

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ

Презентация подготовлена:
Учителем математики
Корсуковой Викторией Кимовной
Школа №43 Приморского района Санкт-Петербурга

Занятие №1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ.

I. Определение модуля: $|a| = \{a, \text{если } a \geq 0; -a, \text{если } a < 0\}$

Свойства модуля:

$$1^\circ |-a| = |a|$$

$$2^\circ |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3^\circ |a/b| = |a|/|b|$$

$$4^\circ |a+b| = |a| + |b|, \text{ тогда и только тогда, когда } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0$$

$$5^\circ |a| + |b| = a + b, \text{ тогда и только тогда, когда } a \geq 0, b \geq 0$$

$$6^\circ |a-b| = |a| + |b|, \text{ тогда и только тогда, когда } ab \leq 0$$

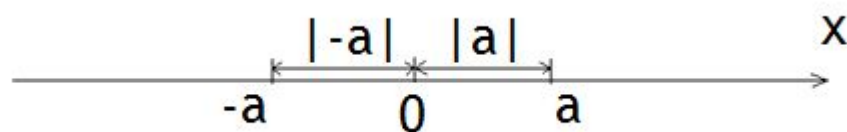
$$7^\circ |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

$$8^\circ \sqrt{a^2} = |a|$$

$$9^\circ |a|^2 = a^2$$

$$10^\circ |a| - |b| \geq 0, \text{ тогда и только тогда, когда } a^2 - b^2 \geq 0.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ модуля действительного числа a будет рассматриваться длина отрезка от начала отсчета до точки, изображающей число.



РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА:

$|f(x)|=a$, если $a<0$, то корней нет

если $a=0$, то $f(x)=0$

если $a>0$, то $f(x)=a$ или $f(x)=-a$

Примеры:

- 1) $|2x-3|=1 \Leftrightarrow 2x-3=1$ или $2x-3=-1$; $x=2$ или $x=1$. Ответ: 1;2.
- 2) $|x^2-5x|=6 \Leftrightarrow x^2-5x=6$ или $x^2-5x=-6$; $x^2-5x-6=0$ или $x^2-5x+6=0$; $x=-1$; $x=6$; $x=2$; $x=3$. Ответ: -1;2;3;6.
- 3) Задания для самоконтроля:
 - а) $|2x+3|=4$
 - б) $|x^2+x+1|=1$
 - в) $|(x-1)/(x+1)|=2$
 - г) $|x^3-3x|=2$
 - д) $(|x|-1)/(|x|+1)=3/4$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $|x+2|=-1$
2. $|3x-3|=6$
3. $|x^2+2x-3|=5$
4. $|x^2-5x|=6$
5. $(|x|+5)/(3+|x|)=5/6$

2 вариант:

1. $|1-x|=-3$
2. $|4x-4|=8$
3. $|x^2-3x|=4$
4. $|x^2-4x+2|=2$
5. $(|x|-2)/(|x|+2)=2/3$

Примеры:

- 1) $|x-8| = x-8 \Leftrightarrow x-8 \geq 0; x \geq 8$ Ответ: $[8; \infty)$
- 2) $|x| + x = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow -x \geq 0; x \leq 0$ Ответ: $(-\infty; 0]$
- 3) Задания для самоконтроля:
 - а) $x - |x-2| = 2$
 - б) $|9-x^2| = 9-x^2$
 - в) $|x^2-8x+12| = x^2-8x+12$
 - г) $|x^3/(x^2-1)| = x^3/(x^2-1)$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $x + |x-2| = 2$
2. $|x^2+x-6| = x^2+x-6$
3. $|(1-2x-3x^2)/(3x-x^2-5)| = (1-2x-3x^2)/(x^2-3x+5)$

2 вариант:

1. $|4x-7| - 4x = 7$
2. $|2x^2-9x+6| = 2x^2-9x+6$
3. $|(x^2+x-2)/(x+3)| = (x^2+x-2)/(x+3)$

3. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$

Занятие №3

Возможен другой вариант:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) = 0$$

Примеры:

- 1) $|2x-3| = |3x+1| \Leftrightarrow 2x-3=3x+1; x=-4$ или $2x-3=-3x-1; x=0,4$. Ответ: -4; 0,4.
- 2) $|2x-3| = |x+7| \Leftrightarrow (2x-3-x-7) \cdot (2x-3+x+7); x=10$ или $x=-4/3$. Ответ: 10; -4/3.
- 3) Задания для самоконтроля:

а) $|5x+6| = |3x-1|$

б) $|x^2+4x+3| = |x+1|$

в) $|(x-2)/(x-1)| = 2|(x+1)/(x+2)|$

г) $|3x^2-6x-1| = 2|3-x|$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $|x-7| = |x-9|$

2. $|x-x^2-1| = |2x-3+x^2|$

3. $|x+1| - 2|x-2| = 0$

2 вариант:

1. $|2x-1| = |x+3|$

2. $|x^2-x-2| = |2x^2-x-1|$

3. $|x-1| - 2|x+2| = 0$

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \text{ при } g(x) \geq 0 \text{ или } f(x)=-g(x) \text{ при } g(x) \geq 0$$

Примеры:

- 1) $|2x-3|=x-2 \Leftrightarrow 2x-3=x-2$ или $2x-3=-x+2$ при $x-2 \geq 0$; $x \in \emptyset$ Ответ: \emptyset
- 2) $|3x-10|=x-2 \Leftrightarrow 3x-10=x-2$ или $3x-10=2-x$ при $x-2 \geq 0$; $x=4$ или $x=3$ Ответ: 3;4.
- 3) Задания для самоконтроля:
 - а) $|x-1|+(x-3)(x+2)=1$
 - б) $|x^2+4x+2|=(5x+16)/3$
 - в) $|y^2+3y|=1-y$
 - г) $(1-2x)/(3-|x-1|)=1$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $|2x-1|=5x-10$
2. $|x^2+3x-4|=x^2-7x-2$
3. $2|x-2|=3x-x^2$

2 вариант:

1. $|3x-7|=2x+1$
2. $|2x^2-1|=x^2-2x+3$
3. $|3x+3|=-4x^2+4$

$$5. f(|x|)=a \Leftrightarrow f(x)=a \text{ при } x \geq 0 \text{ или } f(-x)=a \text{ при } x < 0$$

Занятие №4

Примеры:

1) $x^2 - |x| - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$ при $x \geq 0$; $x = 3$ или $x^2 + x - 6 = 0$ при $x < 0$; $x = -3$ Ответ: $-3; 3$.

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $x^2 + 5|x| + x - 1 = 0$

2. $x^2 + |x| - 6 = 0$

3. $2x^2 + |x| - 1 = 0$

2 вариант:

1. $x^2 + 3x + |x| - 1 = 0$

2. $x^2 - 7|x| - 8 = 0$

3. $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$

6. $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$

Схема решения уравнения:

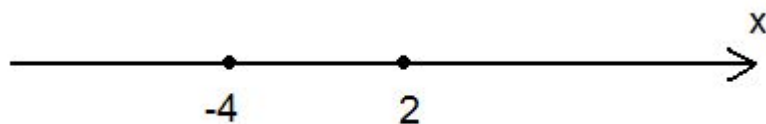
1. Найти нули всех подмодульных выражений;
2. Отметить нули на числовой прямой, разделив ее на промежутки;
3. На каждом промежутке уравнение заменяется на другое уравнение, не содержащее знаков модуля и равносильное исходному уравнению на этом промежутке;
4. На каждом промежутке отыскиваются корни того уравнения, которое на этом промежутке получается;
5. Отбираются те корни, которые принадлежат данному промежутку. Они и будут корнями исходного уравнения на рассматриваемом промежутке;
6. Все корни исходного уравнения получают, объединяя все корни, найденные на всех промежутках.

Примеры:

1) $2|x-2| - 3|x+4| = 1$

$x-2=0; x=2$

$x+4=0; x=-4$



$-2x+4+3x+12=1$ при $x < -4$; $x = -15$

$-2x+4-3x-12=1$ при $-4 \leq x < 2$; $x = -1,8$

$2x-4-3x-12=1$ при $x \geq 2$; \emptyset

Ответ: $-15; -1,8$.

2) Задания для самоконтроля:

а) $|x+2|+|x-4|=8$

б) $3|x-1|-2|x-2|+|x+3|=2$

в) $|x|+3|x+2|=2|x+1|$

г) $||x+1|-|x-3||=|x|$

д) $|2-|1-|x||=1$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $|x+3|+|x-3|=6$

2. $|x-1|-|x+1|=3$

3. $|5x-13|-|6-5x|=7$

2 вариант:

1. $|x+6|+|x+4|=5$

2. $|5+x|-|8-x|=13$

3. $|3x-8|-|3x-2|=6$