Алгоритмы и структуры данных

практические занятия

Марквирер Владлена Дмитриевна
vdmarkvirer@hse.ru

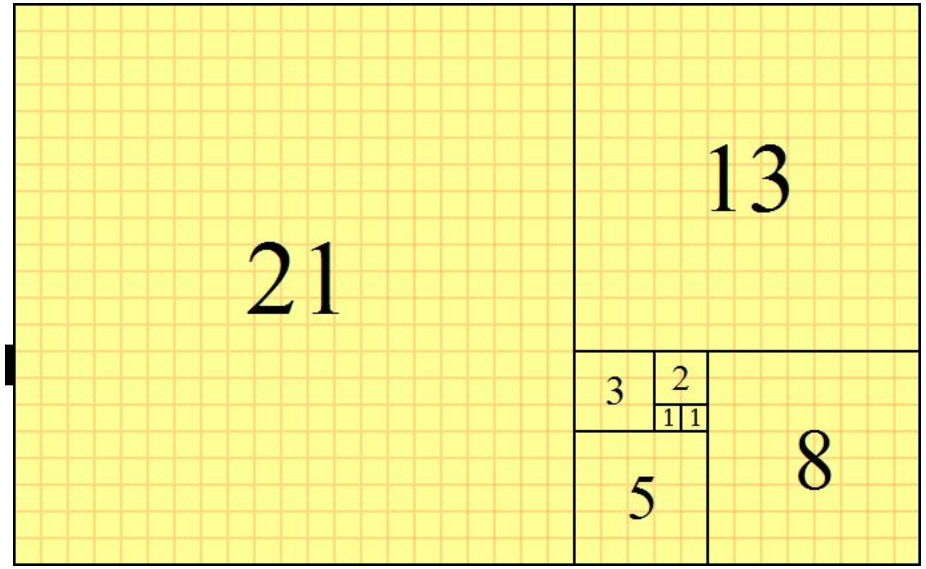
О практиках

- Работа в группах из 3-х человек.
- Постарайтесь сформировать группы, в которых будет хотя бы один уверенный программист.
- Каждая практика – решение основных задач + задачи повышенной сложности (для повышения баллов за практики).
- То, что не успеете решить – выносится на дз, с обязательной защитой в начале следующей практики, иначе работа принята не будет.
- Используем любой известный Вам язык программирования, но все алгоритмы пишем самостоятельно, не берём готовые библиотеки, и методы.
- Оценивание будет производиться за каждую задачу каждому человеку в команде по результатам защиты кода (по необходимости), алгоритма и тестов (по необходимости) в трёхзначной шкале (+ ; +/- ; -).

Практика №1

«Программирование рекурсивных процедур и функций»

Основная задача



- **Понять и реализовать 3 различных алгоритма нахождения чисел Фибоначчи.**
- **Подсказка:** один алгоритм рекурсивный, два – итерационных.
- Сравните эффективность (по времени, используемой памяти и т.п.) каждого алгоритма и докажите, какой будет лучше и почему.

Помните, что рекурсию не всегда можно свести к итерации, но эта задача – не тот случай, тут всё хорошо!

Задача повышенной сложности

- **Рекурсивно вычислить определитель матрицы разложением по строке/столбцу.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} - \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot M_{1n}$$

где a_{ij} – элемент матрицы **A**, стоящий на пересечении *i*-той строки с *j*-тым столбцом матрицы, а M_{ij} – его минор, т.е. определитель *n*–1-го порядка,

- Возможно ли вычислить итерационно?

Практика №2

«Продолжение работы с рекурсивными и итерационными алгоритмами»

Задача с прошлого занятия

- **Рекурсивно вычислить определитель матрицы разложением по строке/столбцу.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} - \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot M_{1n}$$

где a_{ij} – элемент матрицы **A**, стоящий на пересечении *i*-той строки с *j*-тым столбцом матрицы, а M_{ij} – его минор, т.е. определитель *n*–1-го порядка,

- Возможно ли вычислить итерационно?

Задача на определитель матрицы

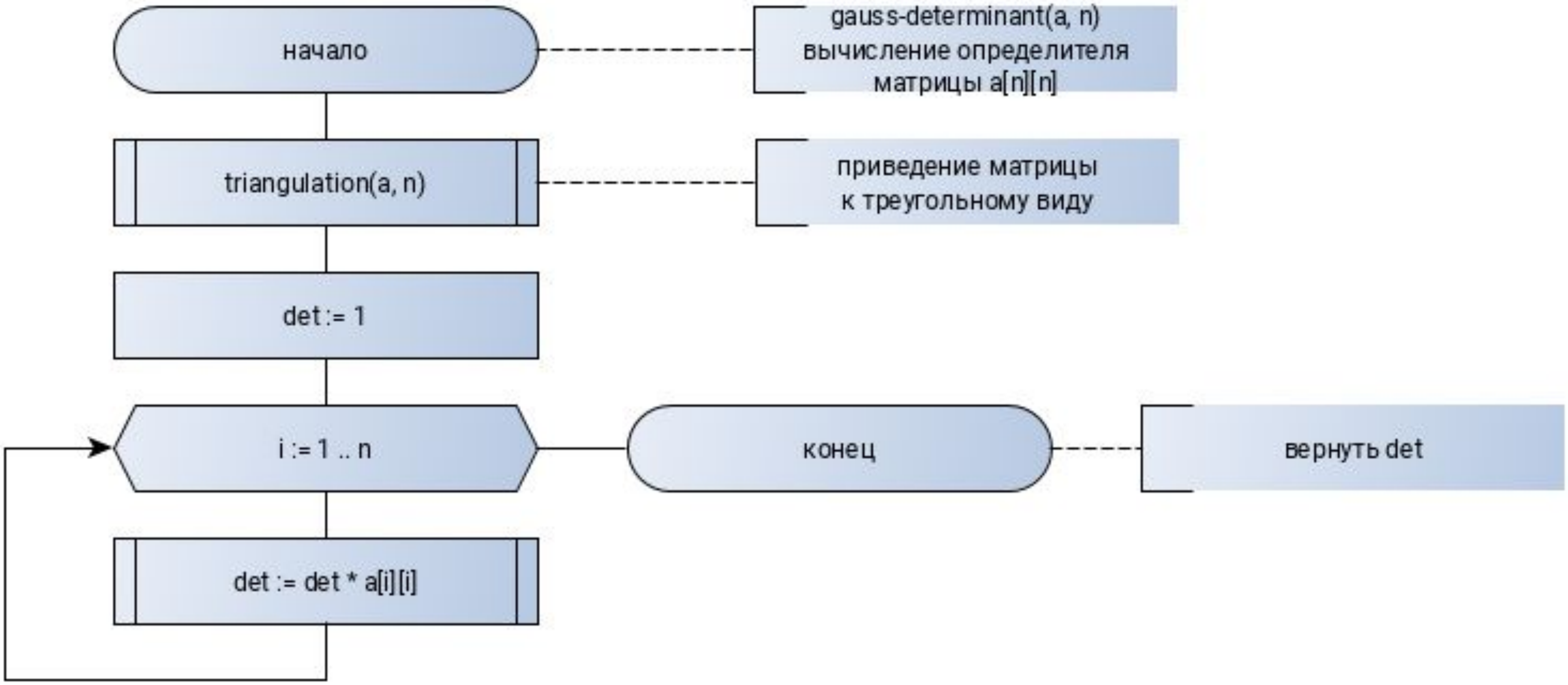
- **Вычислить рекурсивно определитель матрицы с помощью метода Гаусса.**

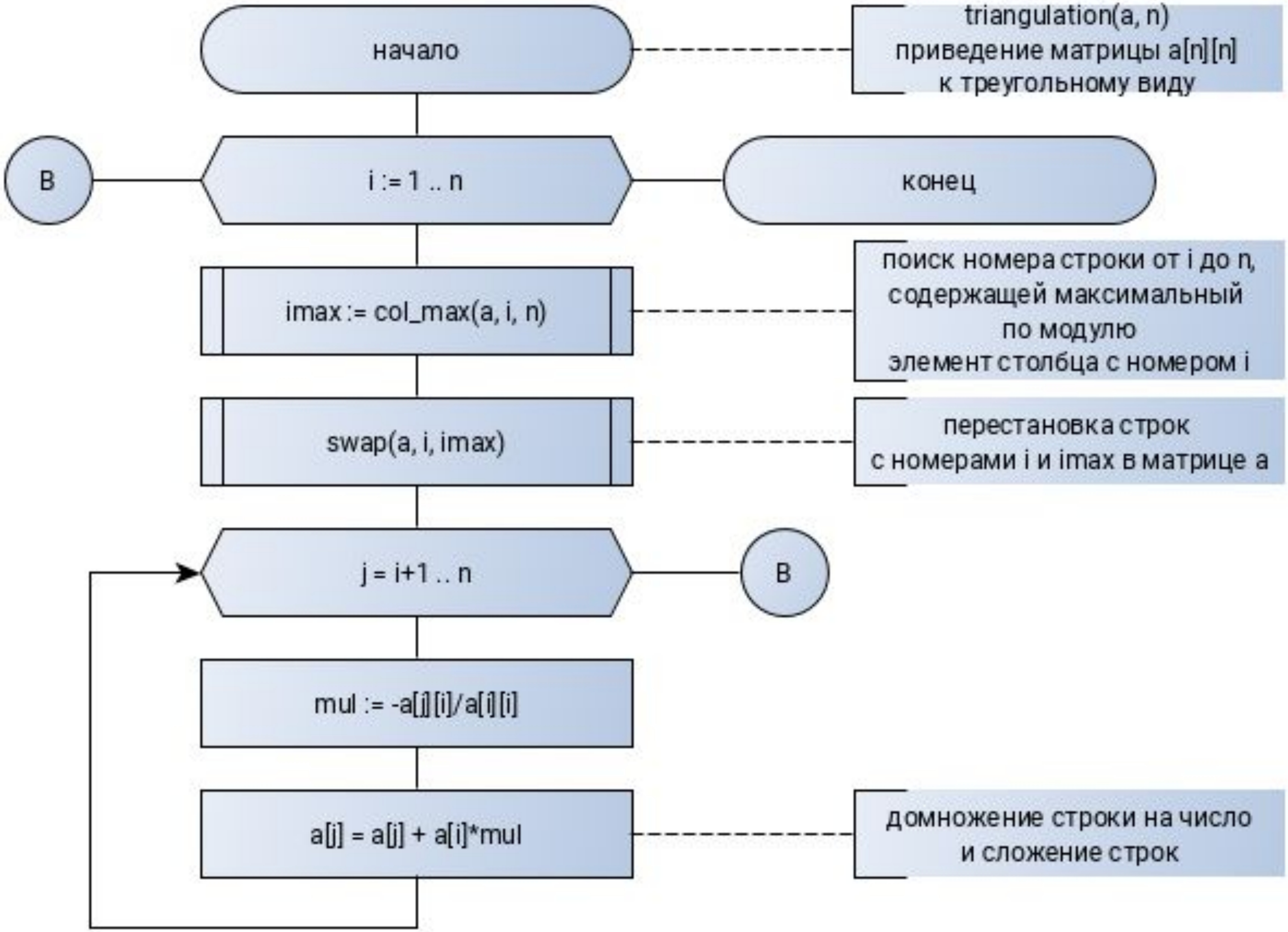
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 73 & 7 & 6 \\ 110 & 16 & 19 \\ 148 & 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 73 & 7 & 6 \\ 0 & 5{,}45 & 9{,}96 \\ 148 & 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 73 & 7 & 6 \\ 0 & 5{,}45 & 9{,}96 \\ 0 & -4{,}19 & -5{,}16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 73 & 7 & 6 \\ 0 & 5{,}45 & 9{,}96 \\ 0 & 0 & 2{,}49 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 73 * 5{,}45 * 2{,}49 = 992$$

- Какой метод более точный и почему?
- Какой метод более быстрый и почему?


начало
gauss-determinant(a, n)
вычисление определителя
матрицы a[n][n]
triangulation(a, n)
приведение матрицы
к треугольному виду
det := 1
i := 1 .. n
конец
вернуть det
det := det * a[i][i]


начало
triangulation(a, n)
приведение матрицы a[n][n]
к треугольному виду
B
i := 1 .. n
конец
imax := col_max(a, i, n)
поиск номера строки от i до n,
содержащей максимальный
по модулю
элемент столбца с номером i
swap(a, i, imax)
перестановка строк
с номерами i и imax в матрице a
j = i+1 .. n
B
mul := -a[j][i]/a[i][i]
a[j] = a[j] + a[i]*mul
домножение строки на число
и сложение строк

Практика №3

«Рекуррентные соотношения и итерационный алгоритм»

Задача по генерации перестановок

- Рекурсивная генерация всех n-факториал перестановок. Параметр n задаётся от 0 до 9.
- n – входной параметр (количество разрядов).

- Два варианта (посчитать количество перестановок):
  - перестановка без повторений (всего $n!$ перестановок);
  - перестановка с повторениями (всего n^n перестановок) – дополнительное задание.

- Вывод в лексикографическом порядке или другом (объяснить выбор).

Задача по генерации перестановок

- Например, найти все возможные перестановки для последовательности чисел 1, 2, 3.
  Существуют следующие перестановки:

```
1: 1 2 3
2: 1 3 2
3: 2 1 3
4: 2 3 1
5: 3 1 2
6: 3 2 1
```

Задача по генерации перестановок

- Дополнительно дублирую слайды с лекции:

Пример 2 (комбинаторика). Один из самых часто встречающихся комбинаторных объектов – это перестановка первых N натуральных чисел. Известно, что существует ровно N! таких перестановок. Вот, например, все 6 перестановок чисел 1,2,3, записанные в *лексикографическом* порядке:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

При решении некоторых задач методом полного перебора требуется сгенерировать все N! перестановок, не пропустив случайно какую-нибудь, и не сгенерировав какую-нибудь перестановку дважды. Существует рекурсивный алгоритм, позволяющий это сделать. В отличие от рассмотренного выше рекурсивного алгоритма Евклида в данном примере мы будем иметь дело не с рекурсивной *функцией*, а с рекурсивной *процедурой*. На прошлой лекции у нас уже был пример двух рекурсивных процедур, вызывающих взаимно друг друга и генерирующих набор символьных строк в алфавите $\{0,1\}$ с определёнными свойствами.

Рекурсивная процедура генерации всех перестановок из N элементов 1,2,3,…,N получает на вход один единственный параметр – натуральное число N. Она вызывает саму себя, но с параметром N – 1, и получает список всех (N – 1)! перестановок из элементов 1,2,3,…,N – 1 (ниже в таблице T_0 они перечислены в лексикографическом порядке):

1	2	3	…	N – 2	N – 1
1	2	3	…	N – 1	N – 2
…	…	…	…	…	…
N – 2	N – 1	N – 3		2	1
N – 1	N – 2	N – 3	…	2	1

Затем число N вставляется в каждую строку таблицы T_0 перед её первым элементом и получается таблица T_1:

N	1	2	3	…	N – 2	N – 1
N	1	2	3	…	N – 1	N – 2
N	…	…	…	…	…	…
N	N – 2	N – 1	N – 3		2	1
N	N – 1	N – 2	N – 3	…	2	1

Очевидно, что все строки таблицы T_1 отличаются между собой. Затем в таблице T_1 меняются местами первый и второй столбец. Получается таблица T_2:

1	N	2	3	…	N – 2	N – 1
1	N	2	3	…	N – 1	N – 2
…	N	…	…	…	…	…
N – 2	N	N – 1	N – 3		2	1
N – 1	N	N – 2	N – 3	…	2	1

Очевидно, что все её строки различаются между собой и отличаются от строк таблицы T_1. Далее в таблице T_2 меняются местами второй и третий столбец и получается таблица T_3:

1	2	N	3	…	N – 2	N – 1
1	2	N	3	…	N – 1	N – 2
…	…	N	…	…	…	…
N – 2	N – 1	N	N – 3		2	1
N – 1	N – 2	N	N – 3	…	2	1

Далее каждая следующая таблица T_{k+1} получается из предыдущей таблицы T_k перестановкой k-го и (k + 1)-го столбцов. Последняя таблица T_N будет иметь вид:

1	2	3	…	N – 2	N – 1	N
1	2	3	…	N – 1	N – 2	N
…	…	…	…	…	…	N
N – 2	N – 1	N – 3		2	1	N
N – 1	N – 2	N – 3	…	2	1	N

Очевидно, что все строки таблиц $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_N$ попарно различны, суммарное количество строк равно N! и все они представляют собой искомые перестановки чисел 1,2,3,…,N (без повторений и пропусков).

Задача по вычислению ленточного определителя

- Вычисление ленточного определителя (из презентации с лекции):
  - итерационный способ;
  - на основе выведенной математической формулы.

- Вспомогательные материалы по ленточной матрице:
  - Исходное состояние – Трёхдиагональная матрица: https://ru.wikipedia.org/wiki/Трёхдиагональная_матрица, решается с помощью метода прогонки: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_прогонки. Можно попробовать подумать над вариантом пяти и более диагональных матриц (по желанию).
  - Математическая выкладка: https://scask.ru/i_book_alg_s.php?id=420&ysclid=l88lafgae453071270

- Далее продублированы слайды из презентации с лекции.

Пример 1. Требуется вычислить определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Обозначим искомый определитель через x_n. Тогда, вычисляя его разложением по первой строке, а затем возникший определитель $(n-1)$-го порядка – разложением по первому столбцу, приходим к равенству

$$x_n = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot x_{n-1} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot x_{n-1} - 9 \cdot x_{n-2}.$$

Таким образом мы получили линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами глубины 2. Чтобы его решить, надо добавить два начальных условия:

$$x_1 = 6,\ x_2 = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - 9 \cdot 1 = 27.$$

Применим описанный выше метод решения рекуррентных соотношений:

1) составим и решим характеристическое уравнение. Оно в данном случае будет иметь вид:

$$\lambda^n = 6 \cdot \lambda^{n-1} - 9 \cdot \lambda^{n-2},$$

или после упрощения

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 9 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, т.е. характеристическое уравнение имеет один корень, равный 3, кратности 2. Далее, согласно пункту 3, ответ к рекуррентному соотношению запишем в виде *формулы общего решения*

$$x_n = P_1(n) \cdot 3^n,$$

где $P_1(n)$ – полином от n степени 1, т.е. выражение вида $a \cdot n + b$. Константы a и b найдём из начальных условий $x_1 = 6$, $x_2 = 27$. Подставляя вместо n числа 1 и 2 в формулу общего решения

$$x_n = (a \cdot n + b) \cdot 3^n,$$

получим систему уравнений для нахождения a и b:

$$\begin{cases} 6 = (a + b) \cdot 3, \\ 27 = (2a + b) \cdot 9. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $a = b = 1$. В итоге получаем окончательный ответ, т.е. формулу *частного решения*

$$x_n = (n+1) \cdot 3^n.$$

Сделаем проверку, вычислив x_3 по нашей формуле и исходя из постановки задачи. Согласно полученной формуле $x_3 = 4 \cdot 3^3 = 108$. Исходя из постановки задачи, получаем такой же результат

$$x_3 = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (36 - 9) - 9 \cdot 6 = 162 - 54 = 108.$$

В рассмотренном примере корни характеристического уравнения оказались совпадающими, т.е. был один корень, равный 3, кратности 2. Если бы корни были разные, например, 3 и (–3), то *формула общего решения* была бы такая

$$x_n = a \cdot 3^n + b \cdot (-3)^n,$$

где коэффициенты a и b далее нужно было бы вычислить, исходя из начальных условий $x_1 = 6$, $x_2 = 27$.

Спасибо за внимание!