

# Разбор задание из ЕГЭ Логарифмы

# Задание № 13

## Логарифмические и показательные уравнения

1. а) Решите уравнение  $\log_5(2-x) = \log_{25}x^4$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$ .

2. а) Решите уравнение  $\log_2(x^2 - 14x) = 5$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_3 0,1; 5\sqrt{10}]$ .

3. а) Решите уравнение  $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ .

4. а) Решите уравнение:  $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$ .

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку  $[2; \sqrt{10}]$ .

5. а) Решите уравнение  $6 \log_8^2 x - 5 \log_8 x + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2; 2,5]$ .

6. а) Решите уравнение  $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$ .

7. а) Решите уравнение  $\log_7(x+2) = \log_{49}(x^4)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\log_6 \frac{1}{7}; \log_6 35\right]$ .

8. а) Решите уравнение  $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_3 4; \log_3 10]$ .

9. а) Решите уравнение  $4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$ .

10. а) Решите уравнение  $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку  $[2; 3]$ .

11. а) Решите уравнение  $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$ .

12. а) Решите уравнение  $\log_3(x^2 - 2x) = 1$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_2 0, 2; \log_2 5]$ .

13. а) Решите уравнение  $\log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3 \log_2(x^2 - 5) - 2 \log_3^2(7 - x) - 6 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[\log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9\right]$ .

14. а) Решите уравнение  $2^{2x^2} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2+2x} + 2^{11+4x} = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $(\log_2 0, 52; \log_2 16, 1]$ .

13. а) Решите уравнение  $\log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3 \log_2(x^2 - 5) - 2 \log_3^2(7 - x) - 6 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[ \log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9 \right]$ .

13. а) Решите уравнение  $\log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3 \log_2(x^2 - 5) - 2 \log_3^2(7 - x) - 6 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[ \log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9 \right]$ .

Преобразуем уравнение

$$а) \log_2(x^2 - 5) \left[ \log_3^2(7 - x) + 3 \right] - 2 \left[ \log_3^2(7 - x) + 3 \right] = 0$$

$$\left( \log_3^2(7 - x) + 3 \right) \cdot \left( \log_2(x^2 - 5) - 2 \right) = 0$$

$$\log_3^2(7 - x) + 3 = 0 \quad \text{или} \quad \log_2(x^2 - 5) - 2 = 0$$

$$\underbrace{\log_3^2(7 - x)}_{\text{полож.}} = \underbrace{-3}_{\text{отр.}}$$

нет решений

$$\log_2(x^2 - 5) = 2$$

$$x^2 - 5 = 4$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 3$$

Проверка:

$$x_1 = -3$$

$$\log_2(9-5) \cdot \log_3^2(7+3) + 3 \log_2(9-5) - 2 \log_3^2(7+3) - 6 = 0$$

$$\log_2 4 \cdot \log_3^2 10 + 3 \log_2 4 - 2 \log_3^2 10 - 6 = 0$$

$$2 \cdot \log_3^2 10 + 6 - 2 \log_3^2 10 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

верное равенство, значит  $x = -3$  - корень ур-я

$$x_2 = 3$$

$$\log_2(9-5) \cdot \log_3^2(7-3) + 3 \log_2(9-5) - 2 \log_3^2(7-3) - 6 = 0$$

$$\log_2 4 \cdot \log_3^2 4 + 3 \log_2 4 - 2 \log_3^2 4 - 6 = 0$$

$$2 \cdot \log_3^2 4 + 6 - 2 \log_3^2 4 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

верное равенство, значит  $x = 3$  - корень ур-я

Ответ:  $-3$  и  $3$



11. а) Решите уравнение  $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$ .



11. а) Решите уравнение  $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$ .

Преобразуем уравнение:

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 12 \cdot 4^{x^2-3x} = 0 \quad \left| : 4^{x^2-3x+1} \right.$$

$$7 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1} + 5 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0$$

$$7 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right]^2 + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0$$

Введём новую переменную:  $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}$ ,  $y > 0$

$$7y^2 + 5y - 12 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-12) = 361 = 19^2$$

$$y = \frac{-5 \pm 19}{14} = 1; -\frac{12}{7}$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -\frac{12}{7} \text{ - посторонний корень, т.к. } y > 0$$

выполним обратную замену:

$$\left(\frac{3}{2}\right) x^2 - 3x + 1 = 1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$б) [-1; 2]$$

Оценим  $\sqrt{5}$ :  $2 < \sqrt{5} < 3$ , тогда

$$\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$$

Значит, отрезку  $[-1; 2]$  принадлежит только один корень  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ:  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: а)  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$       б)  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

3. а) Решите уравнение  $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ .

3. а) Решите уравнение  $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ .

а) Преобразуем уравнение

$$3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$$

$$3 \cdot (3^{x-1})^2 - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$$

Введем новую переменную:  $y = 3^{x-1}$ ,  $y > 0$

$$3y^2 - 8y + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4$$

$$y = \frac{8 \pm 2}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{5}{3}, y_2 = 1$$

выполним обратную замену:

$$3^{x-1} = \frac{5}{3}$$

$$3^{x-1} = 1$$

$$x-1 = \log_3 \frac{5}{3}$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = 1 + (\log_3 5 - \log_3 3)$$

$$x = \log_3 5$$

Ответ:  $1; \log_3 5$

$$b) \quad \left(1; \frac{7}{3}\right)$$

$x = 1$  не принадлежит интервалу  $\left(1; \frac{7}{3}\right)$   
Запишем концы интервала в виде логарифмов

$$1 = \log_3 3$$

$$\frac{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \log_3 3 = \log_3 3^{7/3} = \log_3 \sqrt[3]{3^7} = \log_3 9 \sqrt[3]{3}$$

$$\log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 9 \sqrt[3]{3}, \quad \text{т.к. } 5 < \sqrt[3]{3^7}$$

$$\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{3^7}$$

$y = \log_3 x$  - возраст.

значит,  $\log_3 5$  принадлежит интервалу  $\left(1; \frac{7}{3}\right)$

Ответ:  $\log_3 5$

Ответ: а)  $1$ ;  $\log_3 5$  и  $\log_3 5$

2 способ сравнения:

$$\begin{array}{ccccccc} \log_3 3 & < & \log_3 5 & < & \log_3 9 & < & \frac{7}{3} \\ \text{"} & & & & \text{"} & & \\ \underline{1} & & & & 2 & & \end{array}$$

Решить самостоятельно все номера,  
кроме тех, которые мы разобрали  
(кроме 3,11,13)