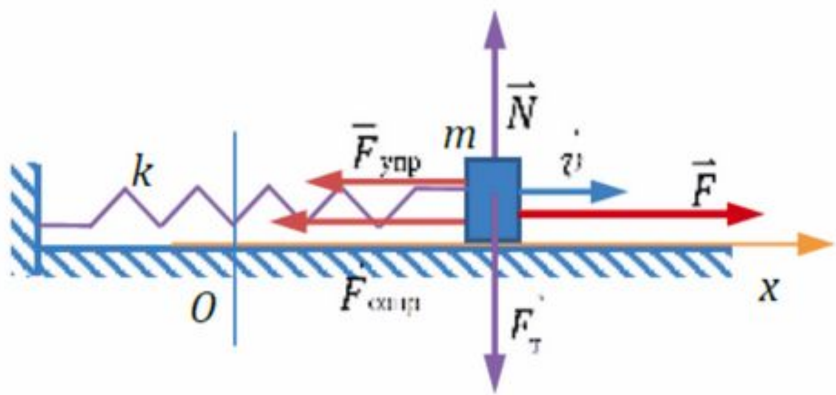
Вынужденные механические колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний



$$\vec{F} = \vec{F_0}\cos\Omega t$$

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = \vec{F}_\text{т} + \vec{N} + \vec{F}_\text{упр} + \vec{F}_\text{сопр} + \vec{F}.$$

В проекции на ось x

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\Omega t,$$

так как $F_{\text{упр}\,x} = -kx$, $F_{\text{сопр}\,x} = -rv_x$. Получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t.$$

Обозначим $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$, $\dfrac{r}{m} = 2\beta$

$$\frac{F_0}{m} \equiv f_0;$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\Omega t}$$

дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний.

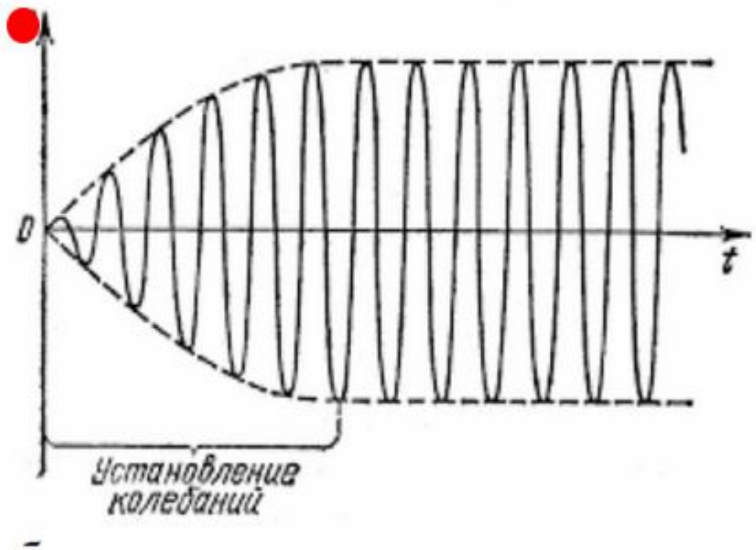
$$x(t)=x_1(t)+x_2(t);$$

общее решение ОДУ — $x_1(t)$; частное решение НДУ — $x_2(t)$

$$x_1(t)=A_1e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi);$$

$$x_2(t)=A_2\cos(\Omega t+\varphi_0).$$

Здесь $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$; A_1 и φ — постоянные интегрирования;



Общее решение $x_1(t)$ быстро затухает. В результате циклическая частота вынужденных колебаний будет равна циклической частоте Ω вынуждающей силы.

Производные функции $x_2(t)$

$$\frac{dx_2}{dt} = -A_2\Omega\sin(\Omega t + \varphi_0),\ \frac{d^2x}{dt^2} = -A_2\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Подставим эти производные в исходное дифференциальное уравнение

$$-\Omega^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta\Omega A_2 \sin(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) = f_0 \cos\Omega t\,.$$

Это равенство должно соблюдаться при любом t, в т. ч. тогда, когда $\cos(\Omega t + \varphi_0) = 0$ либо $\sin(\Omega t + \varphi_0) = 0$. Преобразуем правую часть уравнения

$$f_0 \cos\Omega t = f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_0) = f_0 \left[\cos(\Omega t + \varphi_0)\cos\varphi_0 + \sin(\Omega t + \varphi_0)\sin\varphi_0\right]$$

$$\begin{cases} -\Omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 = f_0 \cos\varphi_0, \\ -2\beta\Omega A_2 = f_0 \sin\varphi_0. \end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}.$$

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы на φ_0.

Найдём амплитуду A_2 вынужденных колебаний из первого уравнения системы

$$A_2 = \frac{f_0 \cos\varphi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2\Omega^2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2}}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$\boxed{A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}}$$

Исследуем зависимость $A_2(\Omega)$. Значения функции на границах области определения

$$A_2(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2},\ A_2(\infty) \to 0.$$

Условие экстремума

при $\Omega = 0$ функция $A_2(\Omega)$ имеет минимум, а при

$$\boxed{\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

— ***резонансной циклической частоте*** — максимум. Имеет место ***резонанс*** — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к резонансной циклической частоте.

Графики зависимостей $A_2(\Omega)$ — ***резонансные кривые*** — при разных коэффициентах затухания изображены на

Рисунке

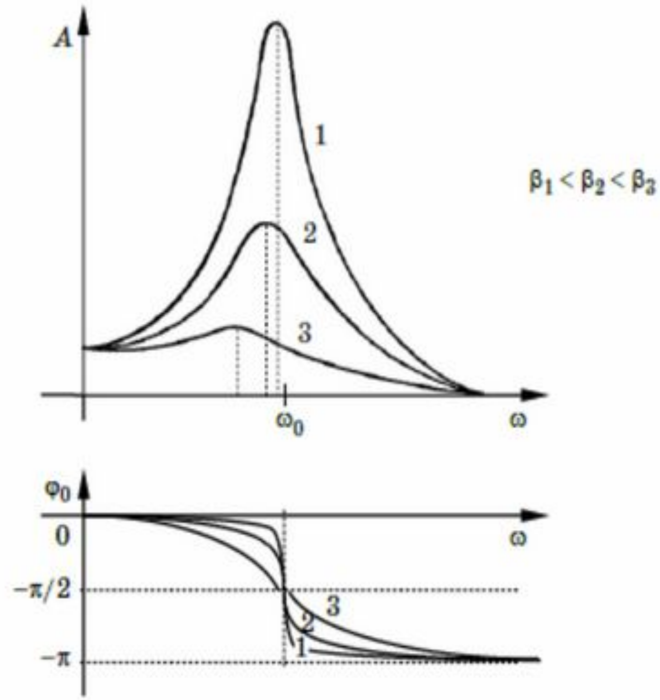
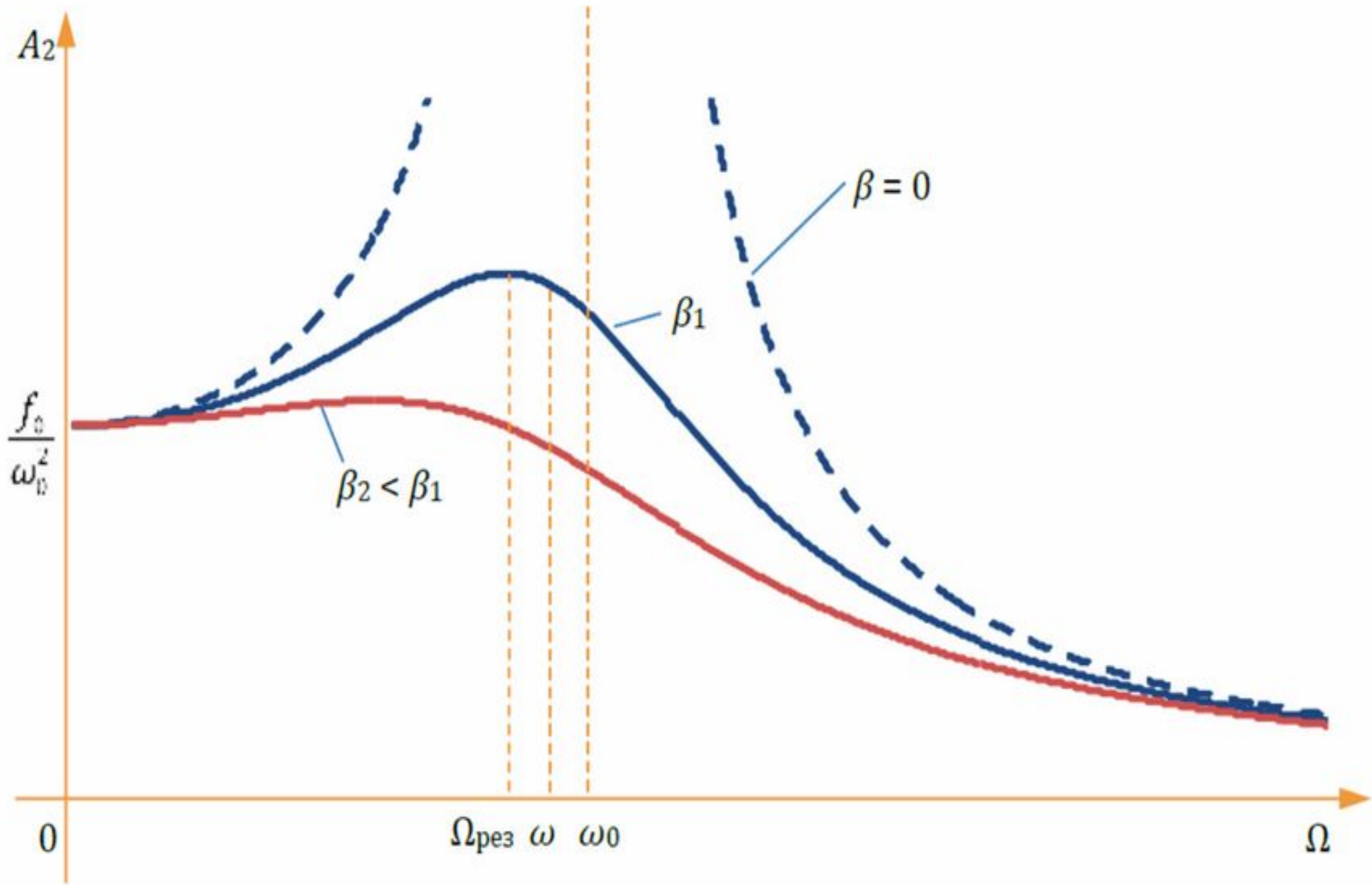


Рис. 47.4. Резонансные кривые



A_2
$\beta = 0$
β_1
$\frac{f_0}{\omega_0^2}$
$\beta_2 < \beta_1$
0
$\Omega_{рез}$ ω ω_0
Ω

$$A_{max} = \frac{f_o/m}{2\beta\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}.$$

Функция A (ω) имеет максимум при частотах, близких к ω_o, немного меньших ω_o. Чем меньше коэффициент затухания β, тем острее выражен пик на зависимости.

В отсутствие трения амплитуда колебаний при резонансе стремилась бы к бесконечности, а резонансная частота равнялась бы ω_o.

Волны

Основные определения. Уравнение бегущей волны

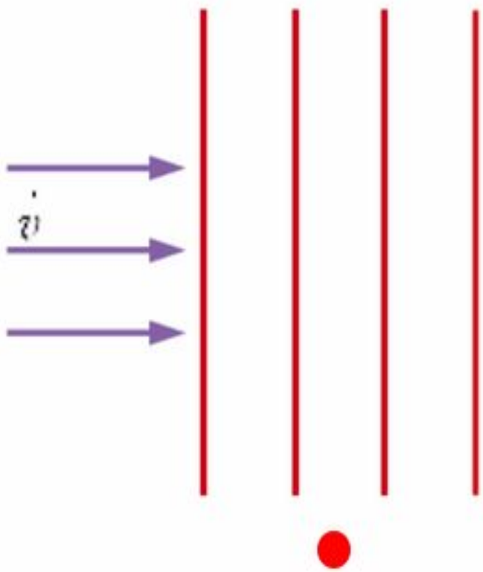
Волна — любое распространяющееся в пространстве возмущение, т. е. изменение какой-либо физической величины с течением времени.

> Волновой фронт делит пространство на две области: внутреннюю – вовлеченную в волновой процесс и внешнюю – не вовлеченную.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени, называется *волновым фронтом*.

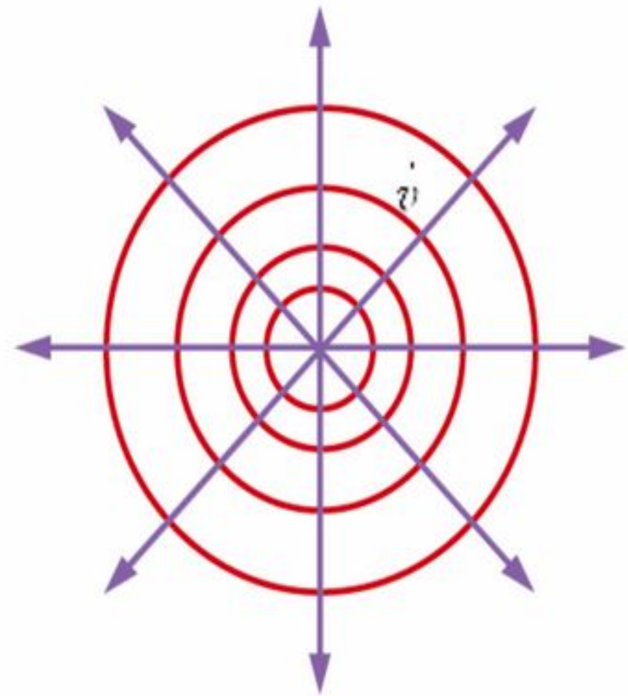
Геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновые поверхности неподвижны, а волновой фронт бежит со скоростью волны. В каждый момент времени волновой фронт совпадает с одной из волновых поверхностей.

Плоская волна



волновая поверхность — плоскость

Сферическая волна

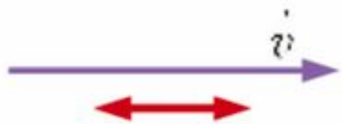


волновая поверхность — сфера

Волны

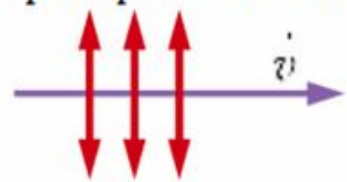
продольные

колебания в направлении
распространения волны



поперечные

колебания в направлении
перпендикулярном направлению
распространения волны



Примеры

Звуковая волна

Электромагнитная волна

Волны на шнуре

Волны на поверхности жидкости

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся точки ξ как функцию ее координат x, y, z и времени t.

Пусть в точке 0 на оси x находится источник, который колеблется по закону:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_o). \qquad (52.1)$$

Учтем, что $\omega = 2\pi/T, \lambda = \upsilon T$, и продолжим выкладки:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{T\upsilon} + \varphi_o\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi_o\right).$$

Введем *волновое число*:

$$\kappa = 2\pi/\lambda \qquad (52.2)$$

и запишем в окончательном виде:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - \kappa x + \varphi_o). \qquad (52.3)$$

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega(t-\tau) + \varphi_o) = A \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_o\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{\upsilon} + \varphi_o\right).$$

В трехмерном случае уравнение волны, бегущей в произвольном направлении, запишется в следующем виде:

$$\xi(\vec{r},t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \varphi_o\right). \tag{52.4}$$

Характеристики гармонической волны

Скорость v

Начальная фаза φ_0

Циклическая частота ω

Период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Частота $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$

Амплитуда A — максимальное значение колеблющейся величины.

Длина волны — расстояние, которое волна проходит за время одного полного колебания:

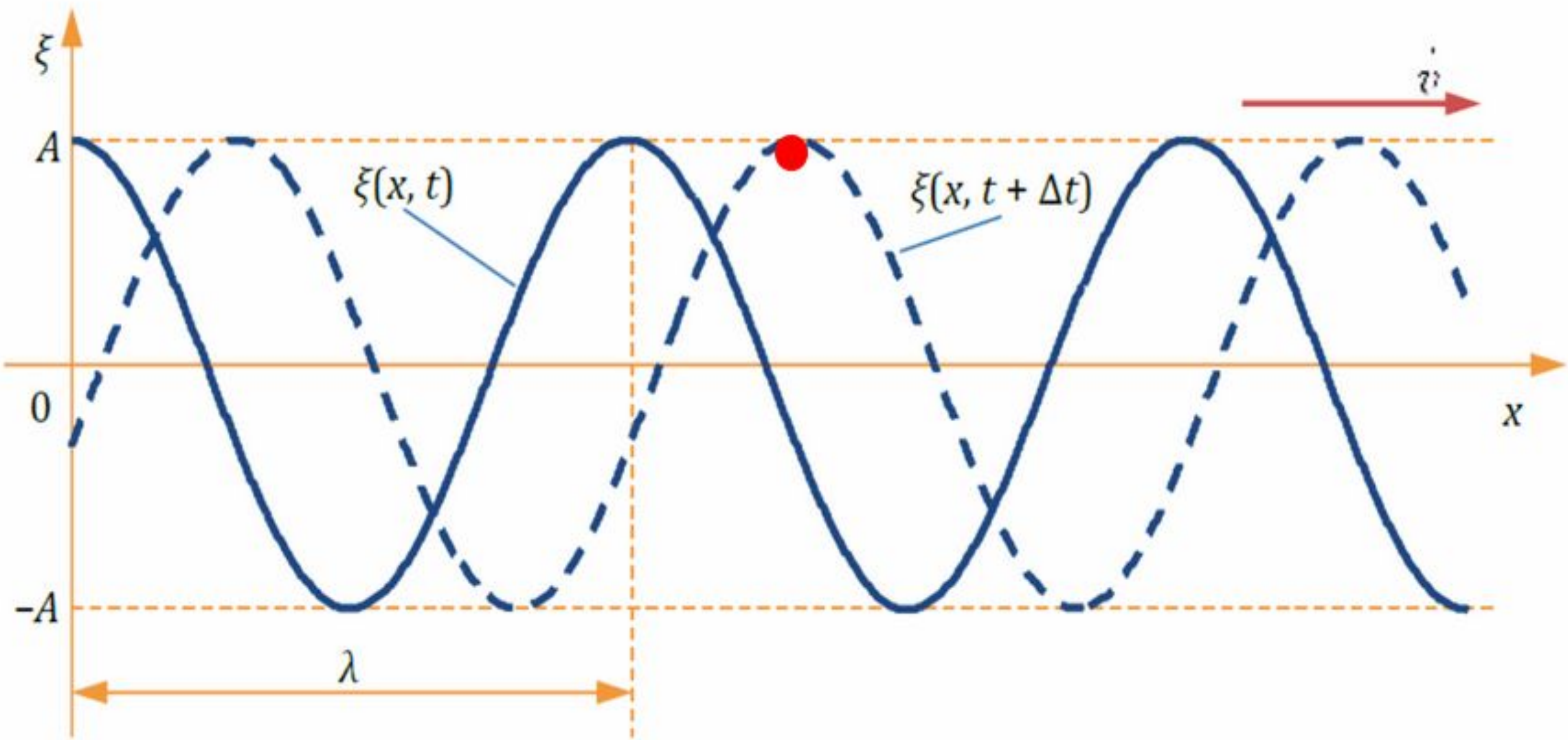
$$\boxed{\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}}.$$

Волновое число

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v}},\ [k] = \text{м}^{-1}.$$

$$\boxed{\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)}.$$

«Мгновенная фотография» гармонической волны



$$\varphi = \omega t - \kappa x + \varphi_0; \quad d\varphi = \omega dt - \kappa dx; \quad d\varphi = 0; \quad \omega dt = \kappa dx; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa}.$$

Получилось выражение для *фазовой скорости* волны, то есть для скорости, с которой перемещается зафиксированная фаза волны:

$$\upsilon = \frac{\omega}{\kappa}. \qquad (52.5)$$

Здесь ω – циклическая частота колебаний; κ – волновое число.

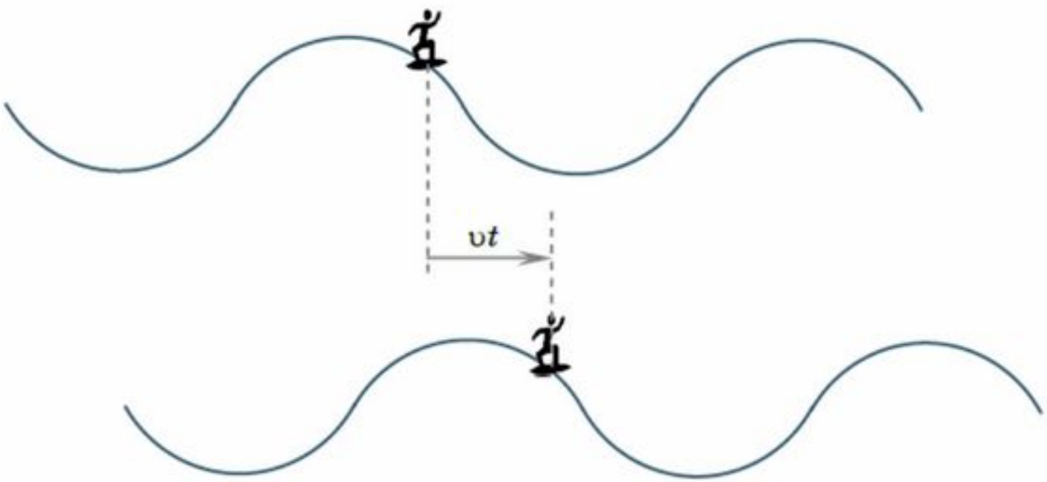


Рис. 52.1. Перемещение серфингиста с постоянной фазой волны

При выводе формулы $\xi = A\cos(\omega t - kx)$ предполагалось, что амплитуда колебаний A не зависит от x. Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в среде, поглощающей энергию, интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается, т.е. наблюдается затухание волны. Опыт показывает, что в однородной среде такое затухание происходит по экспоненциальному закону

$$A = A_0 \exp(-\gamma x),$$

где γ- линейный коэффициент поглощения упругих волн, зависящий от свойств среды и частоты волны; A_0- амплитуда в точках плоскости x=0.

Соответственно, уравнение плоской волны тогда имеет следующий вид:

$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x)\cos(\omega t - kx),$$

а при наличии начальной фазы колебаний φ

$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x)\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Следует обратить внимание на то, что волновое число – это вектор (волновой вектор), направление которого совпадает с направлением нормали к волновой поверхности: $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$, где $\vec{n}$ – нормаль к волновой поверхности.

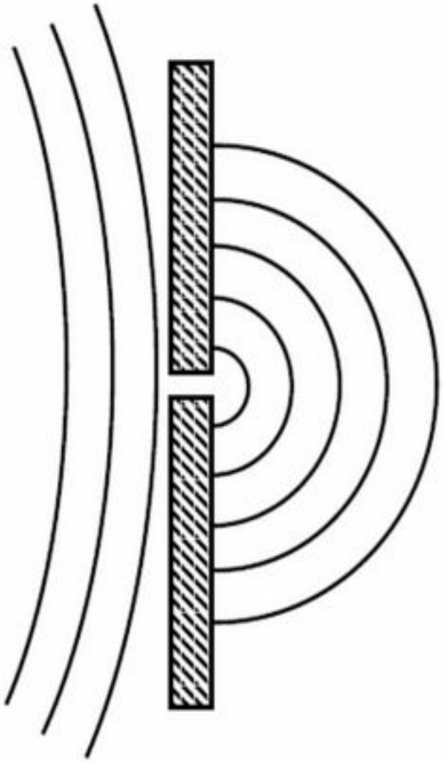


Рис. 51.1. Малое отверстие в преграде – источник сферических волн

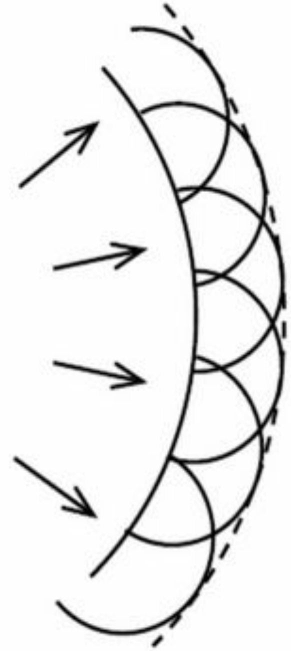


Рис. 51.2. Построение нового фронта волны по принципу Гюйгенса

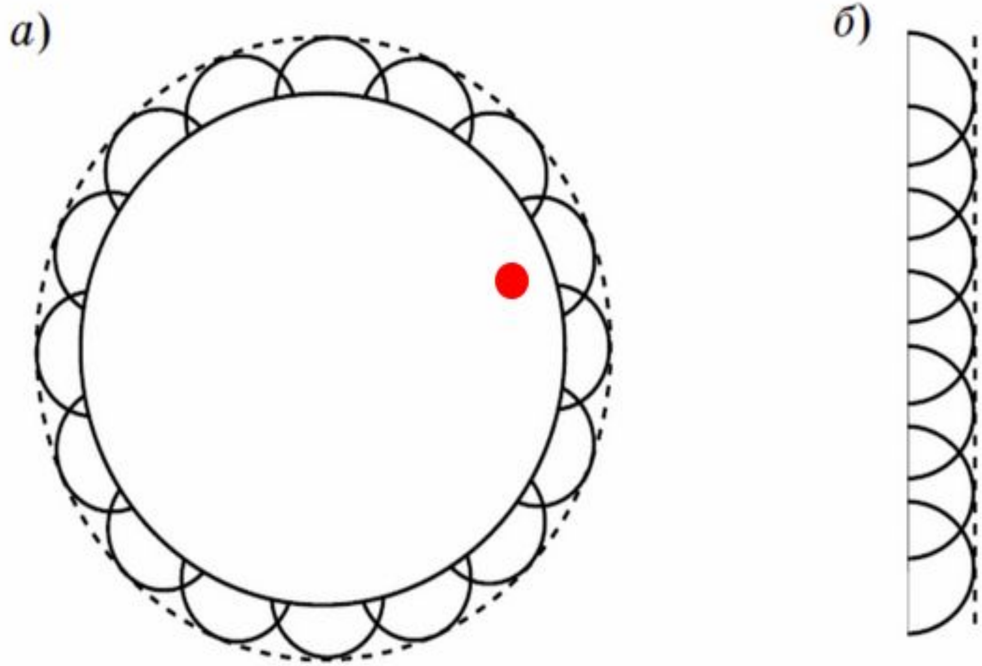


Рис. 51.3. Построения Гюйгенса для сферической (а) и плоской (б) волн

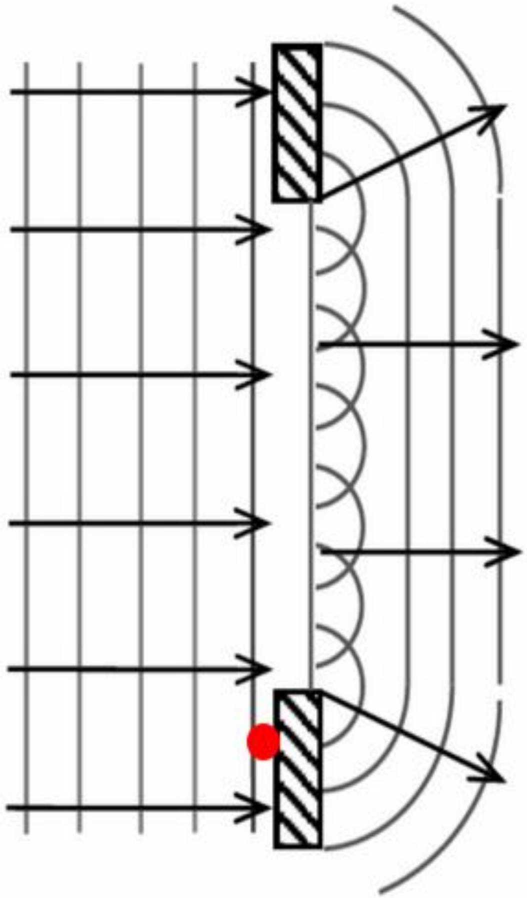


Рис. 51.4. Дифракция волн на отверстии

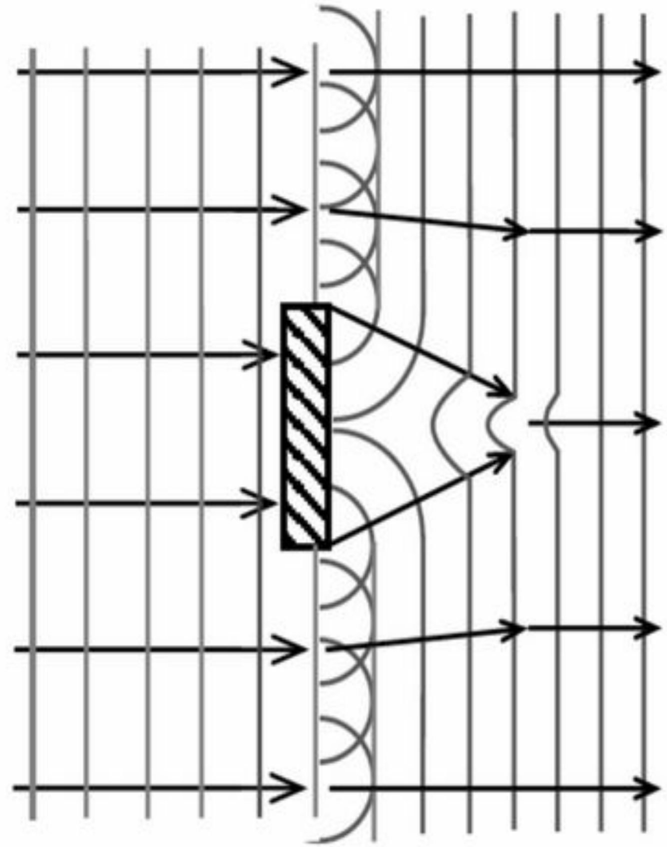


Рис. 51.5. Огибание волнами препятствия