

Определение электромагнитного поля

Физические величины, характеризующие ЭМП.

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) [\text{В/м}];$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t) [\text{А/м}];$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} [\text{Тесла}] = [\text{Вебер/м}^2]; \mu = \mu_0 \mu'; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{Гн/м}]; \mu' - \text{безразмерная величина.}$$

$$\vec{D} = \vec{D}(x, y, z, t);$$

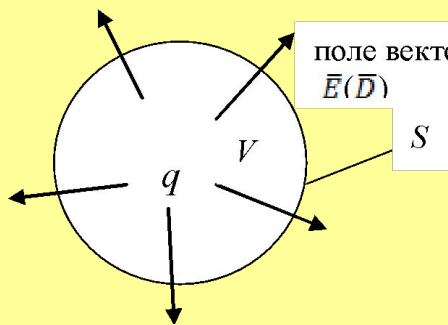
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} - \text{вектор электрической индукции} [\text{Кл/м}^2]; \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon'; \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} [\text{Ф/м}].$$

ε' – безразмерная величина.

Различают следующие среды:

- линейная среда: $\varepsilon \neq \varepsilon(E); \mu \neq \mu(H);$
- нелинейная среда: $\varepsilon = \varepsilon(E); \mu = \mu(H);$
- однородная среда (диэлектрическая полупроводящая среда): $\varepsilon = \text{const}; \mu = \text{const};$
- неоднородная среда: $\varepsilon = \varepsilon(x, y, t); \mu = \mu(x, y, t);$
- изотропная среда – условия РРВ не зависят от условия анизотропности (гиротропности) среды $\vec{\varepsilon}, \vec{\mu}.$
- анизотропная (гиротропная) – зависимость условий РРВ от направления;
- диэлектрическая (без потерь)
- полупроводящая (с потерями).

Теорема Гаусса-Остроградского. Интегральная и дифференциальная формы записи.



$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i - \text{интегральная форма.}$$

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV, \text{ тогда}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV,$$

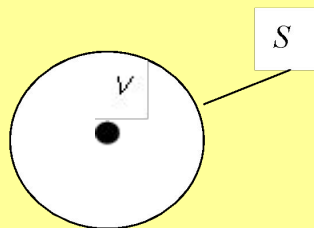
$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$$

$$\sum q_i = \int_V \rho dV,$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho - \text{дифференциальная форма.}$$

Определение электромагнитного поля

Дивергенция напряжённости поля



$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{D} dS}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \rho dV}{V} = \rho$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{D} dS}{V} = \text{div} \bar{D}$$

$$\text{div} \bar{a} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_{xy}}{dy} + \frac{da_z}{dz}.$$

Иногда запись $\text{div} \bar{a}$ заменяют записью $\text{div} \bar{a} = \nabla \bar{a}$ ($\text{div} \bar{D} = \nabla \bar{D}$), вводя оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k},$$

$$\bar{D} = D_x \bar{i} + D_y \bar{j} + D_z \bar{k},$$

$$\text{div} \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

$$q=0 \rightarrow \text{div} \bar{D} = 0;$$

$$q < 0 \rightarrow \text{div} \bar{D} < 0 \text{ – силовые линии оканчиваются на зарядах;}$$

$$q > 0 \rightarrow \text{div} \bar{D} > 0 \text{ – силовые линии начинаются на зарядах.}$$

Закон полного тока. Теорема Стокса.

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \sum q_i \implies \Phi = \oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho \implies \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

$$W_E = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV \implies W_H = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV$$

$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$ означает, что $B_n = \operatorname{rot} \bar{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \left| \frac{\oint \bar{A} d\bar{l}}{S} \right|$, где n – нормаль к S' .

Закон полного тока запишется следующим образом

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{S} = \sum I_i$$

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S}, \quad \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} \text{ – теорема Стокса,}$$

где $(\nabla \times \bar{H}) = \operatorname{rot} \bar{H} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix}$.

$$\int_S \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_S \bar{j} d\bar{S}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \bar{j} = 0$$

$$\operatorname{div} \bar{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = 0; \quad \bar{j}_{\text{полн.}} = \bar{j} + \bar{j}_{\text{см.}}$$

Основные свойства ЭМП. Уравнения Максвелла.

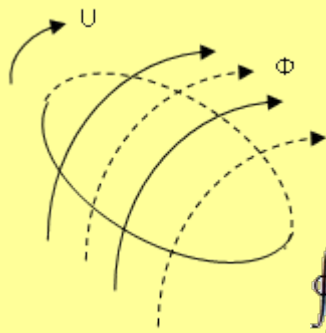
$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S (\bar{J} + \bar{J}_{см.}) d\bar{S} = \sum I_i, \quad I_i = I + I_{см.}$$

$$\int_S \text{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_S \bar{J} d\bar{S} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{S}$$

$\text{rot} \bar{H} = \bar{J} + \bar{J}_{см.}$ – **первое уравнение Максвелла**
(обобщение закона Ампера и Био-Саварра для токов смещения)

- связь \bar{H} с током в каждой точке пространства;
- магнитное поле вихревое; его вихрями являются плотности токов проводимости и смещения;
- изменение \bar{H} в пространстве вызывает изменение \bar{E} во времени и наоборот.

$$\text{rot} \bar{H} = \mathcal{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$



$$\mathcal{E} = U = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$U = \int_L \bar{E} d\bar{l}$$

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{l}$$

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S} - \text{второе уравнение Максвелла в интегральной форме.}$$

$$\oint_S \text{rot} \bar{E} d\bar{S} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}$$

$$\text{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad \text{- 2-е уравнение Максвелла в дифференциальной форме.}$$

Основные свойства ЭМП. Уравнения Максвелла.

$$\int_s \bar{D} d\bar{s} = Q$$
$$Q = \int_V \rho dv,$$

где ρ – объемная плотность заряда.

Из этого следует, что

$\int_s \bar{D} d\bar{s} = \int_V \rho dv$ - третье уравнение Максвелла в интегральной форме.

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = \int_V \operatorname{div} \bar{D} dv$$

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = \int_V \operatorname{div} \bar{D} dv = \int_V \rho dv$$

$\operatorname{div} \bar{D} = \rho$ - третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Четвёртое уравнение Максвелла

$$\int_s \vec{B} d\vec{s} = 0$$
 - интегральная форма;

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$
 - дифференциальная форма.

Полная система уравнений Максвелла

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{s} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{s} \quad \text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t};$$
$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{s} \quad \text{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t};$$
$$\oint_S \bar{D} d\bar{s} = \int_V \rho dV \quad \text{div} \bar{D} = \rho;$$
$$\oint_S \bar{B} d\bar{s} = 0 \quad \text{div} \bar{B} = 0.$$

Уравнения связи: $\bar{j} = g\bar{E}$, $\bar{B} = \mu\bar{H}$, $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$. Независимыми являются первые два.

Закон сохранения энергии в ЭМП

Дифференциальная форма записи закона сохранения энергии в ЭМП

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\times \vec{E}) \rightarrow \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \vec{E} + \varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\times \vec{H}) \rightarrow \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{j} \vec{E} + \varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} \\ \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{H}^2}{\partial t} \\ -\operatorname{div} \vec{\Pi} &= \vec{j} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Интегральная форма записи закона сохранения энергии в ЭМП

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dV &= - \int_V \vec{j} \vec{E} dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\varepsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right] dV; \\ -\frac{\partial}{\partial t} W &= \int_V \vec{j} \vec{E} dV + \int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dV; \end{aligned}$$

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dV = \int_V \frac{j^2}{g} dV - \int_V \vec{j} \vec{E}_{\text{ст}} dV; \quad \vec{j} = g(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}); \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}}{g} - \vec{E}_{\text{ст}};$$

$$P_{\text{ст}} - Q = \frac{\partial W}{\partial t} + \oint_S \vec{\Pi} \vec{dS};$$

$\oint_S \vec{\Pi} \vec{dS}$ – имеет энергетический смысл.

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_E^{\text{total}} + W_H^{\text{total}}) = \oint_S \vec{\Pi} \vec{dS} + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad \text{- теорема Умова-Пойтинга.}$$