

Разностное уравнение и передаточная функция

- Умножив и разделив (7-2) на z^2 , получим

- $$H(z) = \frac{1}{z^2} (z^2 + a_1 z + a_2) = \frac{1}{z^2} (z - z_{01})(z - z_{02})$$

- (3),

$$H(z) = \frac{1}{z^2} [z^2 - (z_{01} + z_{02}) \cdot z + z_{01} z_{02}]$$

- или

- (4),

- где z_{01} и z_{02} – корни квадратного уравнения
- $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$.

Разностное уравнение и передаточная функция

- Сравнивая (3) и (4), находим, что

-
- $$\begin{cases} z_{01} + z_{02} = -a_1 \\ z_{01} \cdot z_{02} = a_2 \end{cases} \quad (5).$$
-

- Комплексно-сопряженные корни

-
- $$z_{01} = r \cdot e^{j\varphi}, \quad z_{02} = r \cdot e^{-j\varphi} \quad (6).$$

АЧХ цифрового фильтра

- АЧХ нерекурсивного ЦФ

$$H(\omega) = \sqrt{(1 + a_1 e^{-j\omega T} + a_2 e^{-2j\omega T})(1 + a_1 e^{j\omega T} + a_2 e^{2j\omega T})}$$

$$H(\omega) =$$

$$= \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot (1 + a_2) \cdot \cos \omega T + 2a_2 \cdot \cos 2\omega T}$$

• (11)

АЧХ цифрового фильтра

- АЧХ и нуль-полюсная диаграмма НЦФ 2-го порядка.
- Координаты нулей: радиус 1.3, угол $\pm 60^\circ$.

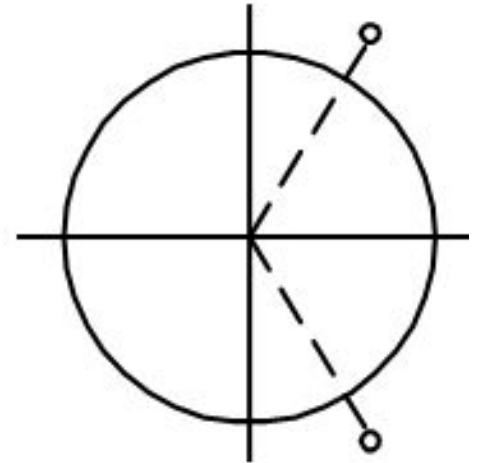
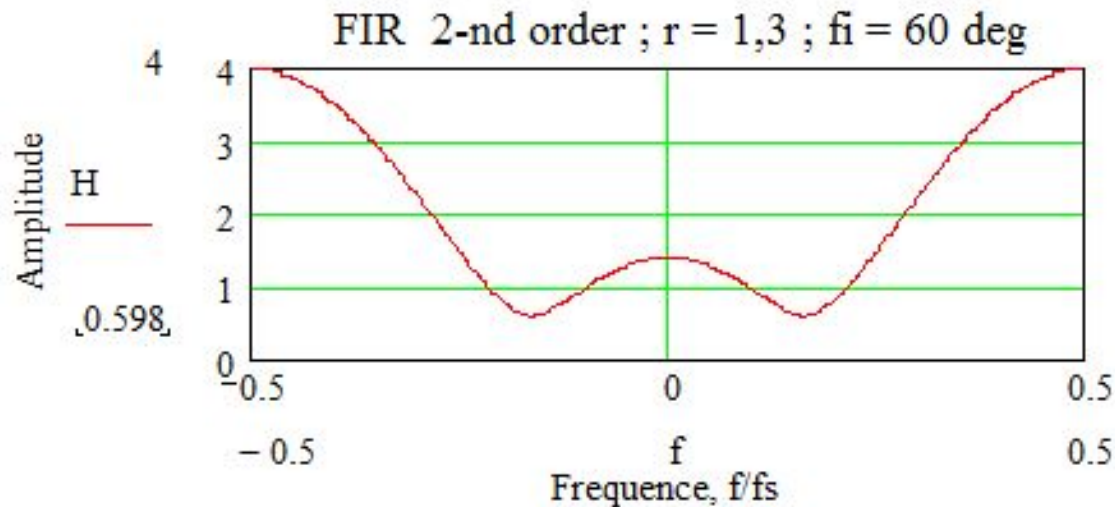
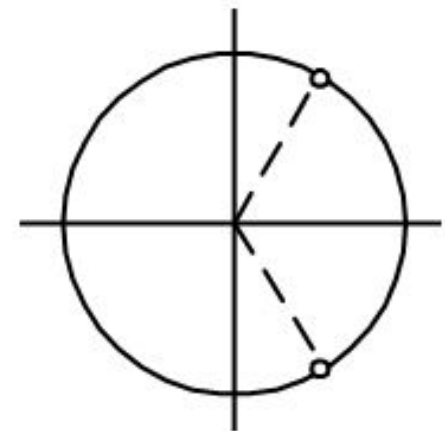
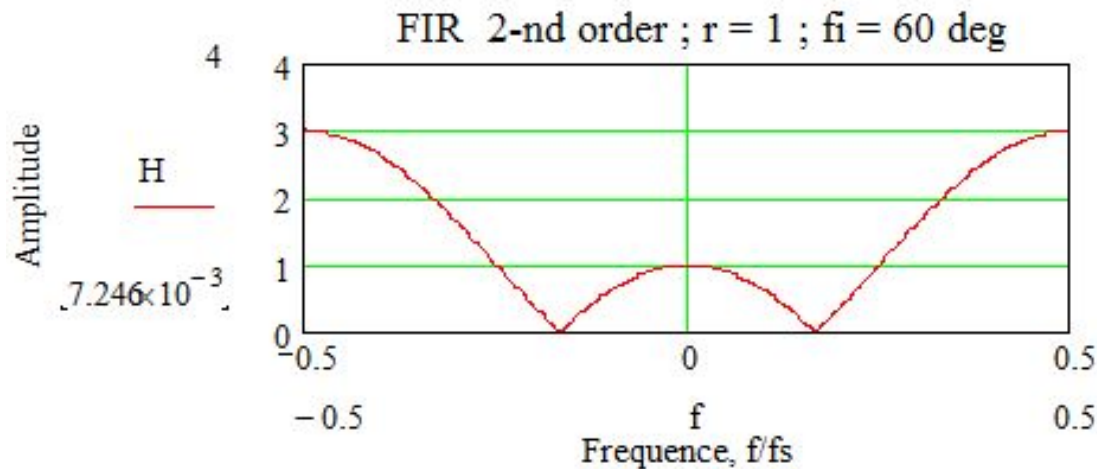


Рис. 1

АЧХ цифрового фильтра

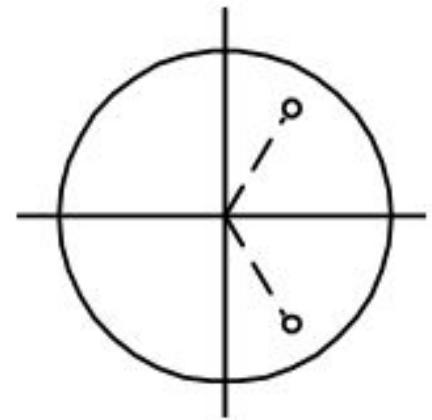
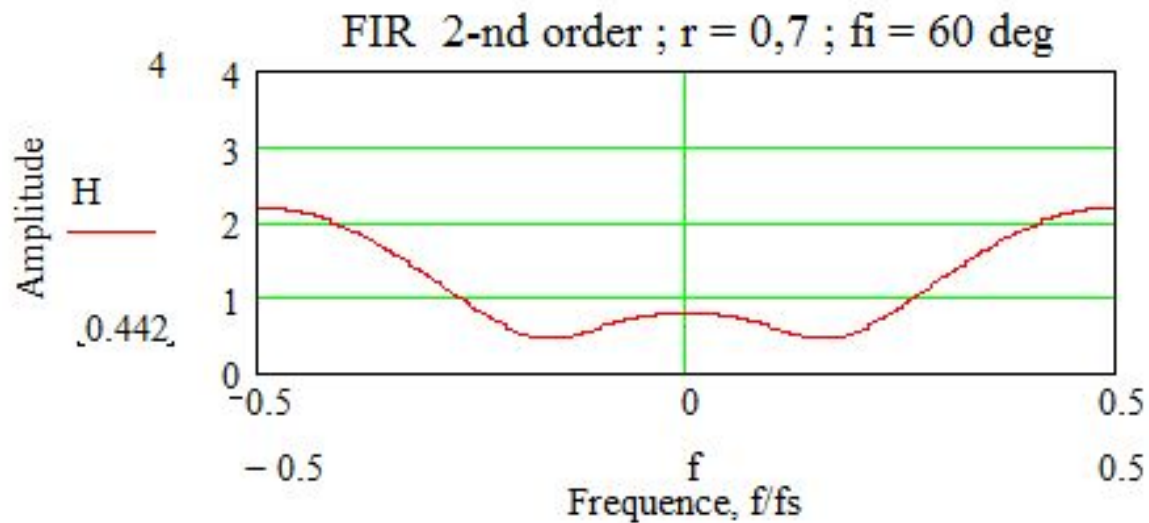
- АЧХ и нуль-полюсная диаграмма НЦФ 2-го порядка.
- Координаты нулей: радиус 1.0, угол $\pm 60^\circ$.



• Рис. 2

АЧХ цифрового фильтра

- АЧХ и нуль-полусная диаграмма НЦФ 2-го порядка.
- Координаты нулей: радиус 0.7, угол $\pm 60^\circ$.



• Рис. 3

АЧХ цифрового фильтра

- Для того, чтобы получить наибольшее затухание на частотах вблизи нулей передаточной функции, необходимо, чтобы нули лежали на единичной окружности, т.е. должно быть $r = 1$.
- В этом случае $a_2 = 1$, $a_1 = -2\cos\varphi$, и АЧХ равна

$$H(\omega)_{r=1} = 2 \cdot |\cos \omega T - \cos \varphi| = \quad (12).$$

$$= 4 \cdot \left| \sin \frac{\omega T + \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\omega T - \varphi}{2} \right|$$

АЧХ цифрового фильтра

- Если в (3) подставить $\exp(j\omega T)$ вместо z и взять модуль, т.е. вычислить АЧХ, то получим

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \left| H(z) \right|_{z=\exp(j\omega T)} = \\ &= \frac{1}{\left| e^{2j\omega T} \right|} \cdot \left| e^{j\omega T} - z_{01} \right| \cdot \left| e^{j\omega T} - z_{02} \right| \end{aligned}$$

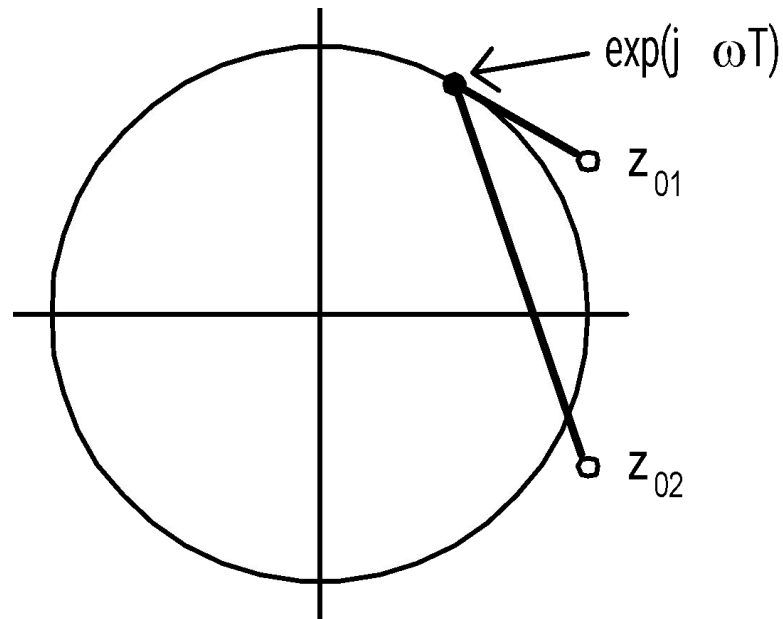
АЧХ цифрового фильтра

- Так как модуль комплексной экспоненты равен единице, а модуль разности между текущей точкой $\exp(j\omega T)$ и положением нуля равен расстоянию между ними (см. рис 4), то значение АЧХ НЦФ на частоте ω равно произведению расстояний ρ_{0i} от точки $e^{j\omega T}$, лежащей на единичной окружности плоскости z , до всех нулей фильтра:

-
- $$H(\omega) = \rho_{01} (e^{j\omega T}) \cdot \rho_{02} (e^{j\omega T})$$

АЧХ цифрового фильтра

- Расстояния от текущей точки единичной окружности до нулей фильтра.



• Рис.4

АЧХ цифрового фильтра

- Так как

$$\begin{aligned} H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-jn\omega T} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega T) - j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a_n \sin(n\omega T) \end{aligned}$$

- то АЧХ НЦФ общего вида.

$$H(\omega) = \sqrt{\left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega T) \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n \sin(n\omega T) \right]^2} \quad (14)$$

ФЧХ цифрового фильтра

- ФЧХ НЦФ

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n \sin(n\omega T)}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega T)} \quad (15)$$