Разностноое уравнение и передаточная функция

- Умножив и разделив (7-2) на z^2, получим
-
- $$H(z) = \frac{1}{z^2}(z^2 + a_1 z + a_2) = \frac{1}{z^2}(z - z_{01})(z - z_{02})$$
-

(3),

$$H(z) = \frac{1}{z^2}[z^2 - (z_{01} + z_{02}) \cdot z + z_{01} z_{02}]$$

- или
-
- (4),
- где z_{01} и z_{02} – корни квадратного уравнения
- $z^2 + a_1 z + a_2 = 0.$

Разностноое уравнение и передаточная функция

- Сравнивая (3) и (4), находим, что

$$\begin{cases} z_{01} + z_{02} = -a_1 \\ z_{01} \cdot z_{02} = a_2 \end{cases} \quad (5).$$

- Комплексно-сопряженные корни

$$z_{01} = r \cdot e^{j\varphi}, \quad z_{02} = r \cdot e^{-j\varphi} \quad (6).$$

АЧХ цифрового фильтра

- АЧХ нерекурсивного ЦФ

$$H(\omega) = \sqrt{(1 + a_1 e^{-j\omega T} + a_2 e^{-2j\omega T})(1 + a_1 e^{j\omega T} + a_2 e^{2j\omega T})}$$

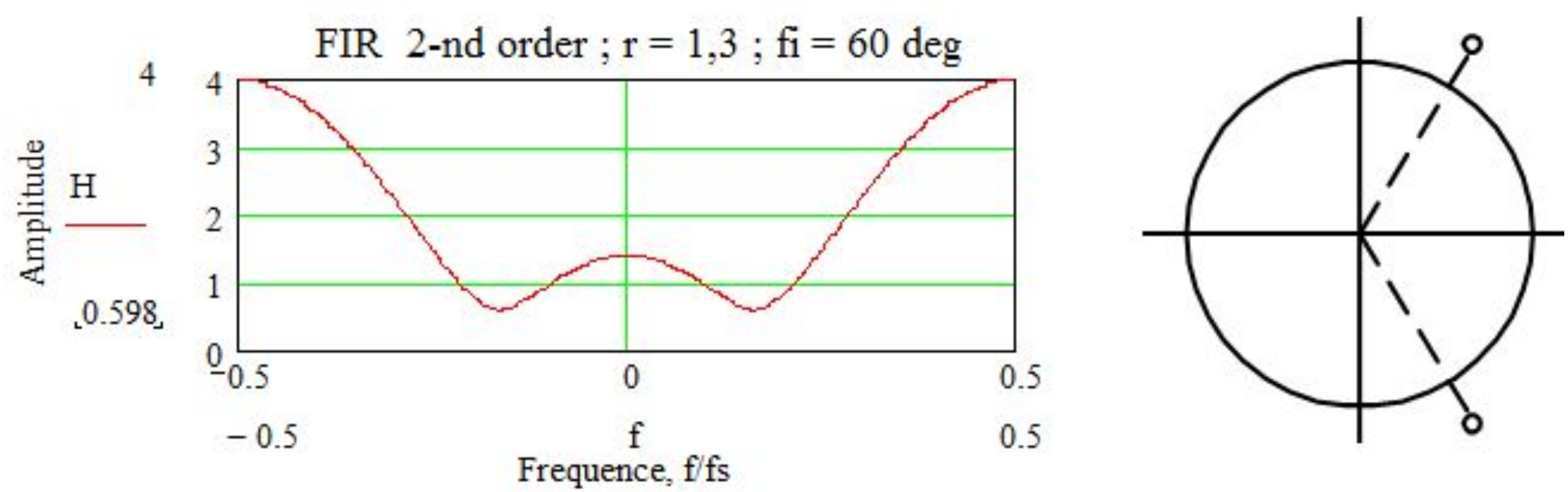
$$H(\omega) =$$

$$= \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot (1 + a_2) \cdot \cos \omega T + 2a_2 \cdot \cos 2\omega T}$$

- (11)

АЧХ цифрового фильтра

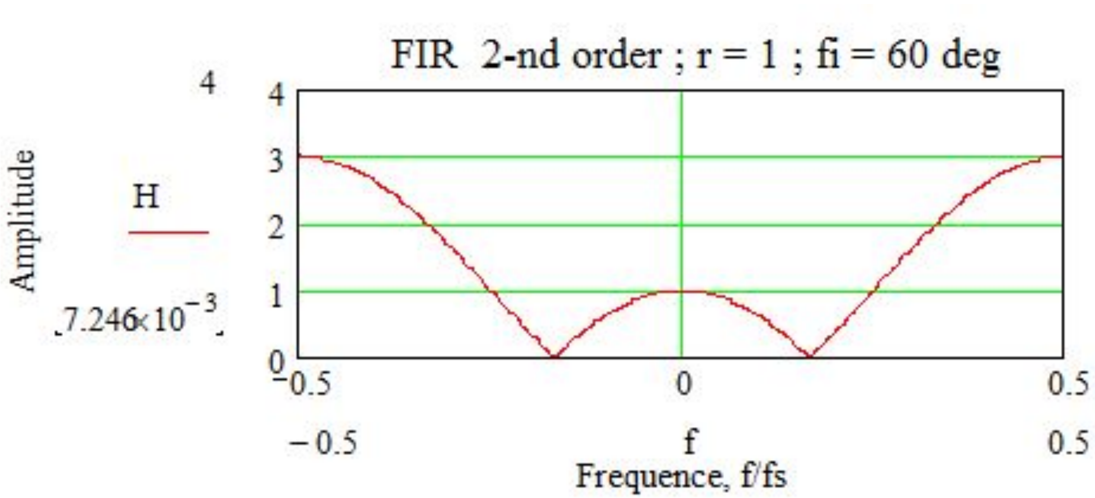
- АЧХ и нуль-полюсная диаграмма НЦФ 2-го порядка.
- Координаты нулей: радиус 1.3, угол ± 60°.

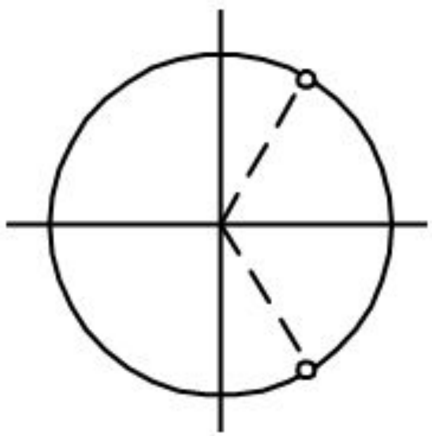


- Рис. 1
-

АЧХ цифрового фильтра

- АЧХ и нуль-полюсная диаграмма НЦФ 2-го порядка.
- Координаты нулей: радиус 1.0, угол ± 60°.

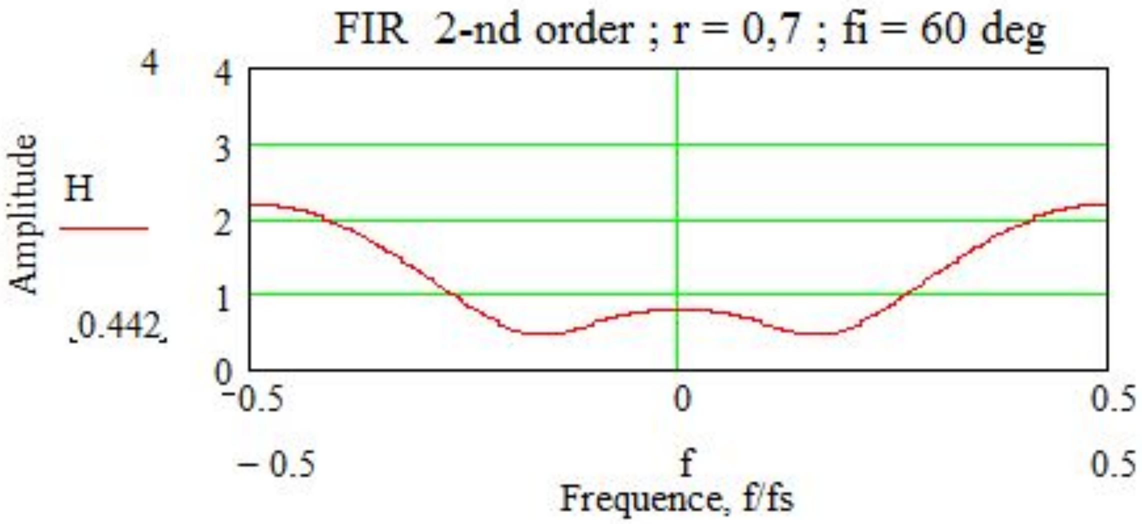


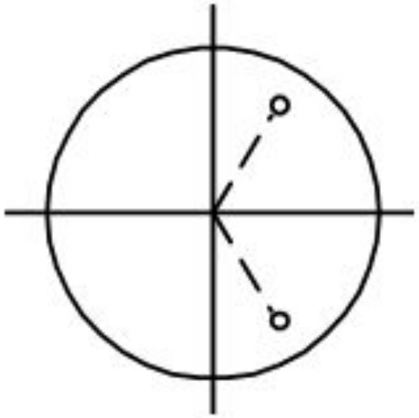


- Рис. 2

АЧХ цифрового фильтра

- АЧХ и нуль-полюсная диаграмма НЦФ 2-го порядка.
- Координаты нулей: радиус 0.7, угол ± 60°.





- Рис. 3

АЧХ цифрового фильтра

- Для того, чтобы получить наибольшее затухание на частотах вблизи нулей передаточной функции, необходимо, чтобы нули лежали на единичной окружности, т.е. должно быть $r = 1$.
- В этом случае $a_2 = 1$, $a_1 = -2\cos\varphi$, и АЧХ равна

$$H(\omega)_{r=1} = 2 \cdot \left|\cos\omega T - \cos\varphi\right| = \quad (12).$$

$$= 4 \cdot \left| \sin\frac{\omega T + \varphi}{2} \cdot \sin\frac{\omega T - \varphi}{2} \right|$$

АЧХ цифрового фильтра

- Если в (3) подставить *exp(jωT)* вместо *z* и взять модуль, т.е. вычислить АЧХ, то получим

$$H(\omega) = \left|H(z)\right|_{z=\exp(j\omega T)} =$$

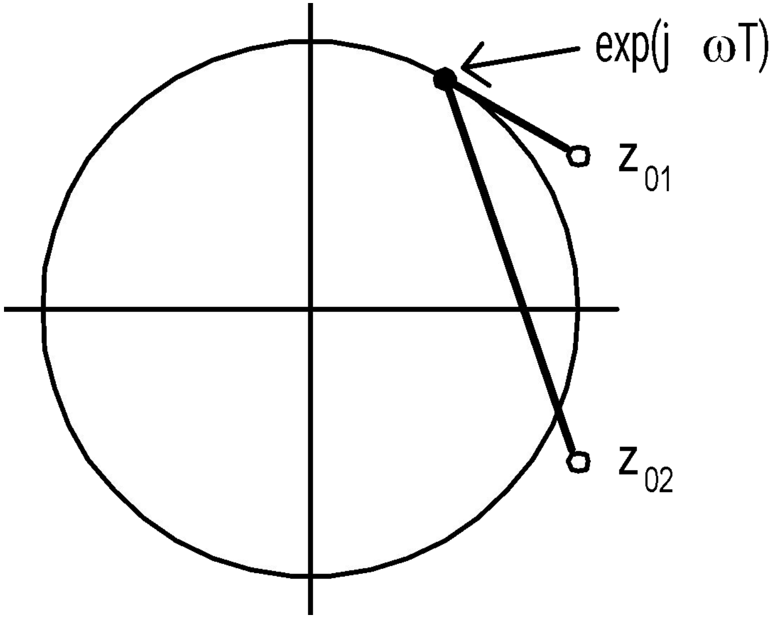
$$= \frac{1}{\left|e^{2j\omega T}\right|} \cdot \left|e^{j\omega T} - z_{01}\right| \cdot \left|e^{j\omega T} - z_{02}\right|$$

АЧХ цифрового фильтра

- Так как модуль комплексной экспоненты равен единице, а модуль разности между текущей точкой *exp(jωT)* и положением нуля равен расстоянию между ними (см. рис 4), то значение АЧХ НЦФ на частоте ω равно произведению расстояний ρ_{0i} от точки $e^{j\omega T}$, лежащей на единичной окружности плоскости z, до всех нулей фильтра:
-
- $$H(\omega) = \rho_{01}(e^{j\omega T}) \cdot \rho_{02}(e^{j\omega T}) \quad (13).$$

АЧХ цифрового фильтра

- Расстояния от текущей точки единичной окружности до нулей фильтра.



- Рис.4

АЧХ цифрового фильтра

- Так как

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-jn\omega T} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega T) - j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a_n \sin(n\omega T)$$

- то АЧХ НЦФ общего вида.

- $$H(\omega) = \sqrt{\left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega T)\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n \sin(n\omega T)\right]^2} \quad (14)$$

ФЧХ цифрового фильтра

- ФЧХ НЦФ

$$\varphi(\omega) = -arctg \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n \sin(n\omega T)}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega T)} \qquad (15)$$