Определение электромагнитного поля

Физические величины, характеризующие ЭМП.

$\bar{E} = \bar{E}(x, y, z, t)$[В/м];

$\bar{H} = \bar{H}(x, y, z, t)$[А/м]

$\bar{B} = \mu\bar{H}$ [Тесла] = [Вебер/м^2]; $\mu = \mu_o\mu'$; $\mu_o = 4\pi * 10^{-7}$[Гн/м]; μ' – безразмерная величина.

$\bar{B} = \bar{B}(x, y, z, t)$;

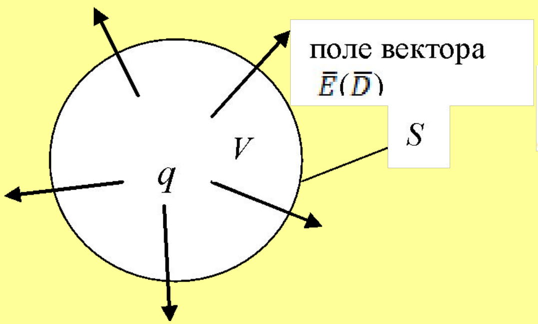
$\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ - вектор электрической индукции [Кл/м^2]; $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon'$; $\varepsilon_o = \frac{1}{36\pi}10^{-9}$[Ф/м].

ε' – безразмерная величина.

Различают следующие среды:

- линейная среда: $\varepsilon \neq \varepsilon(E)$; $\mu \neq \mu(H)$;
- нелинейная среда: $\varepsilon = \varepsilon(E)$; $\mu = \mu(H)$;
- однородная среда (диэлектрическая полупроводящая среда): ε = const; μ = const;
- неоднородная среда: $\varepsilon = \varepsilon(x,y,t)$; $\mu = \mu(x,y,t)$;
- изотропная среда – условия РРВ не зависят от условия анизотропности (гиротропности) среды $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, $\overleftrightarrow{\mu}$.
- анизотропная (гиротропная) – зависимость условий РРВ от направления;
- диэлектрическая (без потерь)
- полупроводящая (с потерями).

Теорема Гаусса-Остроградского. Интегральная и дифференциальная формы записи.



$$\oint_S \bar{D}d\bar{S} = \sum q_i$$ - **интегральная форма.**

$$\oint_S \bar{a}d\bar{S} = \int_V div\bar{a}dV$$, тогда

$$\oint_S \bar{D}d\bar{S} = \int_V div\bar{D}dV$$,

$$\int_V div\bar{D}dV = \int_V \rho\, dV$$

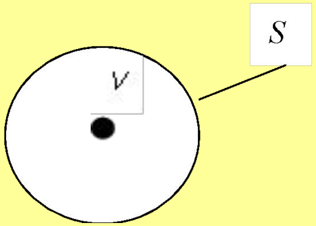
$$\sum q_i = \int_V \rho dV$$,

$div\bar{D} = \rho$ - **дифференциальная форма.**

Определение электромагнитного поля

Дивергенция напряжённости поля

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \overline{D}d\overline{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_V \rho dV}{V} = \rho$$



$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \overline{D}d\overline{S}}{V} = div\overline{D}$$

$$div\bar{a} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_{xy}}{dy} + \frac{da_z}{dz}.$$

Иногда запись $div\bar{a}$ заменяют записью $div\bar{a} = \nabla\bar{a}$ ($div\overline{D} = \nabla\overline{D}$), вводя оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k},$$

$$\overline{D} = D_x\bar{\imath} + D_y\bar{\jmath} + D_z\bar{k},$$

$$div\overline{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

$q=0 \rightarrow div\overline{D} = 0$;

$q<0 \rightarrow div\overline{D} < 0$ – силовые линии оканчиваются на зарядах;

$q>0 \rightarrow div\overline{D} > 0$ – силовые линии начинаются на зарядах.

Закон полного тока. Теорема Стокса.

$$\oint_S \bar{D}\,\overline{dS} = \sum q_i \Longrightarrow \Phi = \oint_S \bar{B}\,\overline{dS} = 0$$

$$div\bar{D} = \rho \Longrightarrow div\bar{B} = 0$$

$$W_E = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV \Longrightarrow W_H = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV$$

$\bar{B} = rot\bar{A}$ означает, что $B_n = rot\bar{A} = \lim_{S\to 0} \left| \frac{\oint \bar{A}\,\overline{dl}}{S} \right|$, где n – нормаль к S'.

Закон полного тока запишется следующим образом

$$\oint_l \bar{H}\,\overline{dl} = \int_S \bar{j}\,\overline{dS} = \sum \mathrm{I}_i$$

$\oint_l \bar{H}\,\overline{dl} = \int_S rot\bar{H}\,\overline{dS}$, $rot\bar{H} = \bar{j}$ – **теорема Стокса**,

где $(\nabla \times \bar{H}) = rot\,\bar{H} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix}$.

$\int_S rot\bar{H}\,\overline{dS} = \int_S \bar{j}\,\overline{dS}$

$rot\bar{H} = \bar{j}$

$div\,rot\,\bar{H} = 0 \rightarrow div\,\bar{j} = 0$

$$div\,\bar{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

$$div\left(\bar{j} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right) = 0; \qquad \bar{j}_{\text{полн.}} = \bar{j} + \bar{j}_{\text{см.}}$$

Основные свойства ЭМП. Уравнения Максвелла.

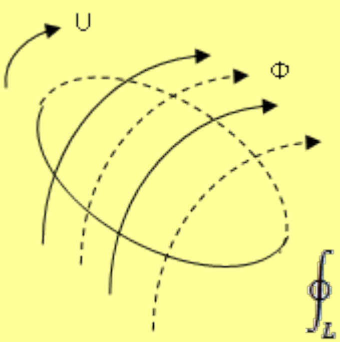
$$\oint_l \overline{H}\,\overline{dl} = \int_S (\bar{j} + \bar{j}\text{см.})\,\overline{dS} = \sum I_i, \quad I_i = I + I_{см.}$$

$$\int_S rot\overline{H}\,\overline{dS} = \int_S \bar{j}\,\overline{dS} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\,\overline{dS}$$

$rot\overline{H} = \bar{j} + \bar{j}_{см.}$ – **первое уравнение Максвелла**
(обобщение закона Ампера и Био-Саварра для токов смещения)

- связь $\overline{H}$ с током в каждой точке пространства;
- магнитное поле вихревое; его вихрями являются плотности токов проводимости и смещения;
- изменение $\overline{H}$ в пространстве вызывает изменение $\bar{E}$ во времени и наоборот.

$$rot\,\overline{H} = \mathcal{E}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$



$$\mathcal{E} = U = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$U = \int_l \bar{E}\,\overline{dl}$$

$$\Phi = \int_S \bar{B}\,\overline{dl}$$

$\oint_L \bar{E}\,\partial\bar{s} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\partial\bar{s}$ - **второе уравнение Максвелла в интегральной форме.**

$$\oint_S rot\bar{E}\,\partial\bar{s} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\partial\bar{s}$$

$rot\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$, **- 2-е уравнение Максвелла в дифференциальной форме**.

Основные свойства ЭМП. Уравнения Максвелла.

$$\int_s \bar{D} d\bar{s} = Q$$

$$Q = \int_V \rho dv,$$

где ρ – объемная плотность заряда.

Из этого следует, что

$\int_s \bar{D} d\bar{s} = \int_V \rho dv$ - **третье уравнение Максвелла в интегральной форме.**

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = \int_V div\bar{D} dv$$

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = \int_V div\bar{D} dv = \int_V \rho dv$$

$div\,\bar{D} = \rho$ **- третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме.**

Четвёртое уравнение Максвелла

$\int_s \vec{B} d\vec{s} = 0$ - интегральная форма;

$div\bar{B} = 0$ - дифференциальная форма.

Полная система уравнений Максвелла

$$\oint_L \bar{H}\overline{dl} = \int_S \bar{j}\overline{ds} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\overline{ds} \qquad rot\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t};$$

$$\oint_L \bar{E}\overline{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \bar{B}\overline{ds} \qquad rot\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t};$$

$$\oint_S \bar{D}\overline{ds} = \int_V \rho dV \qquad div\bar{D} = \rho;$$

$$\oint_S \bar{B}\overline{ds} = 0 \qquad div\bar{B} = 0.$$

Уравнения связи: $\bar{j} = g\bar{E}$, $\bar{B} = \mu\bar{H}$, $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$. Независимыми являются первые два.

Закон сохранения энергии в ЭМП

Дифференциальная форма записи закона сохранения энергии в ЭМП

$$rot\bar{H} = \bar{j} + \varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\,(\times\bar{E}) \rightarrow \bar{E}rot\bar{H} = \bar{j}\bar{E} + \varepsilon\bar{E}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t};$$

$$rot\bar{E} = -\mu\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}\,(\times\bar{H}) \rightarrow \bar{H}rot\bar{E} = -\mu\bar{H}\frac{\partial\bar{H}}{\partial t};$$

$$\bar{E}rot\bar{H} - \bar{H}rot\bar{E} = -div(\bar{E}\times\bar{H}) = \bar{j}\bar{E} + \varepsilon\bar{E}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} + \mu\bar{H}\frac{\partial\bar{H}}{\partial t};$$

$$\bar{E}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\bar{E}^2}{\partial t}$$

$$\bar{H}\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\bar{H}^2}{\partial t}$$

$$-div\bar{\Pi} = \bar{j}\bar{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right]$$

Интегральная форма записи закона сохранения энергии в ЭМП

$$\int_V div\vec{\Pi} = -\int_V \vec{j}\vec{E}dV - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left[\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right]dV;$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}W = \int_V \bar{j}\bar{E}dV + \int_V div\bar{\Pi}dV;$$

$$\int_V \bar{j}\bar{E}dV = \int_V \frac{j^2}{g}dV - \int_V \bar{j}\bar{E}_{ст}dV;\quad \bar{j} = g(\bar{E} + \bar{E}_{ст});\ \bar{E} = \frac{\bar{j}}{g} - \bar{E}_{ст};$$

$$P_{ст} - Q = \frac{\partial W}{\partial t} + \oint_S \bar{\Pi}\,\overline{ds};$$

$\oint_S \bar{\Pi}\,\overline{ds}$ – имеет энергетический смысл.

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_E^{total} + W_H^{total}) = \oint_S \vec{\Pi}d\vec{S} + \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}dV$$ - теорема Умова-Пойтинга.