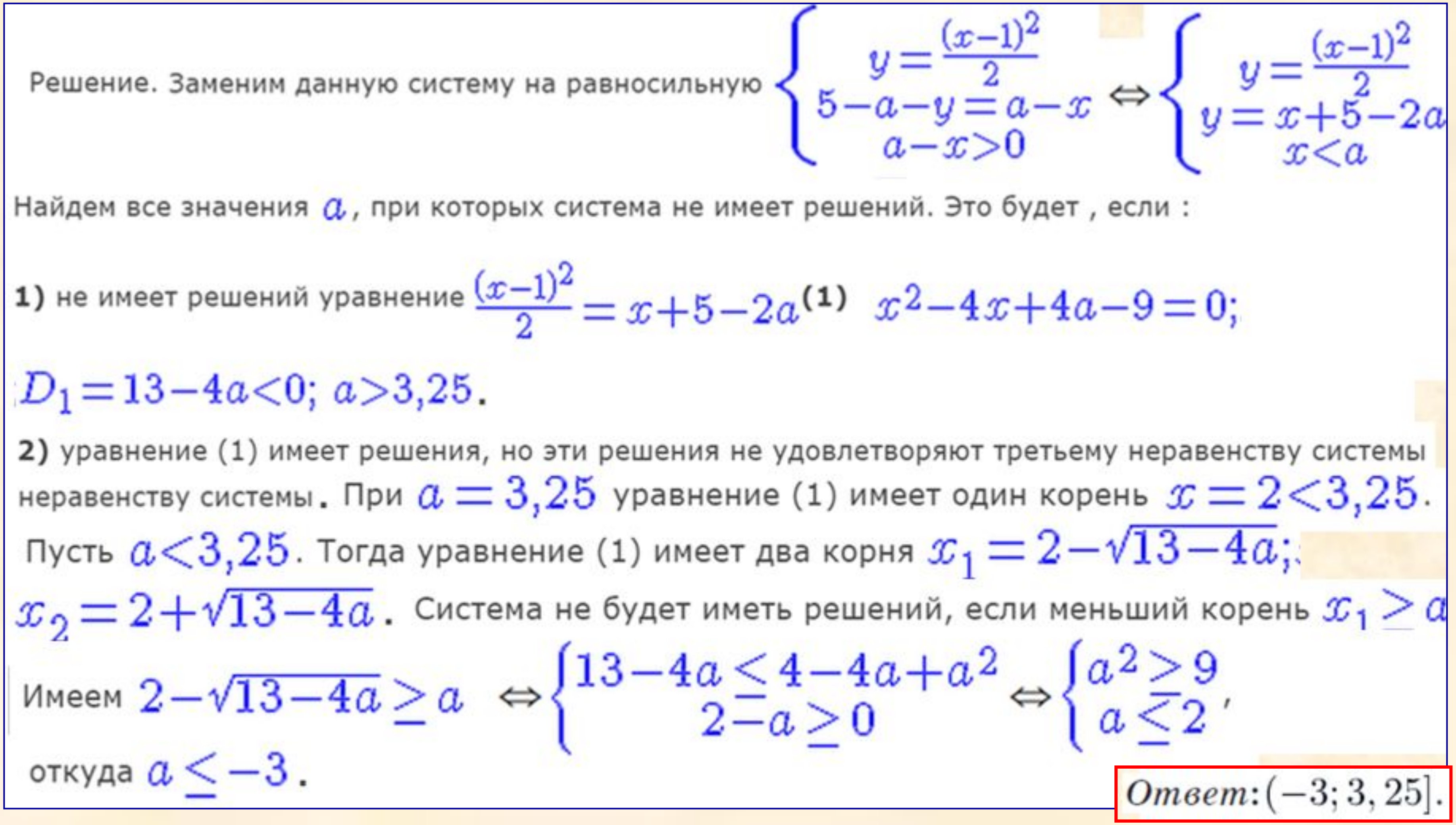


20. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=\dfrac{(x-1)^2}{2} \\ \lg(5-a-y)=\lg(a-x) \end{cases}$$

имеет решение.

Т/Р №95 А. Ларина



Решение. Заменим данную систему на равносильную $\begin{cases} y=\dfrac{(x-1)^2}{2} \\ 5-a-y=a-x \\ a-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{(x-1)^2}{2} \\ y=x+5-2a \\ x<a \end{cases}$

Найдем все значения a, при которых система не имеет решений. Это будет , если :

1) не имеет решений уравнение $\dfrac{(x-1)^2}{2}=x+5-2a^{(1)}$ $x^2-4x+4a-9=0;$

$D_1=13-4a<0;\ a>3{,}25.$

2) уравнение (1) имеет решения, но эти решения не удовлетворяют третьему неравенству системы неравенству системы. При $a=3{,}25$ уравнение (1) имеет один корень $x=2<3{,}25$.

Пусть $a<3{,}25$. Тогда уравнение (1) имеет два корня $x_1=2-\sqrt{13-4a}$; $x_2=2+\sqrt{13-4a}$. Система не будет иметь решений, если меньший корень $x_1\ge a$

Имеем $2-\sqrt{13-4a}\ge a \Leftrightarrow \begin{cases} 13-4a\le 4-4a+a^2 \\ 2-a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\ge 9 \\ a\le 2 \end{cases}$,

откуда $a\le -3$.

Ответ: $(-3; 3,25]$.

1. Два способа решения одной задачи

Пример. Определить значения параметра a, при которых имеет единственное решение система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant ax - x^2 - 3, \\ x \leqslant ay - y^2 - 3. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

БИНОМ

Прокофьев А.А.

$\triangle$ В системе координат Oxy графики функций $y = ax - x^2 - 3$ и $x = ay - y^2 - 3$ симметричны относительно прямой $y = x$, так как их уравнения получаются одно из другого заменой x на y (см. рис.). Для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы парабола $y = ax - x^2 - 3$ касалась прямой $y = x$.

(*)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$$

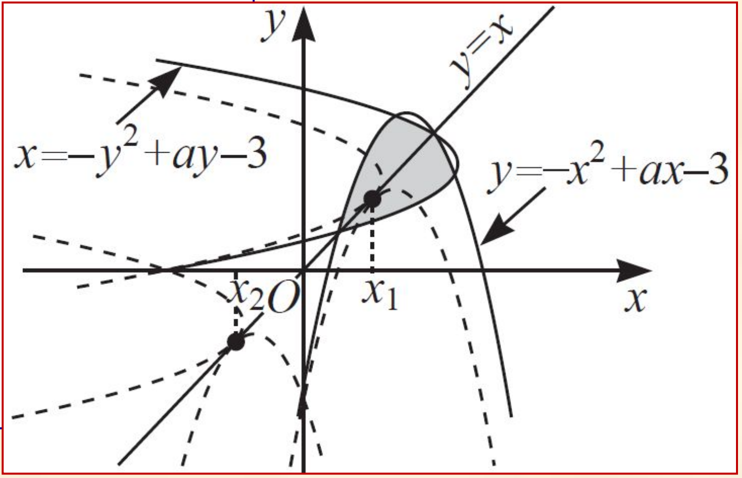
Введем функции $f(x) = ax - x^2 - 3$, $g(x) = x$. Получаем (в соответствии с условиями (*) систему уравнений

$$\begin{cases} ax - x^2 - 3 = x, \\ a - 2x = 1. \end{cases}$$

Отсюда $(2x+1)x - x^2 - 3 = x$.

Из последнего уравнения получаем два значения x: $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют следующие два значения параметра

$$a_1 = 1 - 2\sqrt{3} \text{ и } a_2 = 1 + 2\sqrt{3}.$$



Ответ: $a_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

2. Два способа решения одной задачи

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
БИНОМ
Прокофьев А.А.

△ Если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0, x_0) — также решение, поскольку при подстановке второй пары уравнения системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, то $x_0 = y_0$.

Подставляя $x_0 = y_0$ в систему, получим, что каждое неравенство примет вид $x_0 \leqslant ax_0 - x_0^2 - 3 \Leftrightarrow x_0^2 + (1-a)x_0 + 3 \leqslant 0$ и будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трехчлена равен 0, т. е. $D = (1-a)^2 - 12 = 0$. Решая уравнение $a^2 - 2a - 11 = 0$, получаем два значения параметра $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a = 1 + 2\sqrt{3}$.

Определение необходимых значений параметра

Подставляя значение $a = 1 - 2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем

$$\begin{cases} y \leqslant (1-2\sqrt{3})x - x^2 - 3, \\ x \leqslant (1-2\sqrt{3})y - y^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1-2\sqrt{3})x + y + 3 \leqslant 0, \\ y^2 - (1-2\sqrt{3})y + x + 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

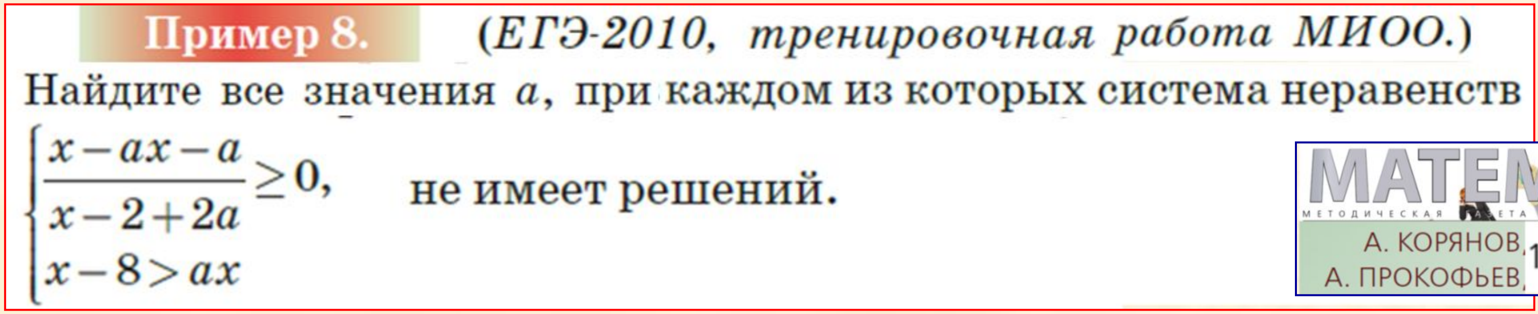
Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим $x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 + 2\sqrt{3}y + 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x+\sqrt{3})^2 + (y+\sqrt{3})^2 \leqslant 0$. Отсюда следует $x = -\sqrt{3}$ и $y = -\sqrt{3}$.

Аналогично действуя, получим, что при $a = 1 + 2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $x = \sqrt{3}$ и $y = \sqrt{3}$. ▲

Отбор достаточных значений параметра

Ответ: $a_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

1. Два способа решения одной задачи



Пример 8. *(ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.)* Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

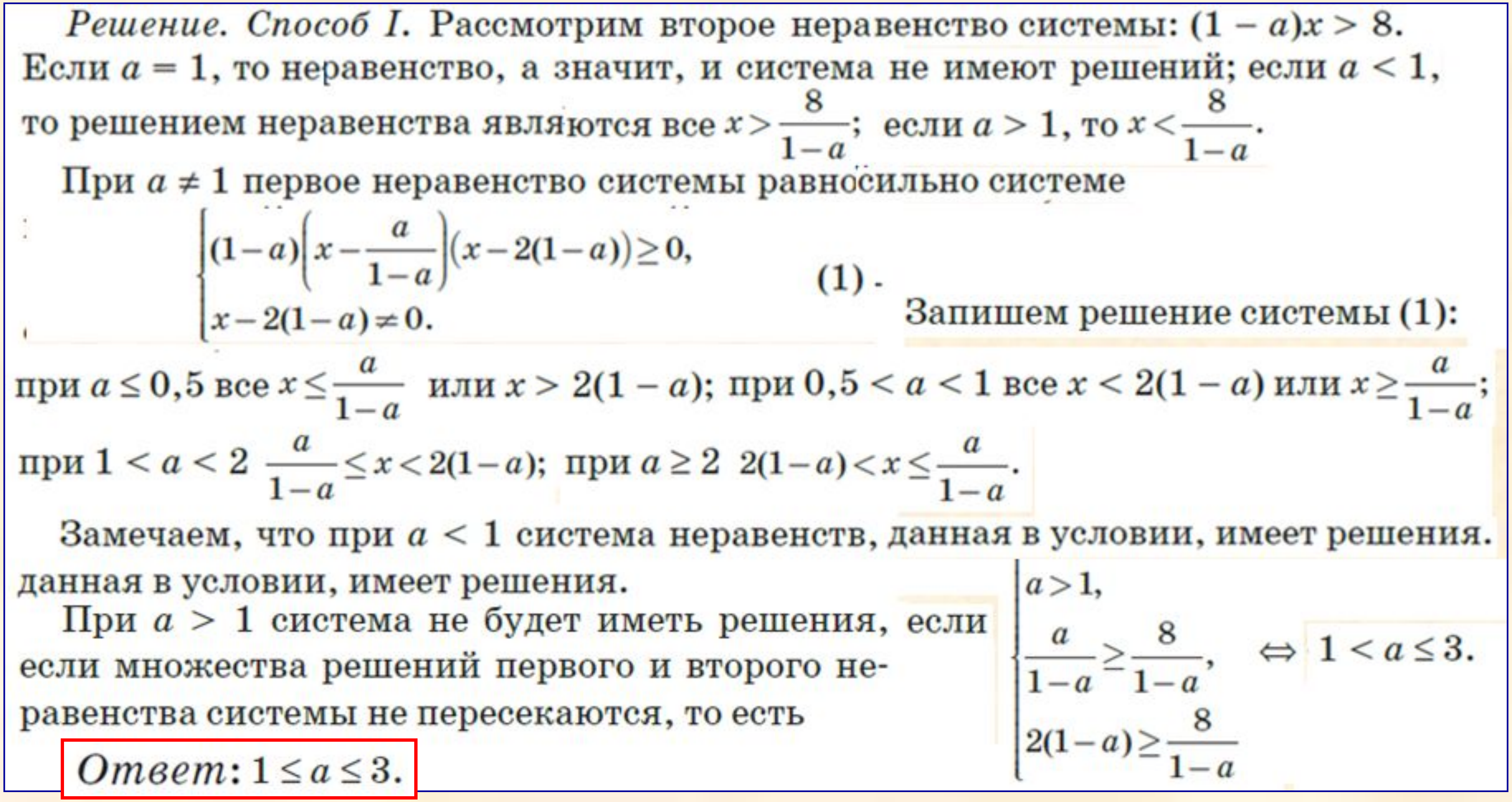
$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8>ax \end{cases}$$

не имеет решений.

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

А. КОРЯНОВ, А. ПРОКОФЬЕВ, 1–15 март 2011



Решение. Способ I. Рассмотрим второе неравенство системы: $(1-a)x > 8$. Если $a = 1$, то неравенство, а значит, и система не имеют решений; если $a < 1$, то решением неравенства являются все $x > \dfrac{8}{1-a}$; если $a > 1$, то $x < \dfrac{8}{1-a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы равносильно системе

$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a)) \geq 0, \\ x-2(1-a) \neq 0. \end{cases} \quad (1).$$

Запишем решение системы (1):

при $a \leq 0{,}5$ все $x \leq \dfrac{a}{1-a}$ или $x > 2(1-a)$; при $0{,}5 < a < 1$ все $x < 2(1-a)$ или $x \geq \dfrac{a}{1-a}$; при $1 < a < 2$ $\dfrac{a}{1-a} \leq x < 2(1-a)$; при $a \geq 2$ $2(1-a) < x \leq \dfrac{a}{1-a}$.

Замечаем, что при $a < 1$ система неравенств, данная в условии, имеет решения.

данная в условии, имеет решения.

При $a > 1$ система не будет иметь решения, если если множества решений первого и второго неравенства системы не пересекаются, то есть

$$\begin{cases} a>1, \\ \dfrac{a}{1-a} \geq \dfrac{8}{1-a}, \\ 2(1-a) \geq \dfrac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \ 1 < a \leq 3.$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

2. Два способа решения одной задачи

Пример 8. *(ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.)* Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ, 1–15 март 2011

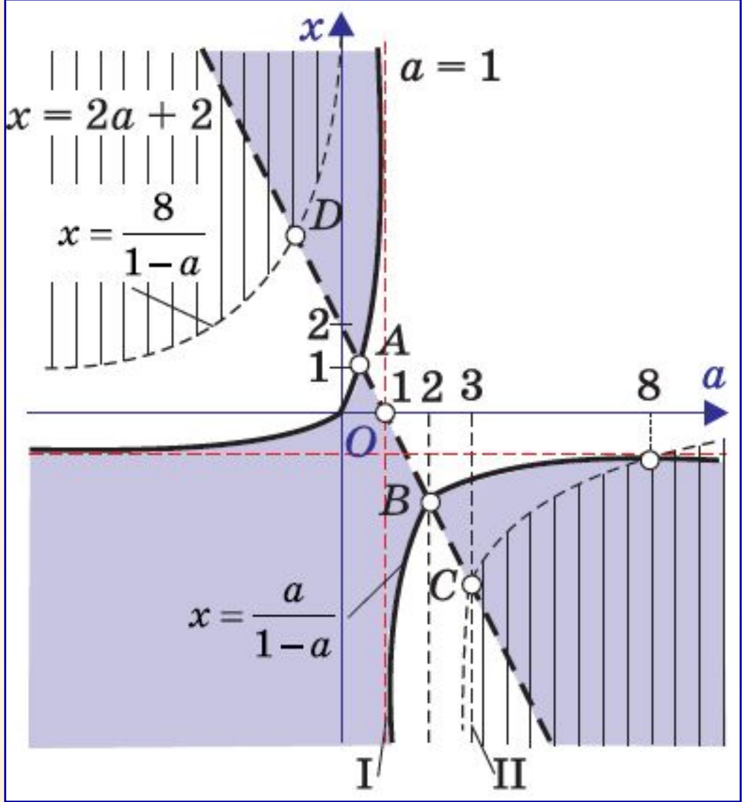
Способ II. Воспользуемся методом областей

Решение. Воспользуемся методом областей

Рассмотрим второе неравенство системы: $(1 - a)x > 8$. Уравнение $(1 - a)x = 8$ задает на плоскости Oax гиперболу, которая разбивает ее на три области. Для определения знака значения выражения $f_1(x; a) = (1 - a)x - 8$ достаточно подставить координаты точки $O(0; 0)$ и затем воспользоваться правилом знакочередования.

Для второго неравенства рассмотрим выражение $f_2(x;a) = \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}$, которое определено при $x \neq 2(1 - a)$ и обращается в нуль при $x = \dfrac{a}{1-a}$.

Проводя прямые, параллельные оси x, видим (рис.), что существует два критических положения этих прямых I ($a = 1$) и II ($a = 3$).



Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

1. Два чпособа решения одной задачи

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0, \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

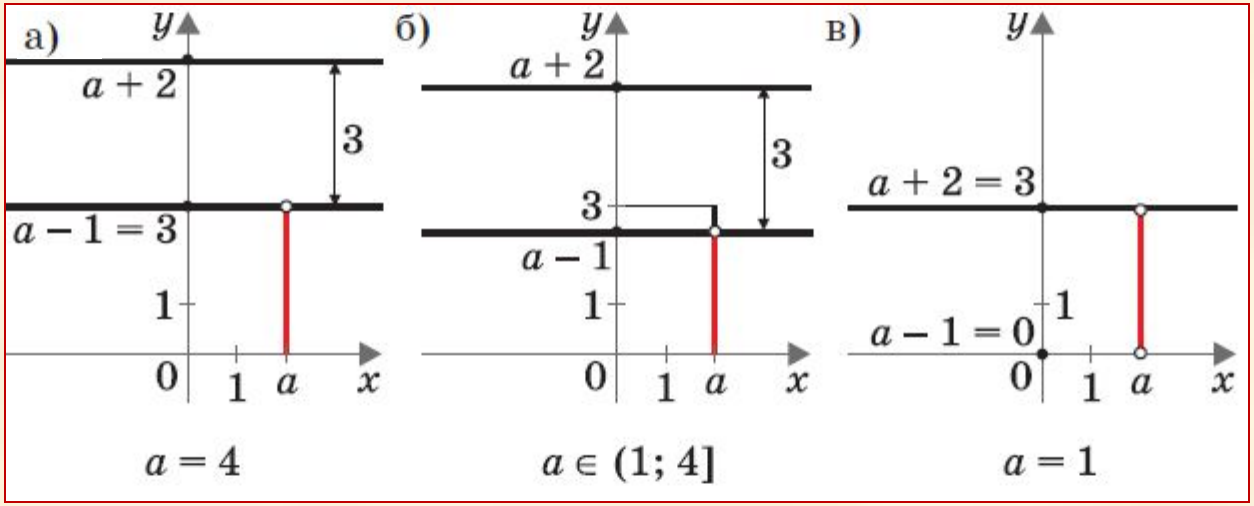
Решение. Решим первое уравнение системы как квадратное относительно y.

$y=\frac{2a+1+3}{2}=a+2$ и $y=\frac{2a+1-3}{2}=a-1$.

Определим геометрический смысл второго уравнения. Множество решений уравнения на координатной плоскости представляет собой отрезок, соединяющий точки с координатами $(a; 0)$ и $(a; 3)$.

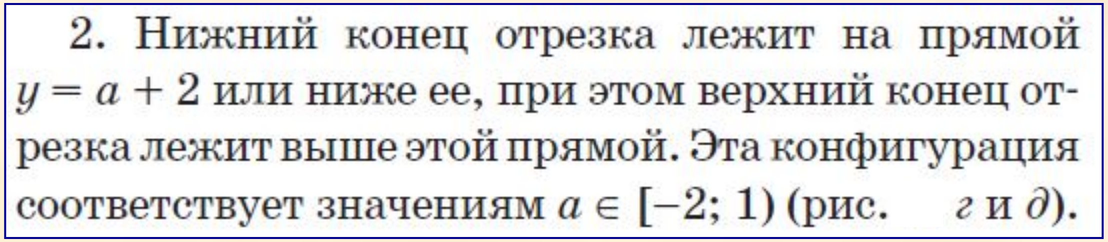
Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда:

1. Верхний конец отрезка лежит на прямой $y=a-1$ или выше ее, при этом нижний конец отрезка лежит ниже этой прямой. Имеем: $a \in (1; 4]$ (рис. a и $б$).

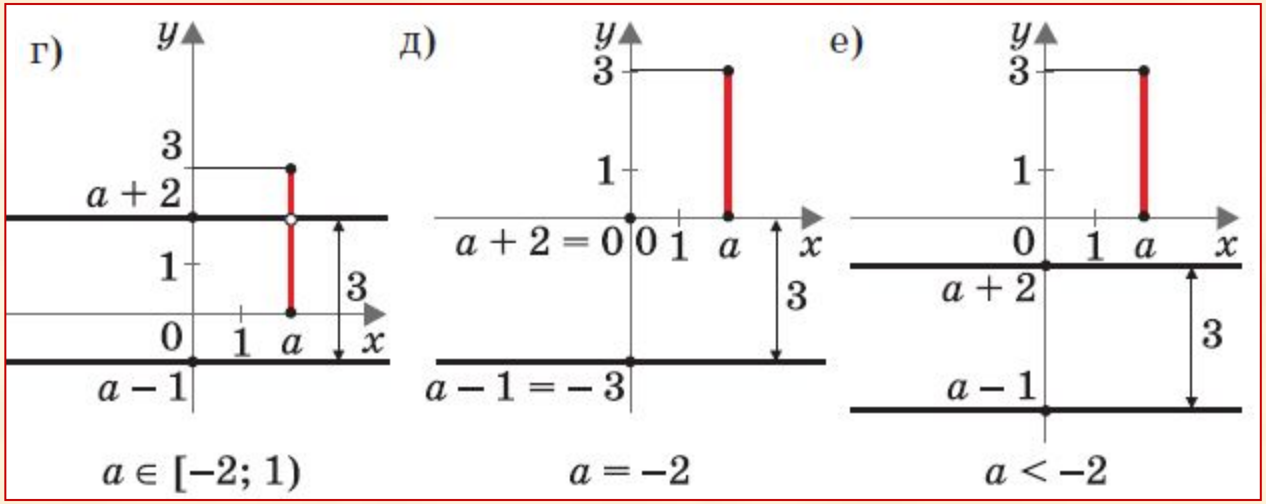


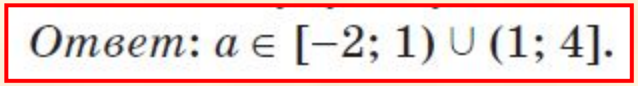
$a=4$ $a\in(1; 4]$ $a=1$

1. Два способа решения одной задачи



2. Нижний конец отрезка лежит на прямой $y = a + 2$ или ниже ее, при этом верхний конец отрезка лежит выше этой прямой. Эта конфигурация соответствует значениям $a \in [-2; 1)$ (рис. *г* и *д*).





Ответ: $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧА С5:
ПОМОГАЕТ ГРАФИЧЕСКАЯ
ИЛЛЮСТРАЦИЯ

л для учителей математики

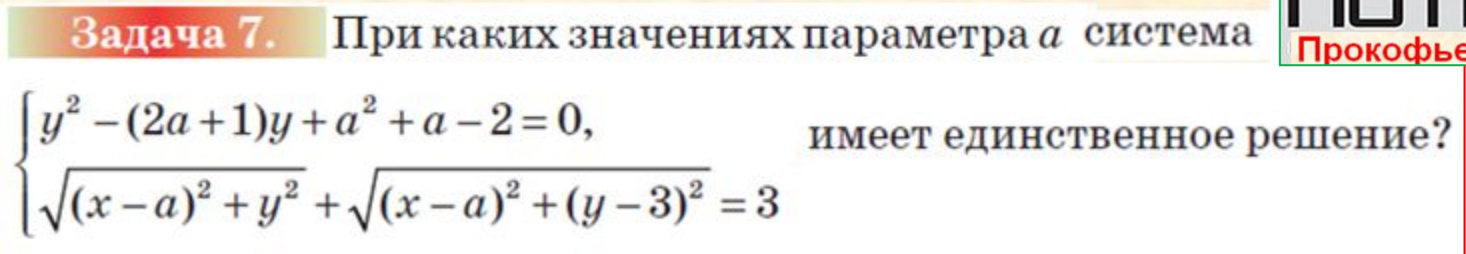
Издается с 1992 г.
№4 (731)

Ю. САДОВНИЧИЙ,
г. Москва

апрель
2012

2. Два способа решения одной задачи

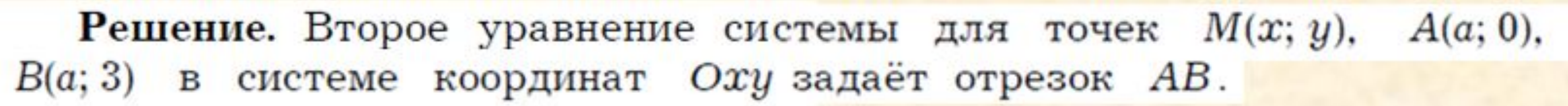
ПОТЕНЦИАЛ
Прокофьев А.А.
№06, 2014



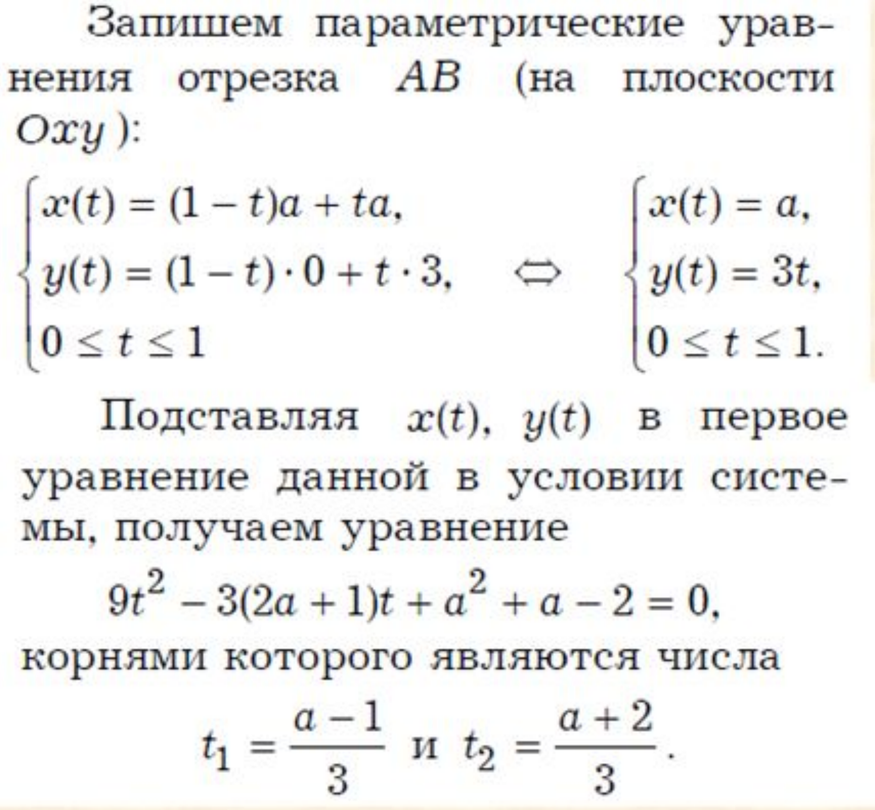
Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0, \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?



Решение. Второе уравнение системы для точек $M(x;\,y)$, $A(a;\,0)$, $B(a;\,3)$ в системе координат Oxy задаёт отрезок AB.



Запишем параметрические уравнения отрезка AB (на плоскости Oxy):

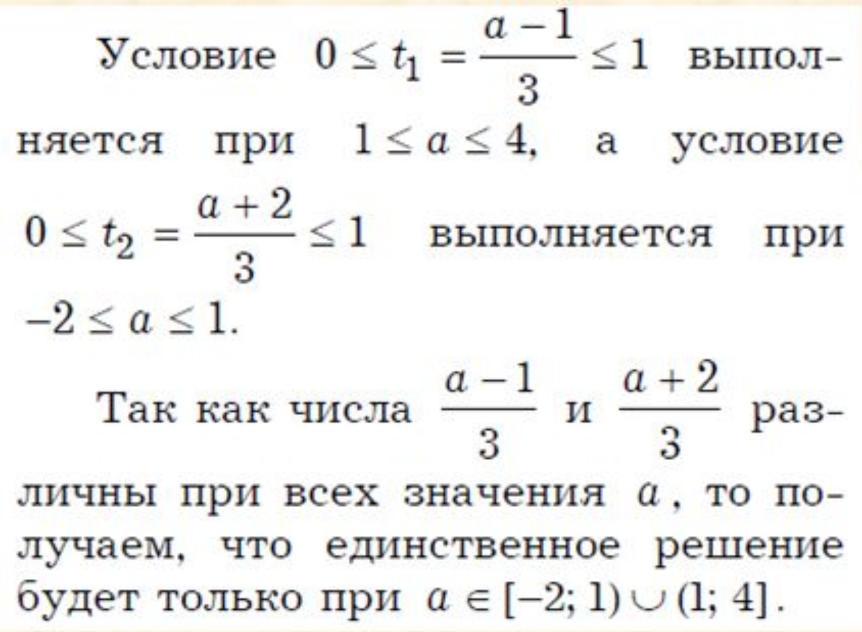
$$\begin{cases} x(t)=(1-t)a+ta, \\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 3, \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=a, \\ y(t)=3t, \\ 0\le t\le 1. \end{cases}$$

Подставляя $x(t)$, $y(t)$ в первое уравнение данной в условии системы, получаем уравнение

$$9t^2-3(2a+1)t+a^2+a-2=0,$$

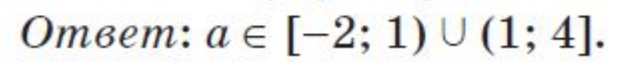
корнями которого являются числа

$$t_1=\frac{a-1}{3} \text{ и } t_2=\frac{a+2}{3}.$$



Условие $0\le t_1=\dfrac{a-1}{3}\le 1$ выполняется при $1\le a\le 4$, а условие $0\le t_2=\dfrac{a+2}{3}\le 1$ выполняется при $-2\le a\le 1$.

Так как числа $\dfrac{a-1}{3}$ и $\dfrac{a+2}{3}$ различны при всех значения a, то получаем, что единственное решение будет только при $a\in[-2;\,1)\cup(1;\,4]$.



Ответ: $a\in[-2;\,1)\cup(1;\,4]$.

Печатные и электронные ресурсы

Школьные учебники.

Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике.

Журналы «Математика в школе», «Математика для школьников»,

«Математика», «Потенциал»

Сайты: alexlarin.net, abiturient.ru (МИЭТ),

mathus.ru/math/ , reshuege.ru,

ege-ok.ru/category/zadachi-s-parametrom/

Контакты

Спасибо за внимание!

aaprokof@yandex.ru

12.12.14

Язык формул и расстояний


МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №12 (759)
Е. ПОТОСКУЕВ,
г. Тольятти
декабрь
2014

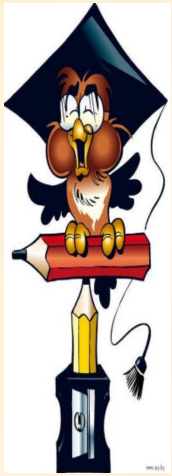

С.А. СУБХАНКУЛОВА
ИЛЕКСА
2010
ЗАДАЧИ
С ПАРАМЕТРАМИ


БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ
Г. З. Генкин
«Просвещение»
2007
Геометрические решения
негеометрических задач


МАТЕМАТИКА
в школе
5
2002
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
В ГЕОМЕТРИИ И.Е.ФЕОКТИСТОВ (Москва)


МАТЕМАТИКА
для школьников
4
2014
Прокофьев А.А., Соколова Т.В.


ПОТЕНЦИАЛ
Прокофьев А.А.
№06, 2014




НЕОЖИДАННЫЙ ШАГ
ИЛИ
СТО ТРИНАДЦАТЬ
КРАСИВЫХ ЗАДАЧ
Киев
1993
А.Г.МЕРЗЛЯК, В.Б.ПОЛОНСКИЙ, М.С.ЯКИР

Прокофьев А.А., Соколова Т.В.


МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru
июль–август
2014


МИРОШИН В.В.
МАТЕМАТИКА
в школе
3
2014

Шабунин М.И., Прокофьев А.А.

МИРОШИН В.В.

Глава XVIII

Прокофьев А.А.

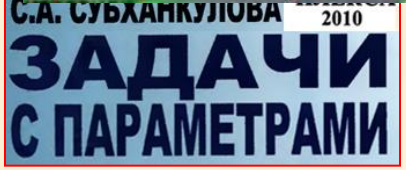
Язык … расстояний


ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Прокофьев А.А.


МАТЕМАТИКА для школьников

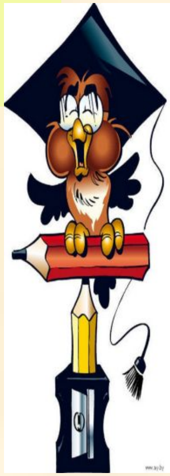
Прокофьев А.А., Соколова Т.В.


С.А. СУБХАНКУЛОВА 2010

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ


ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Прокофьев А.А.




МАТЕМАТИКА 2015 ЕГЭ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ


МАТЕМАТИКА в школе

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ В ГЕОМЕТРИИ И.Е.ФЕОКТИСТОВ (Москва)


С. А. Шестаков


МАТЕМАТИКА 2015 ЕГЭ

С. А. Шестаков

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ


НЕОЖИДАННЫЙ ШАГ
ИЛИ
СТО ТРИНАДЦАТЬ
КРАСИВЫХ ЗАДАЧ

Киев
1993

А.Г.МЕРЗЛЯК, В.Б.ПОЛОНСКИЙ, М.С.ЯКИР


МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)

С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru

июль–август
2014


МАТЕМАТИКА 2015 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко


РОШИН В.В.

АТЕМАТИКА
школе

Глава XVIII


ПОТЕНЦИАЛ

Прокофьев А.А.

№06, 2014

Прокофьев А.А.

Язык формул и расстояний

МАТЕМАТИКА для школьников 4 2014
Прокофьев А.А., Соколова Т.В.

С.А. СУБХАНКУЛОВА ИЛЕКСА 2010
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

МАТЕМАТИКА в школе 5 2002
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ В ГЕОМЕТРИИ И.Е.ФЕОКТИСТОВ (Москва)

НЕОЖИДАННЫЙ ШАГ ИЛИ СТО ТРИНАДЦАТЬ КРАСИВЫХ ЗАДАЧ
Киев 1993
А.Г.МЕРЗЛЯК, В.Б.ПОЛОНСКИЙ, М.С.ЯКИР

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
С. ШЕСТАКОВ июль–август
isser@yandex.ru 2014

Глава XVIII

ПОТЕНЦИАЛ
Прокофьев А.А. №06, 2014

Е. ПОТОСКУЕВ,
г. Тольятти

МАТЕМАТИКА 2015 ЕГЭ
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

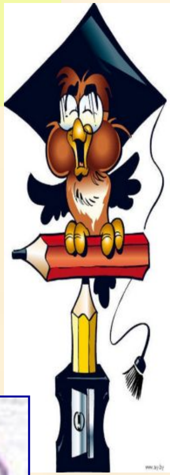
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

МАТЕМАТИКА С. А. Шестаков 2015 ЕГЭ
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

С. А. Шестаков

МАТЕМАТИКА 2015 ЕГЭ
Под редакцией И. В. Ященко

Прокофье



3 2014

Язык формул и расстояний

МАТЕМАТИКА
ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
№4 (731)
Л ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
ЗАДАЧА С5:
ПОМОГАЕТ ГРАФИЧЕСКАЯ
ИЛЛЮСТРАЦИЯ
Ю. САДОВНИЧИЙ,
г. Москва
апрель
2012

ЗАДАЧА С5:
ПОМОГАЕТ ГРАФИЧЕСКАЯ
ИЛЛЮСТРАЦИЯ

НЕОЖИДАННЫЙ ШАГ
ИЛИ
СТО ТРИНАДЦАТЬ
КРАСИВЫХ ЗАДАЧ
Киев
1993
А.Г.МЕРЗЛЯК, В.Б.ПОЛОНСКИЙ, М.С.ЯКИР

МАТЕМАТИКА
№14 (724)
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
С. ШАРОВА,
г. Урюпинск
сентябрь
2011

МАТЕМАТИКА
ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
№2 (729)
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
РЕШАЕМ ЗАДАЧИ
С ПАРАМЕТРАМИ
РАЗНЫМИ МЕТОДАМИ
А. АНДРЕЕВА,
г. Москва
февраль
2012

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex
июль–август

МАТЕМАТИКА
ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
№2 (729)
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
РЕШАЕМ ЗАДАЧИ
С ПАРАМЕТРАМИ
РАЗНЫМИ МЕТОДАМИ
А. АНДРЕЕВА,
г. Москва
февраль
2012

Глава XVIII

ПОТЕНЦИАЛ
Прокофьев А.А.
№06, 2014

Прокофьев А.А.