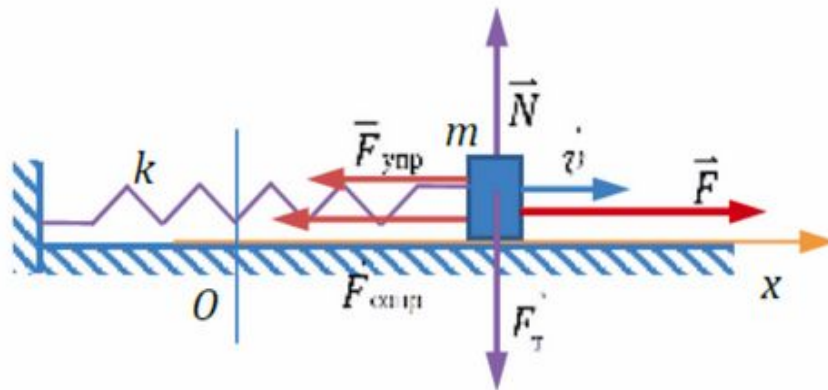


Вынужденные механические колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний



$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \Omega t$$

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}.$$

В проекции на ось x ●

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t,$$

так как $F_{\text{упр}x} = -kx$, $F_{\text{сопр}x} = -rv_x$. Получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t.$$

Обозначим $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{r}{m} = 2\beta$

$$\frac{F_0}{m} \equiv f_0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t);$$

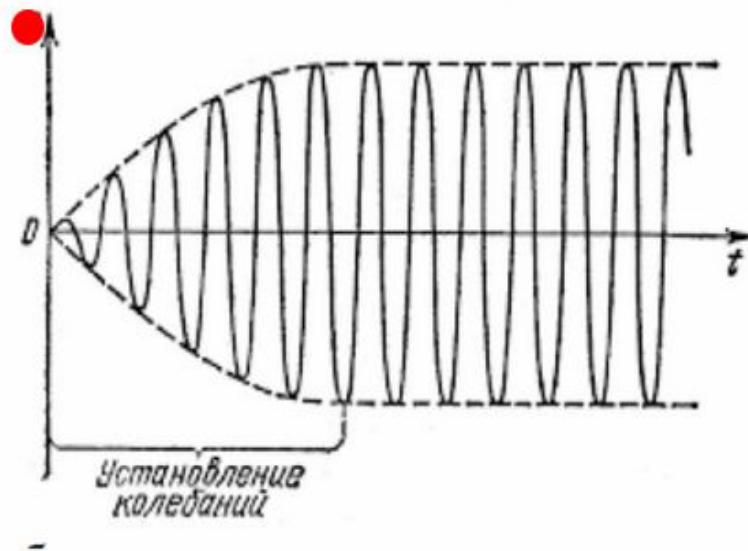
общее решение
ОДУ

частное решение
НДУ

$$x_1(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi);$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; A_1 и φ — постоянные интегрирования;



Общее решение $x_1(t)$ быстро затухает. В результате циклическая частота вынужденных колебаний будет равна циклической частоте Ω вынуждающей силы.

Производные функции $x_2(t)$

$$\frac{dx_2}{dt} = -A_2\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A_2\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Подставим эти производные в исходное дифференциальное уравнение

$$-\Omega^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta\Omega A_2 \sin(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) = f_0 \cos \Omega t .$$

Это равенство должно соблюдаться при любом t , в т. ч. тогда, когда $\cos(\Omega t + \varphi_0) = 0$ либо $\sin(\Omega t + \varphi_0) = 0$. Преобразуем правую часть уравнения

$$f_0 \cos \Omega t = f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_0) = f_0 [\cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \varphi_0 + \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin \varphi_0]$$

$$\begin{cases} -\Omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 = f_0 \cos \varphi_0, \\ -2\beta\Omega A_2 = f_0 \sin \varphi_0. \end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} .}$$

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы на φ_0 .

Найдём амплитуду A_2 вынужденных колебаний из первого уравнения системы

$$A_2 = \frac{f_0 \cos \varphi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2 \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}},$$

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$



Исследуем зависимость $A_2(\Omega)$. Значения функции на границах области определения

$$A_2(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad A_2(\infty) \rightarrow 0.$$

Условие экстремума

при $\Omega = 0$ функция $A_2(\Omega)$ имеет минимум, а при

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

— *резонансной циклической частоте* — максимум. Имеет место *резонанс* — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к резонансной циклической частоте.

Графики зависимостей $A_2(\Omega)$ — *резонансные кривые* — при разных коэффициентах затухания изображены на

Рисунке

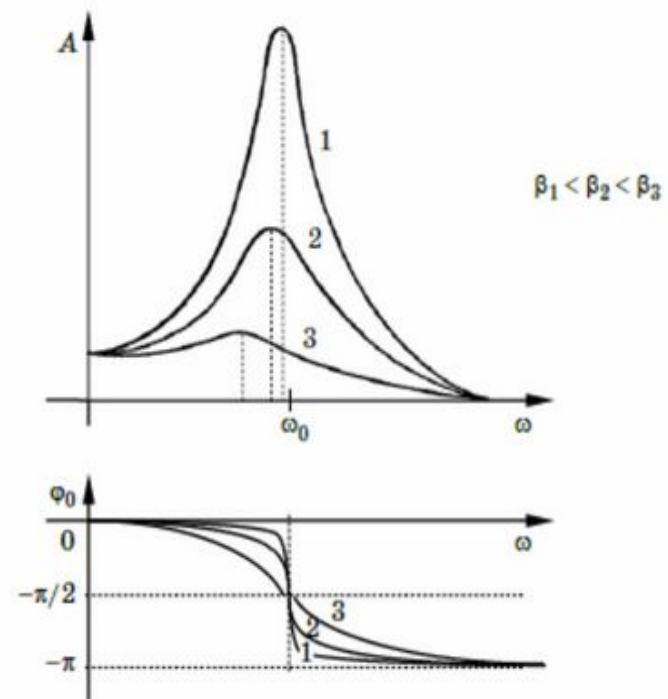
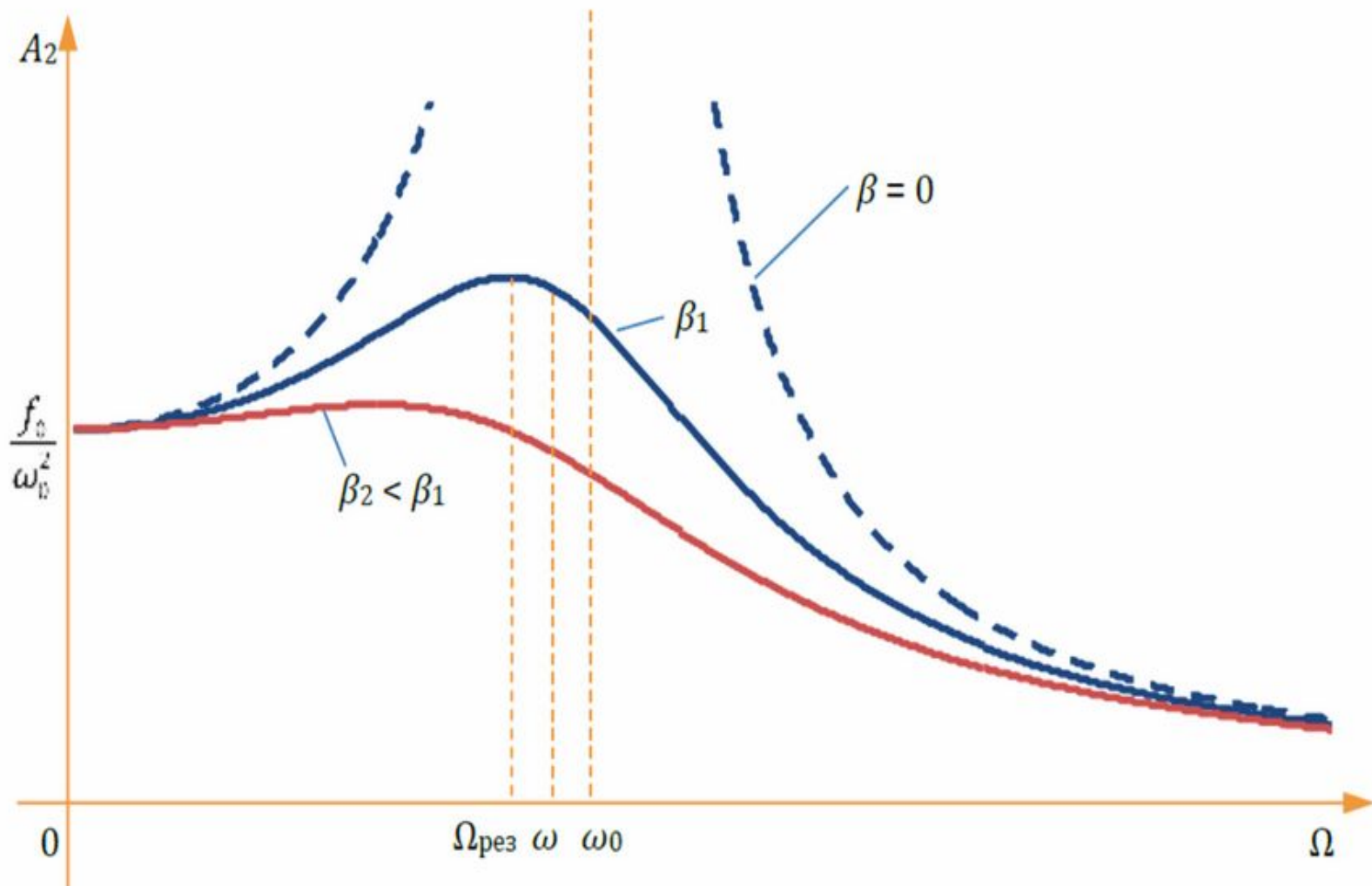


Рис. 47.4. Резонансные кривые



$$A_{\max} = \frac{f_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Функция $A(\omega)$ имеет максимум при частотах, близких к ω_0 , немного меньших ω_0 . Чем меньше коэффициент затухания β , тем острее выражен пик на зависимости.

В отсутствие трения амплитуда колебаний при резонансе стремилась бы к бесконечности, а резонансная частота равнялась бы ω_0 .

Волны

Основные определения. Уравнение бегущей волны

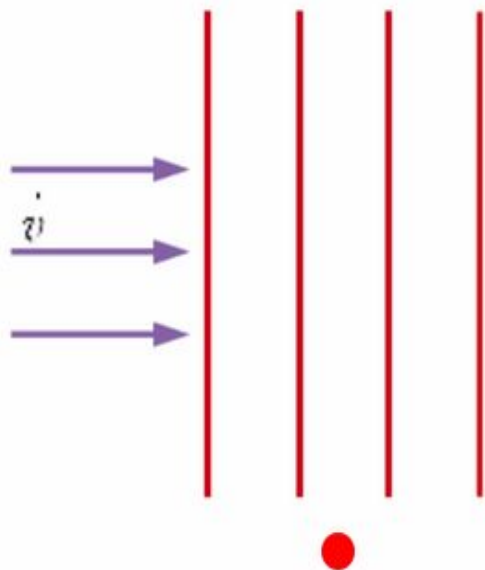
Волна — любое распространяющееся в пространстве возмущение, т. е. изменение какой-либо физической величины с течением времени.

Волновой фронт делит пространство на две области: внутреннюю — вовлеченную в волновой процесс и внешнюю — не вовлеченную.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени, называется *волновым фронтом*.

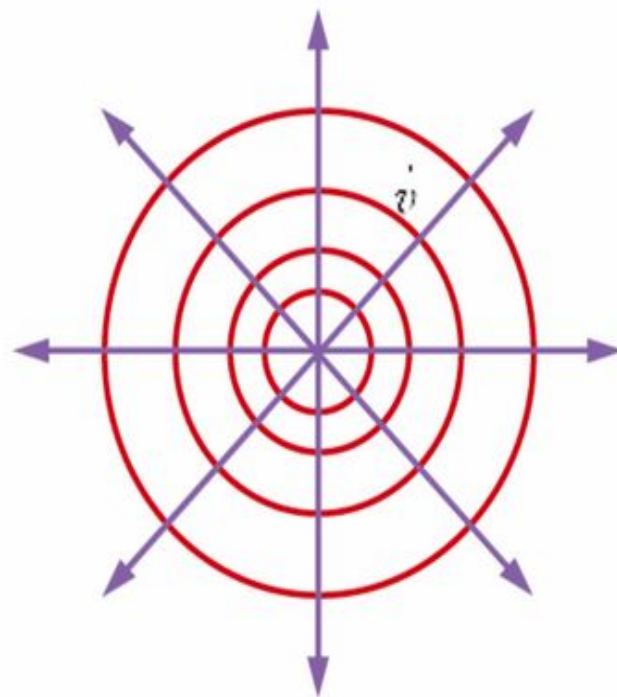
Геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновые поверхности неподвижны, а волновой фронт бежит со скоростью волны. В каждый момент времени волновой фронт совпадает с одной из волновых поверхностей.

Плоская волна



волновая поверхность — плоскость

Сферическая волна



волновая поверхность — сфера

Волны

продольные

колебания в направлении
распространения волны

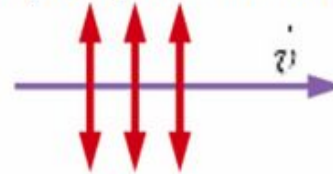


ПРИМЕРЫ

Звуковая волна

поперечные

колебания в направлении
перпендикулярном направлению
распространения волны



Электромагнитная волна

Волны на шнуре

Волны на поверхности жидкости

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся точки ξ как функцию ее координат x, y, z и времени t .

Пусть в точке 0 на оси x находится источник, который колеблется по закону:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (52.1)$$

Учтем, что $\omega = 2\pi/T$, $\lambda = vT$, и продолжим выкладки:

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{T v} + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi_0\right).$$

Введем *волновое число*:

$$k = 2\pi/\lambda \quad (52.2)$$

и запишем в окончательном виде:

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (52.3)$$

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega(t - \tau) + \varphi_0) = A \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right).$$

В трехмерном случае уравнение волны, бегущей в произвольном направлении, запишется в следующем виде:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0). \quad (52.4)$$

Характеристики гармонической волны

Скорость v

Начальная фаза φ_0

Циклическая частота ω

$$\text{Период } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Частота } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Амплитуда A — максимальное значение колеблющейся величины.

Длина волны — расстояние, которое волна проходит за время одного полного колебания:

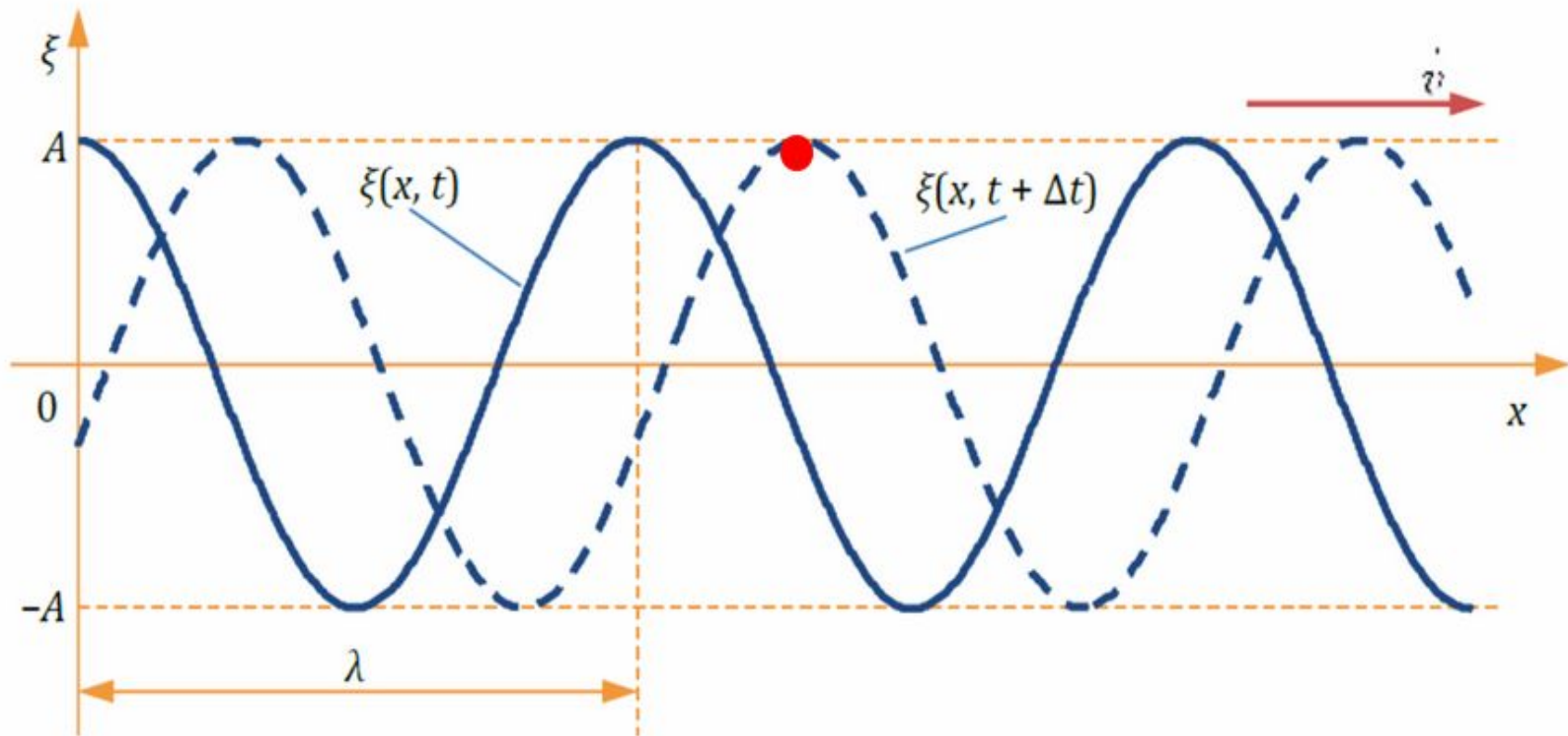
$$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}$$

Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v}, [k] = \text{м}^{-1}.$$

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

«Мгновенная фотография» гармонической волны



$$\varphi = \omega t - \kappa x + \varphi_0; \quad d\varphi = \omega dt - \kappa dx; \quad d\varphi = 0; \quad \omega dt = \kappa dx; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa}.$$

Получилось выражение для *фазовой скорости* волны, то есть для скорости, с которой перемещается зафиксированная фаза волны:

$$v = \frac{\omega}{\kappa}. \quad (52.5)$$

Здесь ω – циклическая частота колебаний; κ – волновое число.

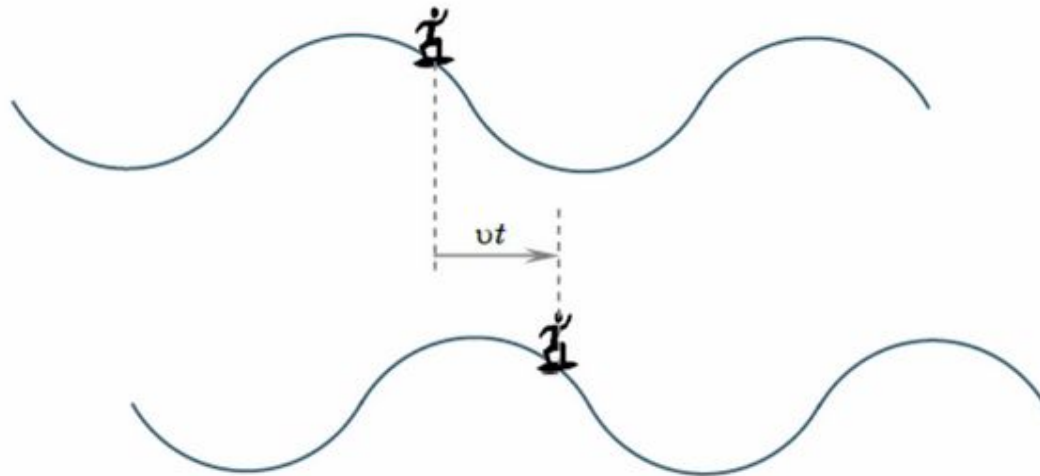


Рис. 52.1. Перемещение серфингиста с постоянной фазой волны

При выводе формулы $\xi = A \cos(\omega t - kx)$ предполагалось, что амплитуда колебаний A не зависит от x . Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в среде, поглощающей энергию, интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается, т.е. наблюдается затухание волны. Опыт показывает, что в однородной среде такое затухание происходит по экспоненциальному закону

$$A = A_0 \exp(-\gamma x),$$

где γ - линейный коэффициент поглощения упругих волн, зависящий от свойств среды и частоты волны; A_0 - амплитуда в точках плоскости $x=0$.

Соответственно, уравнение плоской волны тогда имеет следующий вид:

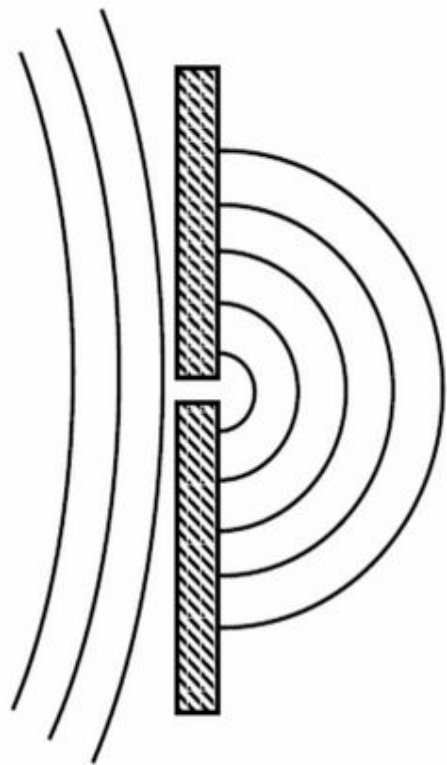
$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx),$$

а при наличии начальной фазы колебаний φ

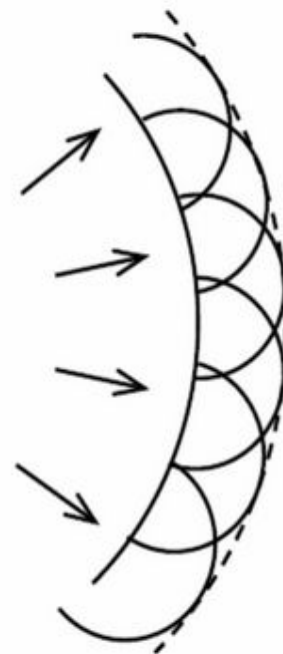
$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Следует обратить внимание на то, что волновое число – это вектор (волновой вектор), направление которого совпадает с направлением нормали к волновой

поверхности: $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$, где \vec{n} – нормаль к волновой поверхности.



*Рис. 51.1. Малое отверстие
в преграде – источник
сферических волн*



*Рис. 51.2. Построение нового
фронта волны по принципу
Гюйгенса*

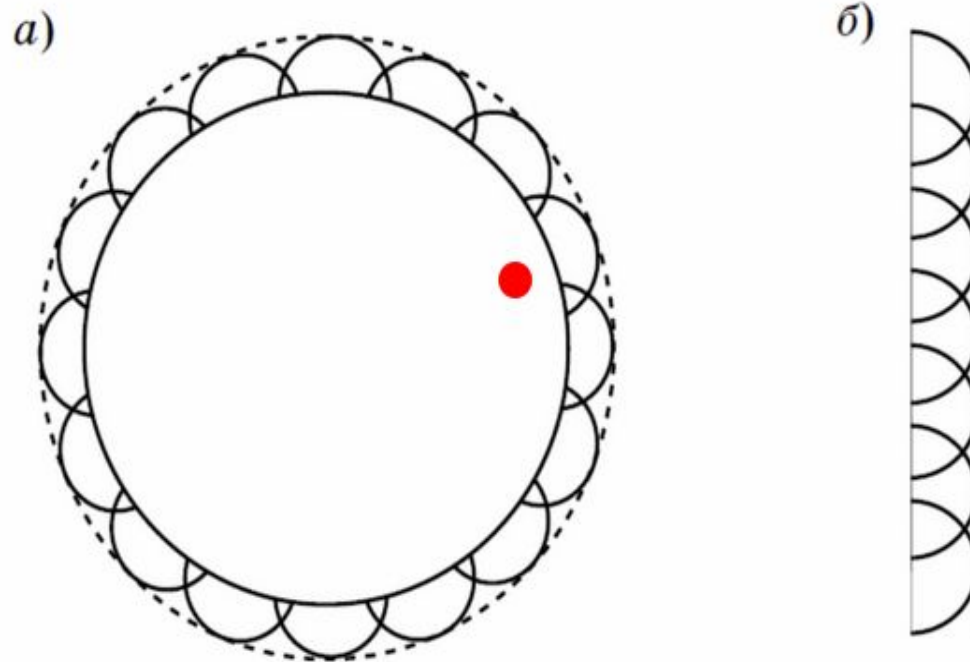
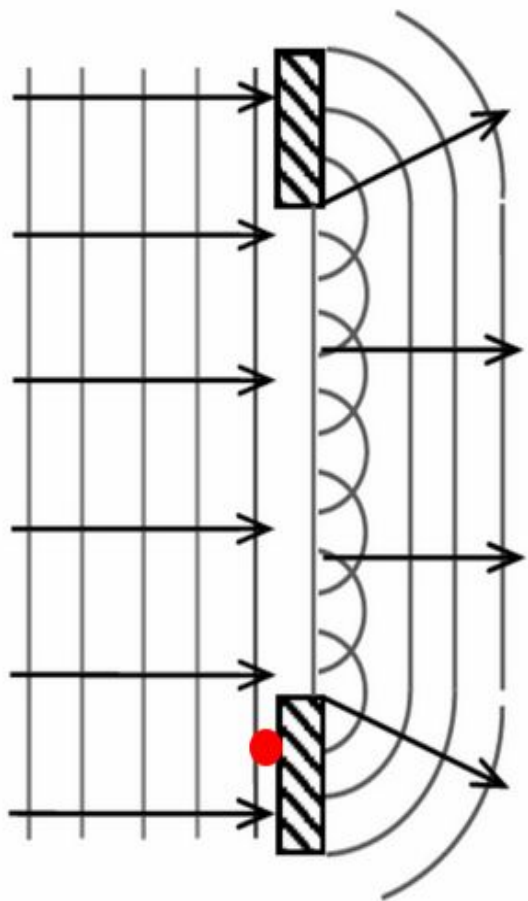
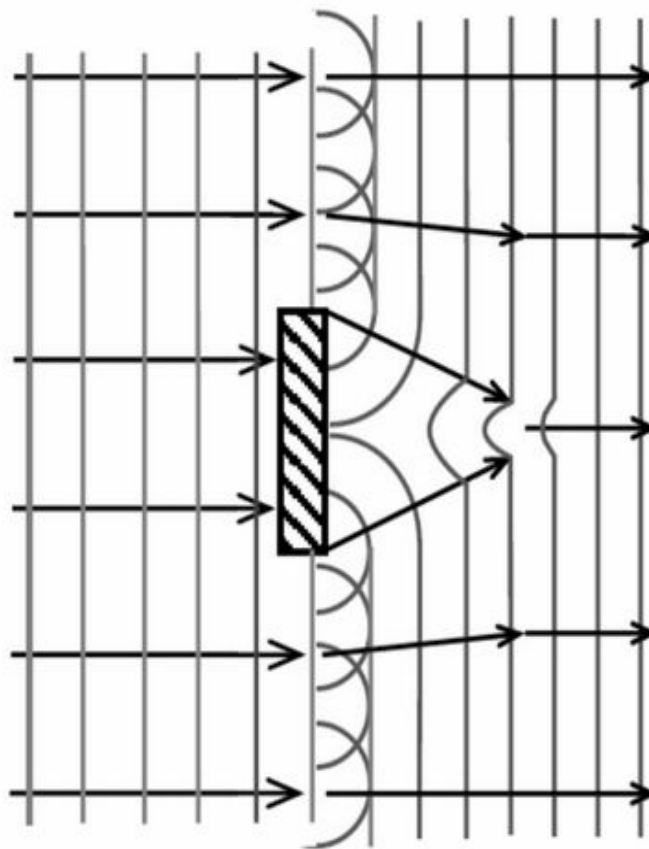


Рис. 51.3. Построения Гюйгенса для сферической (а) и плоской (б) волн



*Рис. 51.4. Дифракция волн на
отверстии*



*Рис. 51.5. Огибание волнами
препятствия*