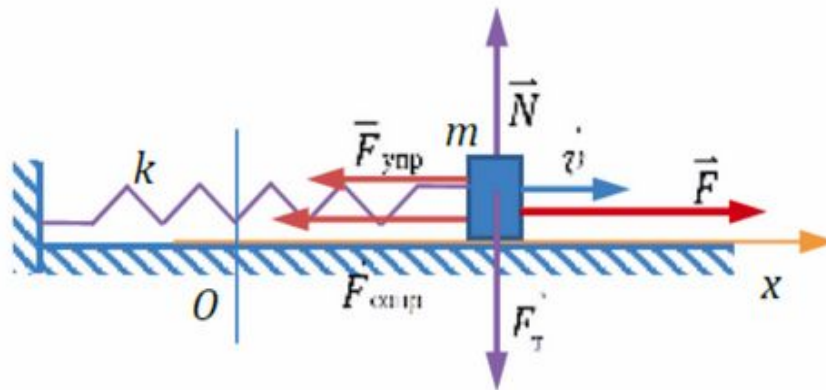


Вынужденные механические колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний



$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \Omega t$$

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}.$$

В проекции на ось  $x$  ●

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t,$$

так как  $F_{\text{упр}x} = -kx$ ,  $F_{\text{сопр}x} = -rv_x$ . Получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t.$$

Обозначим  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{r}{m} = 2\beta$

$$\frac{F_0}{m} \equiv f_0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

*дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний.*

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t);$$

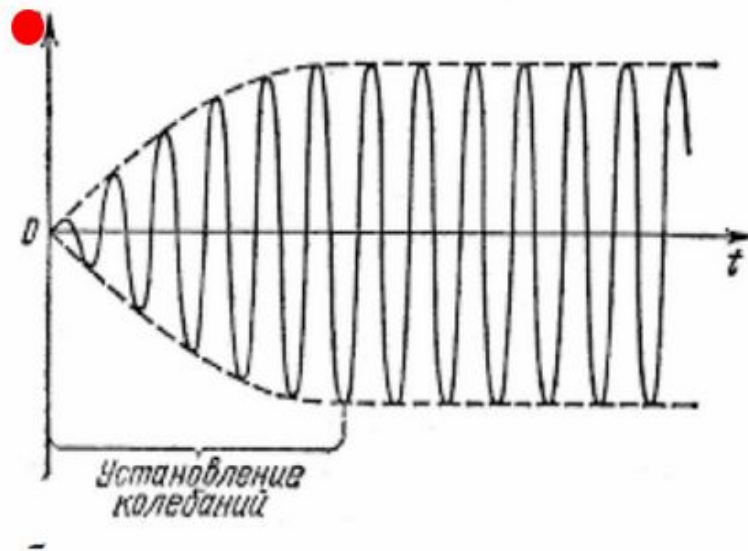
общее решение  
ОДУ

частное решение  
НДУ

$$x_1(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi);$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ;  $A_1$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования;



Общее решение  $x_1(t)$  быстро затухает. В результате циклическая частота вынужденных колебаний будет равна циклической частоте  $\Omega$  вынуждающей силы.

Производные функции  $x_2(t)$

$$\frac{dx_2}{dt} = -A_2\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A_2\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Подставим эти производные в исходное дифференциальное уравнение

$$-\Omega^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta\Omega A_2 \sin(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) = f_0 \cos \Omega t .$$

Это равенство должно соблюдаться при любом  $t$ , в т. ч. тогда, когда  $\cos(\Omega t + \varphi_0) = 0$  либо  $\sin(\Omega t + \varphi_0) = 0$ . Преобразуем правую часть уравнения

$$f_0 \cos \Omega t = f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_0) = f_0 [\cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \varphi_0 + \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin \varphi_0]$$

$$\begin{cases} -\Omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 = f_0 \cos \varphi_0, \\ -2\beta\Omega A_2 = f_0 \sin \varphi_0. \end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} .}$$

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы на  $\varphi_0$ .

Найдём амплитуду  $A_2$  вынужденных колебаний из первого уравнения системы

$$A_2 = \frac{f_0 \cos \varphi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2 \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}},$$

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$



Исследуем зависимость  $A_2(\Omega)$ . Значения функции на границах области определения

$$A_2(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad A_2(\infty) \rightarrow 0.$$

Условие экстремума

при  $\Omega = 0$  функция  $A_2(\Omega)$  имеет минимум, а при

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

— *резонансной циклической частоте* — максимум. Имеет место *резонанс* — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к резонансной циклической частоте.

Графики зависимостей  $A_2(\Omega)$  — *резонансные кривые* — при разных коэффициентах затухания изображены на

Рисунке

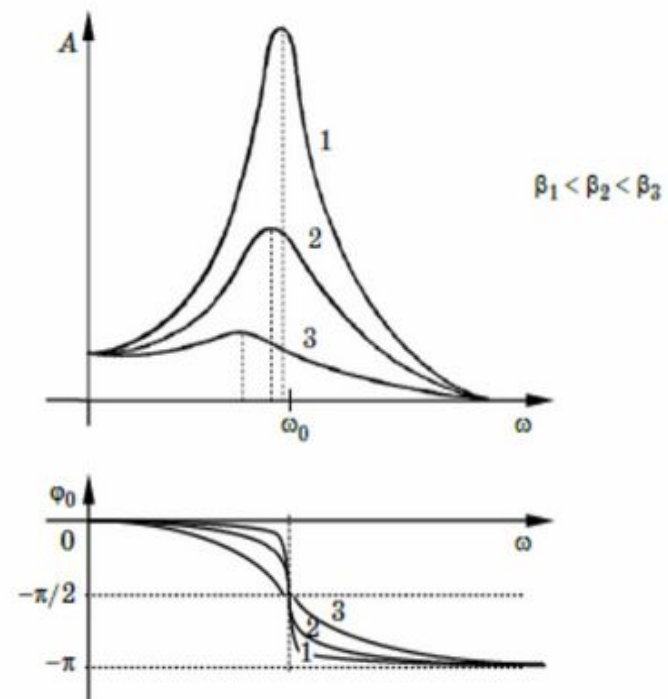
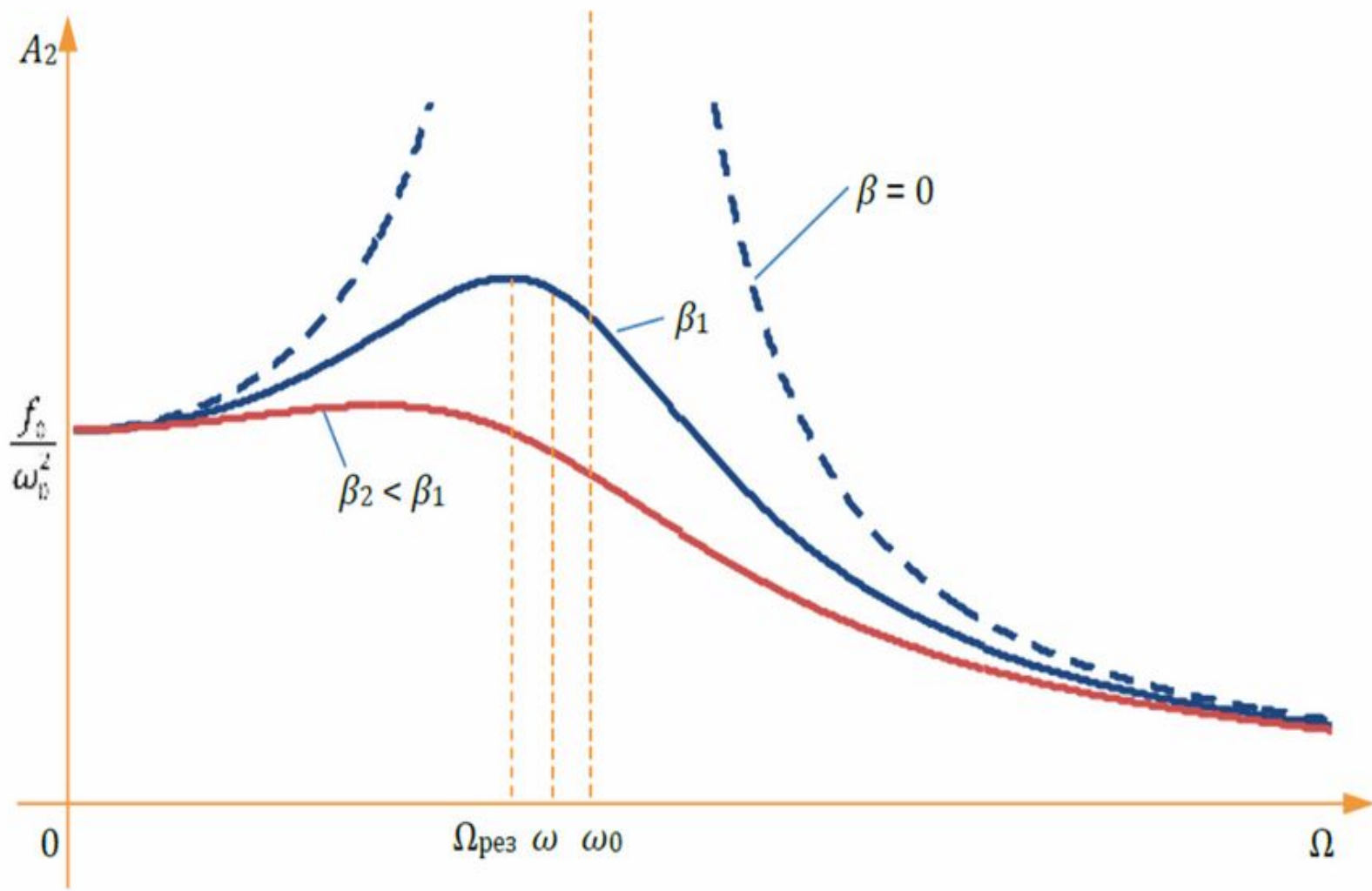


Рис. 47.4. Резонансные кривые





$$A_{\max} = \frac{f_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Функция  $A(\omega)$  имеет максимум при частотах, близких к  $\omega_0$ , немного меньших  $\omega_0$ . Чем меньше коэффициент затухания  $\beta$ , тем острее выражен пик на зависимости.

В отсутствие трения амплитуда колебаний при резонансе стремилась бы к бесконечности, а резонансная частота равнялась бы  $\omega_0$ .

## Волны

### Основные определения. Уравнение бегущей волны

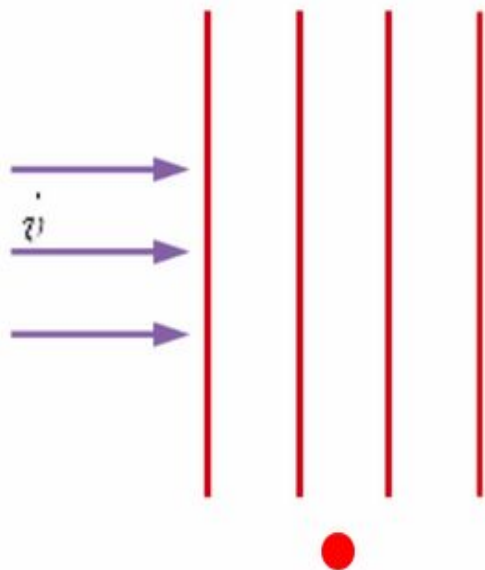
**Волна** — любое распространяющееся в пространстве возмущение, т. е. изменение какой-либо физической величины с течением времени.

Волновой фронт делит пространство на две области: внутреннюю — вовлеченную в волновой процесс и внешнюю — не вовлеченную.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени, называется *волновым фронтом*.

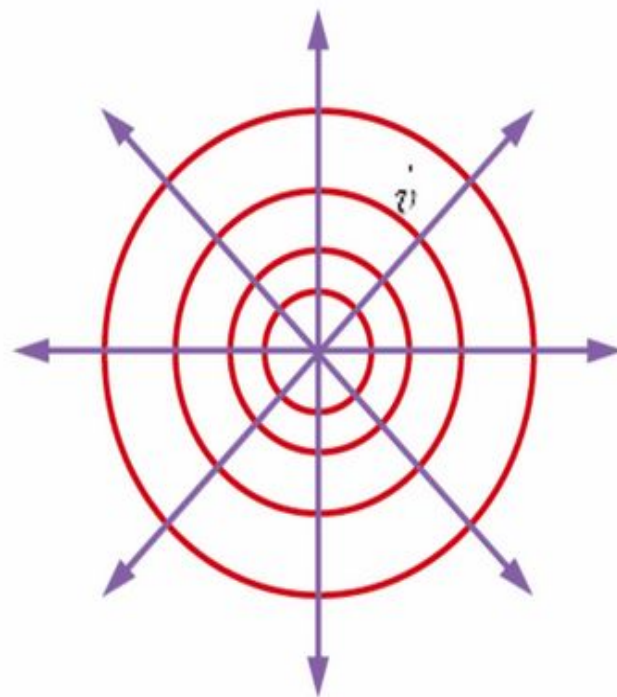
Геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновые поверхности неподвижны, а волновой фронт бежит со скоростью волны. В каждый момент времени волновой фронт совпадает с одной из волновых поверхностей.

*Плоская волна*



волновая поверхность — плоскость

*Сферическая волна*



волновая поверхность — сфера

# Волны

## *продольные*

колебания в направлении  
распространения волны

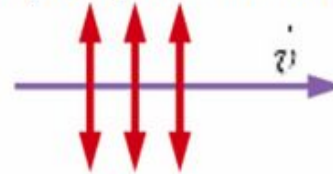


### ПРИМЕРЫ

Звуковая волна

## *поперечные*

колебания в направлении  
перпендикулярном направлению  
распространения волны



Электромагнитная волна

Волны на шнуре

Волны на поверхности жидкости

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся точки  $\xi$  как функцию ее координат  $x, y, z$  и времени  $t$ .

Пусть в точке  $0$  на оси  $x$  находится источник, который колеблется по закону:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (52.1)$$

Учтем, что  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\lambda = vT$ , и продолжим выкладки:

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{T v} + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi_0\right).$$

Введем *волновое число*:

$$k = 2\pi/\lambda \quad (52.2)$$

и запишем в окончательном виде:

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (52.3)$$

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega(t - \tau) + \varphi_0) = A \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right).$$

В трехмерном случае уравнение волны, бегущей в произвольном направлении, запишется в следующем виде:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0). \quad (52.4)$$



## Характеристики гармонической волны

Скорость  $v$

Начальная фаза  $\varphi_0$

Циклическая частота  $\omega$

$$\text{Период } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Частота } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Амплитуда  $A$  — максимальное значение колеблющейся величины.

**Длина волны** — расстояние, которое волна проходит за время одного полного колебания:

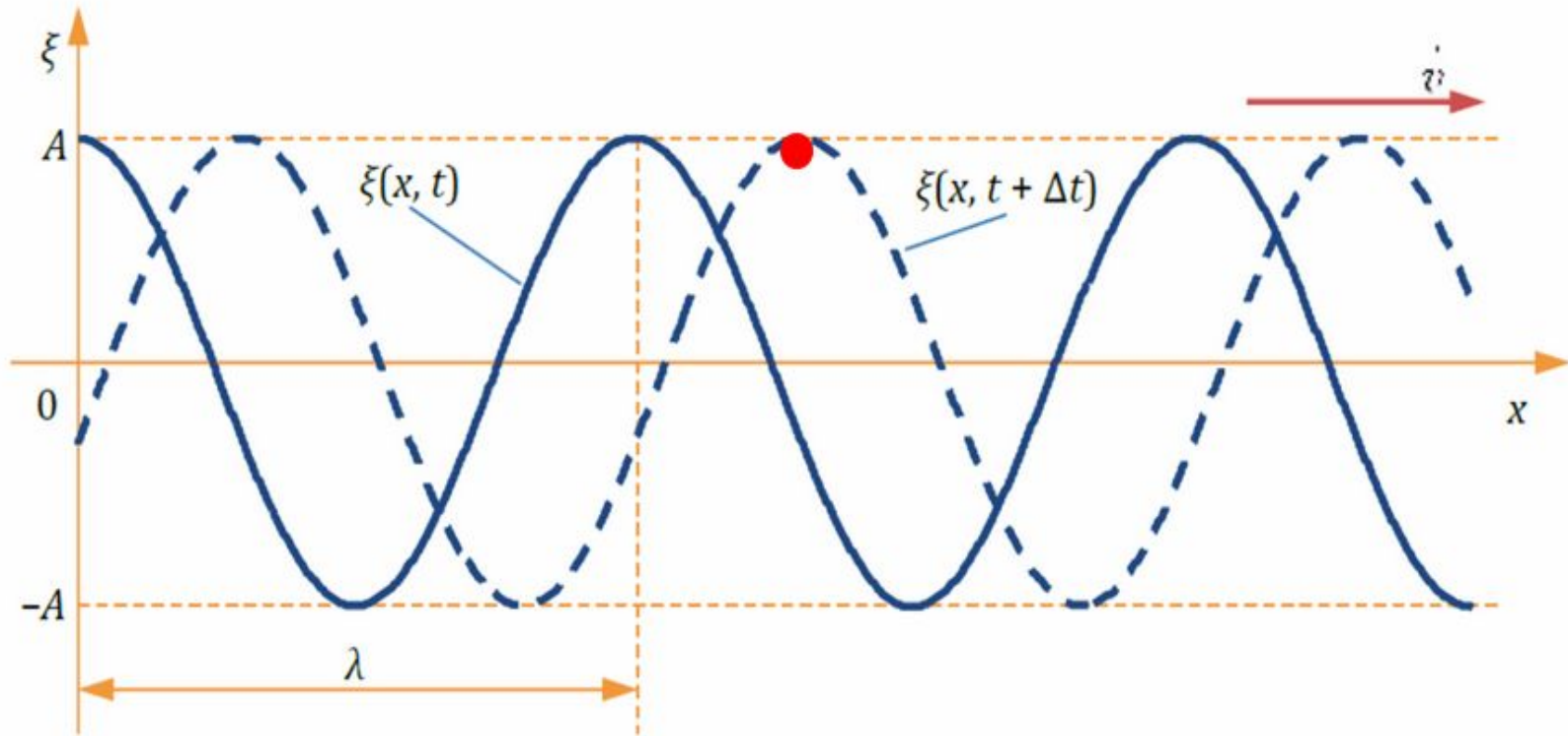
$$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}$$

**Волновое число**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v}, [k] = \text{м}^{-1}$$

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

«Мгновенная фотография» гармонической волны



$$\varphi = \omega t - \kappa x + \varphi_0; \quad d\varphi = \omega dt - \kappa dx; \quad d\varphi = 0; \quad \omega dt = \kappa dx; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa}.$$

Получилось выражение для *фазовой скорости* волны, то есть для скорости, с которой перемещается зафиксированная фаза волны:

$$v = \frac{\omega}{\kappa}. \quad (52.5)$$

Здесь  $\omega$  – циклическая частота колебаний;  $\kappa$  – волновое число.

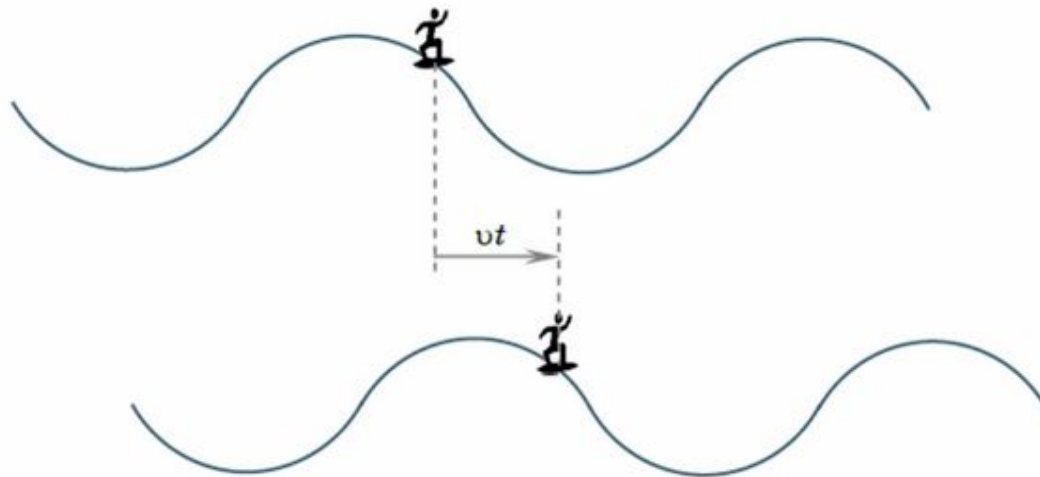


Рис. 52.1. Перемещение серфингиста с постоянной фазой волны

При выводе формулы  $\xi = A \cos(\omega t - kx)$  предполагалось, что амплитуда колебаний  $A$  не зависит от  $x$ . Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в среде, поглощающей энергию, интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается, т.е. наблюдается затухание волны. Опыт показывает, что в однородной среде такое затухание происходит по экспоненциальному закону

$$A = A_0 \exp(-\gamma x),$$

где  $\gamma$ - линейный коэффициент поглощения упругих волн, зависящий от свойств среды и частоты волны;  $A_0$ - амплитуда в точках плоскости  $x=0$ .

Соответственно, уравнение плоской волны тогда имеет следующий вид:

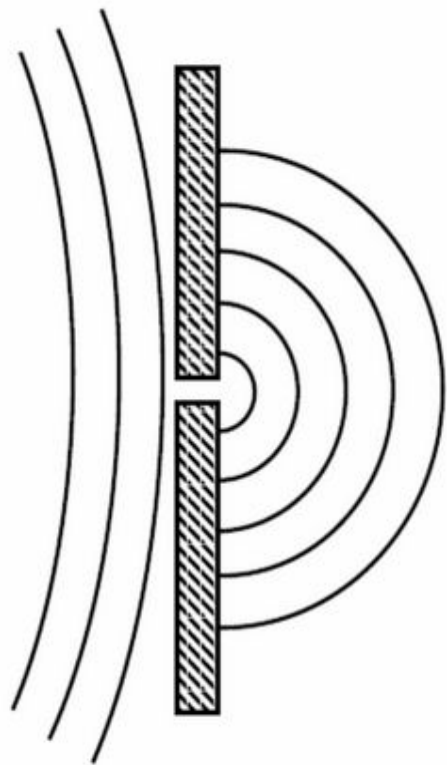
$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx),$$

а при наличии начальной фазы колебаний  $\varphi$

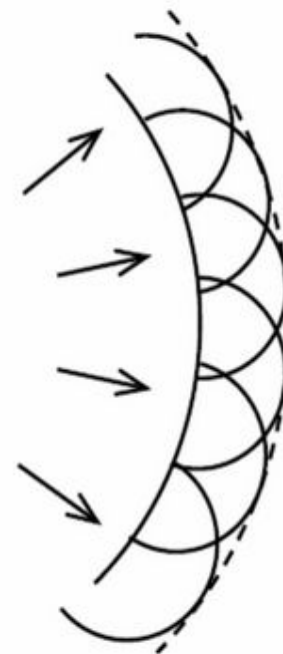
$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Следует обратить внимание на то, что волновое число – это вектор (волновой вектор), направление которого совпадает с направлением нормали к волновой

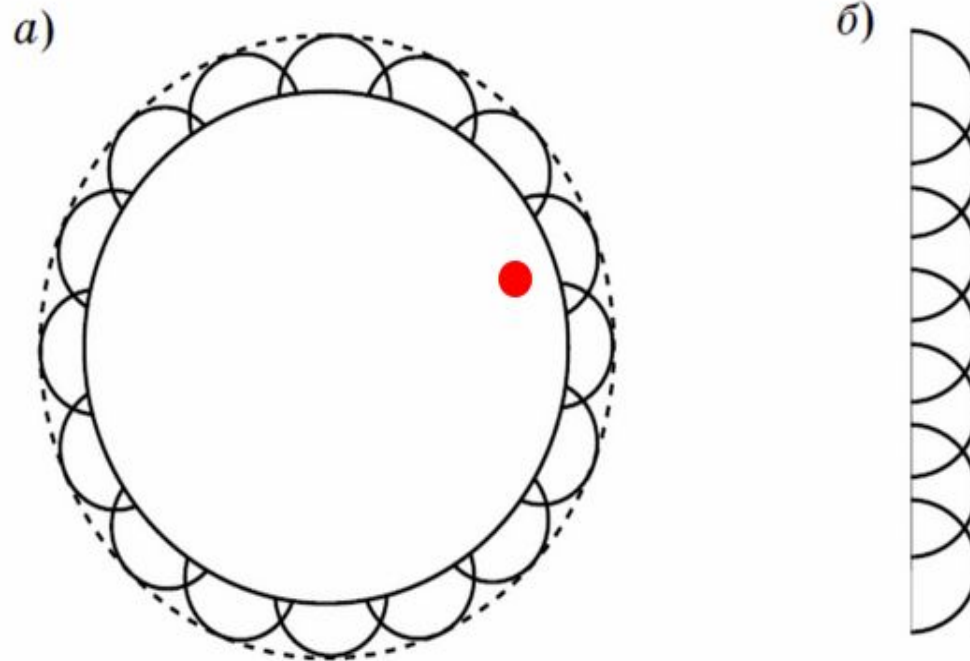
поверхности:  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – нормаль к волновой поверхности.



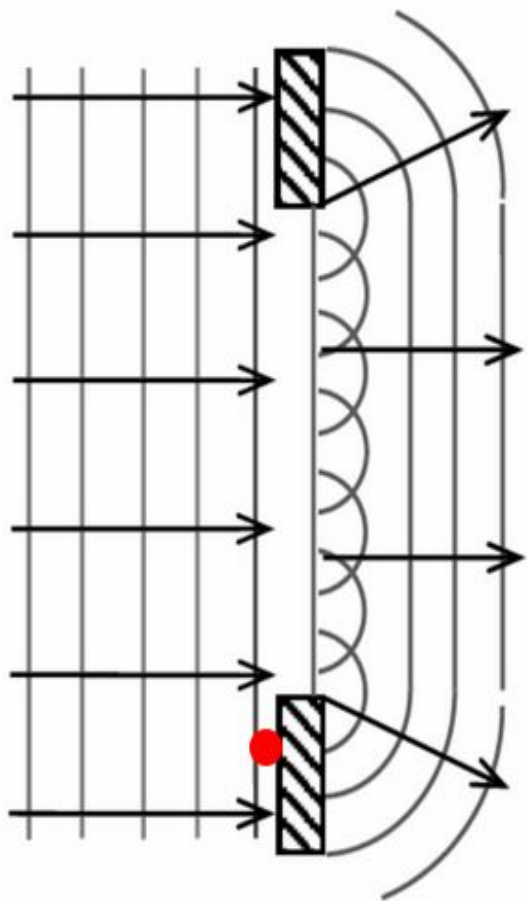
*Рис. 51.1. Малое отверстие в преграде – источник сферических волн*



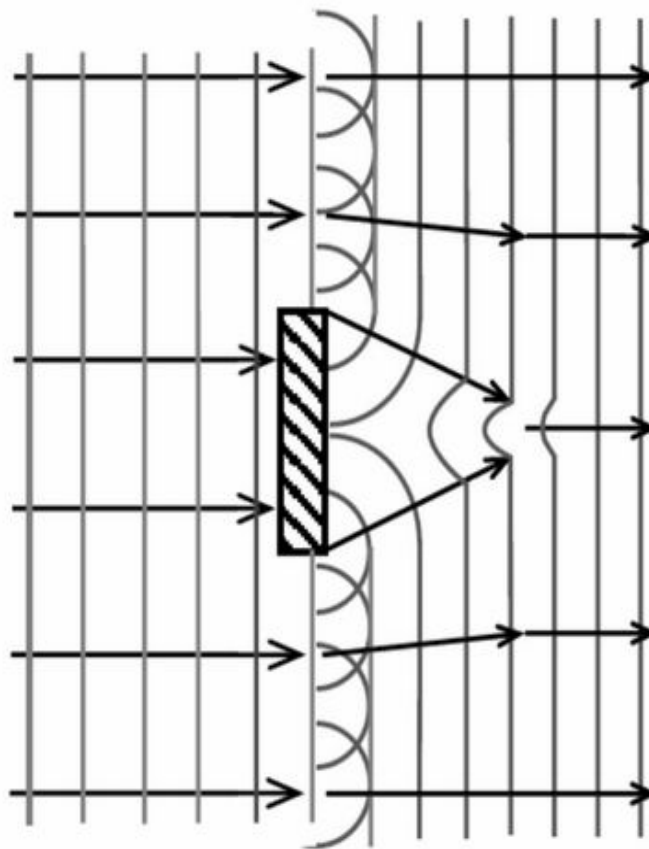
*Рис. 51.2. Построение нового фронта волны по принципу Гюйгенса*



*Рис. 51.3. Построения Гюйгенса для сферической (а) и плоской (б) волн*



*Рис. 51.4. Дифракция волн на  
отверстии*



*Рис. 51.5. Огибание волнами  
препятствия*