Разбор задание из ЕГЭ
Логарифмы

Задание № 13

Логарифмические и показательные уравнения

1. а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

2. а) Решите уравнение $\log_2\left(x^2 - 14x\right) = 5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1;\ 5\sqrt{10}\right]$.

3. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

4. а) Решите уравнение: $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2; \sqrt{10}]$.

5. а) Решите уравнение $6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\ 2,5]$.

6. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

7. а) Решите уравнение $\log_7(x+2) = \log_{49}(x^4)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6 \frac{1}{7};\ \log_6 35\right]$.

8. а) Решите уравнение $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$.

9. а) Решите уравнение $4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$.

10. а) Решите уравнение $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $[2;\ 3]$.

11. а) Решите уравнение $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

12. а) Решите уравнение $\log_3(x^2 - 2x) = 1$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,2; \log_2 5]$.

13. а) Решите уравнение $\log_2(x^2-5) \cdot \log_3^2(7-x) + 3\log_2(x^2-5) - 2\log_3^2(7-x) - 6 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9\right]$.

14. а) Решите уравнение $2^{2x^2} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2+2x} + 2^{11+4x} = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(\log_2 0,52; \log_2 16,1]$.

13. а) Решите уравнение $\log_2(x^2-5)\cdot\log_3^2(7-x)+3\log_2(x^2-5)-2\log_3^2(7-x)-6=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2\frac{1}{7};\log_2 9\right]$.

13. а) Решите уравнение $\log_2(x^2-5)\cdot\log_3^2(7-x)+3\log_2(x^2-5)-2\log_3^2(7-x)-6=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2\frac{1}{7};\log_2 9\right]$.

Преобразуем уравнение

а) $\log_2(x^2-5)\left[\log_3^2(7-x)+3\right]-2\left[\log_3^2(7-x)+3\right]=0$

$\left(\log_3^2(7-x)+3\right)\cdot\left(\log_2(x^2-5)-2\right)=0$

$\log_3^2(7-x)+3=0$ или $\log_2(x^2-5)-2=0$

$\underbrace{\log_3^2(7-x)}_{\text{полож}}=\underbrace{-3}_{\text{отр}}$

нет решений

$\log_2(x^2-5)=2$

$x^2-5=4$

$x^2=9$

$x_1=-3 \quad x_2=3$

Проверка:

$x_1 = -3$

$\log_2(9-5)\cdot\log_3^2(7+3) + 3\log_2(9-5) - 2\log_3^2(7+3) - 6 = 0$

$\log_2 4\cdot\log_3^2 10 + 3\log_2 4 - 2\log_3^2 10 - 6 = 0$

$2\cdot\log_3^2 10 + 6 - 2\log_3^2 10 - 6 = 0$

$0 = 0$

верное равенство, значит $x = -3$ - корень ур-я

$x_2 = 3$

$\log_2(9-5)\cdot\log_3^2(7-3) + 3\log_2(9-5) - 2\log_3^2(7-3) - 6 = 0$

$\log_2 4\cdot\log_3^2 4 + 3\log_2 4 - 2\log_3^2 4 - 6 = 0$

$2\cdot\log_3^2 4 + 6 - 2\log_3^2 4 - 6 = 0$

$0 = 0$

верное равенство, значит $x = 3$ - корень ур-я

Ответ: -3 и 3

б) $\left[\log_2 \frac{1}{7};\ \log_2 9\right]$

Представим числа -3 и 3 в виде логарифмов

$$-3 = -3\log_2 2 = \log_2 2^{-3} = \log_2 \frac{1}{8}$$

$$3 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8$$

Заметим, что

$$\underbrace{\log_2 \frac{1}{8}}_{-3} < \log_2 \frac{1}{7} < \underbrace{\log_2 8}_{3} < \log_2 9$$

Значит в указанный промежуток попадает только один корень $x = 3$

Ответ: $x = 3$

Ответ: а) $-3;\ 3$ б) 3

11. а) Решите уравнение $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

11. а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\,2]$.

Преобразуем уравнение:

$$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-12\cdot 4^{x^2-3x+1}=0 \quad \Big|\, :4^{x^2-3x+1}\neq 0$$

$$7\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1}+5\cdot\left(\frac{6}{4}\right)^{x^2-3x+1}-12=0$$

$$7\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right]^2+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12=0$$

Введём новую переменную: $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}$, $y>0$

$$7y^2+5y-12=0$$

$$D=5^2-4\cdot 7\cdot(-12)=361=19^2$$

$$y=\frac{-5\pm 19}{14}=1;\ -\frac{12}{7}$$

$y_1=1$ $\quad y_2=-\frac{12}{7}$ – посторонний корень, т.к. $y>0$

выполним обратную замену:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

б) $[-1; 2]$

Оценим $\sqrt{5}$: $2 < \sqrt{5} < 3$, тогда

$\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$ и $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только один корень $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: а) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

3. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

3. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

а) Преобразуем уравнение

$3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$

$3 \cdot (3^{x-1})^2 - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$

введём новую переменную: $y = 3^{x-1}$, $y > 0$

$3y^2 - 8y + 5 = 0$

$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4$

$y = \frac{8 \pm 2}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{5}{3}$, $y_2 = 1$

выполним обратную замену:

$3^{x-1} = \frac{5}{3}$

$x - 1 = \log_3 \frac{5}{3}$

$x = 1 + (\log_3 5 - \log_3 3)$

$x = \log_3 5$

$3^{x-1} = 1$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

Ответ: 1; $\log_3 5$

б) $\left(1; \frac{7}{3}\right)$

$x = 1$ не принадлежит интервалу $\left(1; \frac{7}{3}\right)$

Запишем концы интервала в виде логарифмов

$1 = \log_3 3$

$\frac{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \log_3 3 = \log_3 3^{7/3} = \log_3 \sqrt[3]{3^7} = \log_3 9\sqrt[3]{3}$

$\underset{\underset{1}{\parallel}}{\log_3 3} < \log_3 5 < \underset{\underset{\frac{7}{3}}{\parallel}}{\log_3 9\sqrt[3]{3}}$, т.к. $5 < \sqrt[3]{3^7}$

$\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{3^7}$

$y = \log_3 x$ - возраст.

значит, $\log_3 5$ принадлежит интервалу $\left(1; \frac{7}{3}\right)$

Ответ: $\log_3 5$

Ответ: а) 1; $\log_3 5$ б) $\log_3 5$

2 способ сравнения:

$$\underset{\underset{1}{\parallel}}{\log_3 3} < \log_3 5 < \underset{\underset{2}{\parallel}}{\log_3 9} < \frac{7}{3}$$

Решить самостоятельно все номера, кроме тех, которые мы разобрали (кроме 3,11,13)