Разбор задание из ЕГЭ Логарифмы

Задание № 13

Логарифмические и показательные уравнения

1. а) Решите уравнение $\log_5(2-x)=\log_{25}x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9\frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

2. а) Решите уравнение $\log_2\left(x^2-14x\right)=5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1;\ 5\sqrt{10}\right]$.

3. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

4. а) Решите уравнение: $4^x-2^{x+3}+15=0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2;\sqrt{10}]$.

5. а) Решите уравнение $6\log_8^2 x-5\log_8 x+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\ 2,5]$.

6. а) Решите уравнение $1+\log_2(9x^2+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1;\frac{8}{9}\right]$.

7. а) Решите уравнение $\log_7(x+2)=\log_{49}(x^4)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6\frac{1}{7};\ \log_6 35\right]$.

8. а) Решите уравнение $27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$.

9. а) Решите уравнение $4^{x^2-2x+1}+4^{x^2-2x}=20$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$.

10. а) Решите уравнение $3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^x+3\cdot 4^{x+1}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $[2;\ 3]$.

11. а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$.

12. а) Решите уравнение $\log_3(x^2-2x)=1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,2;\log_2 5]$.

13. а) Решите уравнение $\log_2(x^2-5)\cdot\log_3^2(7-x)+3\log_2(x^2-5)-2\log_3^2(7-x)-6=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2\frac{1}{7};\log_2 9\right]$.

14. а) Решите уравнение $2^{2x^2}-(2^3+2^8)\cdot 2^{x^2+2x}+2^{11+4x}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(\log_2 0,52;\log_2 16,1]$.

13. а) Решите уравнение $\log_2(x^2-5)\cdot\log_3^2(7-x)+3\log_2(x^2-5)-2\log_3^2(7-x)-6=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2\frac{1}{7};\log_2 9\right]$.

13. а) Решите уравнение $\log_2(x^2-5)\cdot\log_3^2(7-x)+3\log_2(x^2-5)-2\log_3^2(7-x)-6=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2\frac{1}{7};\log_2 9\right]$.

Преобразуем уравнение

а) $\log_2(x^2-5)\left[\log_3^2(7-x)+3\right]-2\left[\log_3^2(7-x)+3\right]=0$

$\left(\log_3^2(7-x)+3\right)\cdot\left(\log_2(x^2-5)-2\right)=0$

$\log_3^2(7-x)+3=0$ или $\log_2(x^2-5)-2=0$

$\underbrace{\log_3^2(7-x)}_{\text{полож}}=\underbrace{-3}_{\text{отр.}}$

нет решений

$\log_2(x^2-5)=2$

$x^2-5=4$

$x^2=9$

$x_1=-3 \quad x_2=3$

Проверка:

$x_1 = -3$

$\log_2(9-5)\cdot\log_3^2(7+3) + 3\log_2(9-5) - 2\log_3^2(7+3) - 6 = 0$

$\log_2 4\cdot\log_3^2 10 + 3\log_2 4 - 2\log_3^2 10 - 6 = 0$

$2\cdot\log_3^2 10 + 6 - 2\log_3^2 10 - 6 = 0$

$0 = 0$

верное равенство, значит $x = -3$ - корень ур-я

$x_2 = 3$

$\log_2(9-5)\cdot\log_3^2(7-3) + 3\log_2(9-5) - 2\log_3^2(7-3) - 6 = 0$

$\log_2 4\cdot\log_3^2 4 + 3\log_2 4 - 2\log_3^2 4 - 6 = 0$

$2\cdot\log_3^2 4 + 6 - 2\log_3^2 4 - 6 = 0$

$0 = 0$

верное равенство, значит $x = 3$ - корень ур-я

Ответ: -3 и 3

б) $\left[\log_2 \frac{1}{7};\ \log_2 9\right]$

Представим числа -3 и 3 в виде логарифмов

$$-3 = -3\log_2 2 = \log_2 2^{-3} = \log_2 \frac{1}{8}$$

$$3 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8$$

Заметим, что

$$\underset{-3}{\underset{\parallel}{\log_2 \frac{1}{8}}} < \log_2 \frac{1}{7} < \underset{3}{\underset{\parallel}{\log_2 8}} < \log_2 9$$

Значит в указанный промежуток попадает только один корень $x = 3$

Ответ: $x = 3$

Ответ: а) $-3;\ 3$ б) 3

11. а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$.

11. а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$.

Преобразуем уравнение:

$$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-12\cdot 4^{x^2-3x+1}=0 \quad \Big| : 4^{x^2-3x+1}\neq 0$$

$$7\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1}+5\cdot\left(\frac{6}{4}\right)^{x^2-3x+1}-12=0$$

$$7\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right]^2+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12=0$$

введём новую переменную: $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}$, $y>0$

$$7y^2+5y-12=0$$

$$D=5^2-4\cdot 7\cdot(-12)=361=19^2$$

$$y=\frac{-5\pm 19}{14}=1;\ -\frac{12}{7}$$

$y_1=1$ $\quad y_2=-\frac{12}{7}$ – посторонний корень, т.к. $y>0$

выполним обратную замену:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 1$$

$$x^2-3x+1=0$$

$$D = 9-4 = 5$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

б) $[-1; 2]$

Оценим $\sqrt{5}$: $2 < \sqrt{5} < 3$, тогда

$$\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$$

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только один корень $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: а) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

3. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

3. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

а) Преобразуем уравнение

$$3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$$

$$3 \cdot (3^{x-1})^2 - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$$

введём новую переменную: $y = 3^{x-1}$; $y > 0$

$$3y^2 - 8y + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4$$

$$y = \frac{8 \pm 2}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{5}{3}, \quad y_2 = 1$$

выполним обратную замену:

$$3^{x-1} = \frac{5}{3} \qquad\qquad 3^{x-1} = 1$$

$$x - 1 = \log_3 \frac{5}{3} \qquad\qquad x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = 1 + (\log_3 5 - \log_3 3)$$

$$x = \log_3 5$$

Ответ: 1; $\log_3 5$

б) $\left(1; \frac{7}{3}\right)$

$x=1$ не принадлежит интервалу $\left(1; \frac{7}{3}\right)$

Запишем концы интервала в виде логарифмов

$1 = \log_3 3$

$\frac{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \log_3 3 = \log_3 3^{7/3} = \log_3 \sqrt[3]{3^7} = \log_3 9\sqrt[3]{3}$

$\underset{\underset{1}{\parallel}}{\log_3 3} < \log_3 5 < \underset{\underset{\frac{7}{3}}{\parallel}}{\log_3 9\sqrt[3]{3}}$, т.к. $5 < \sqrt[3]{3^7}$

$\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{3^7}$

$y = \log_3 x$ - возраст.

значит, $\log_3 5$ принадлежит интервалу $\left(1; \frac{7}{3}\right)$

Ответ: $\log_3 5$

Ответ: а) 1; $\log_3 5$ б) $\log_3 5$

2 способ сравнения:

$$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\log_3 3} < \log_3 5 < \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\log_3 9} < \frac{7}{3}$$

Решить самостоятельно все номера, кроме тех, которые мы разобрали (кроме 3,11,13)