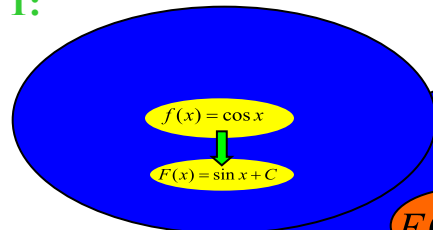


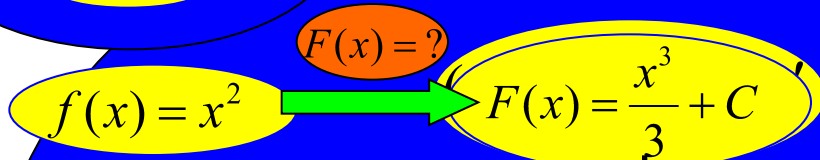
Первообразная функция и неопределенный интеграл

def: Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$, если $f(x)$ является производной для $F(x)$, т. е. если $F'(x) = f(x)$.

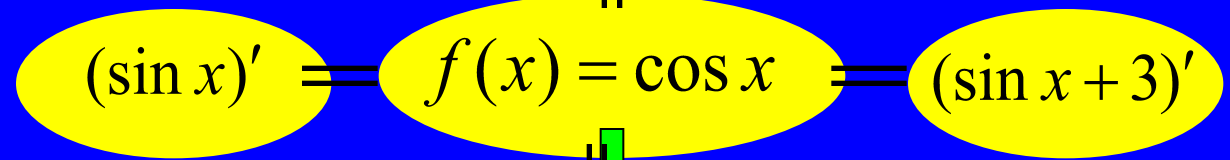
Ex 1:



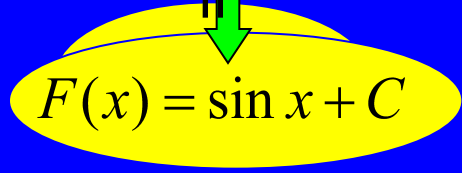
Ex 2:



Лемма



def:



Знак интеграла \int является

ее сумму.

Основные свойства неопределенного интеграла

- 1) Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int (f(x) \pm g(x) \pm p(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \int p(x) dx$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

- 3) Вид формул интегрирования не изменится, если независимое переменное x заменить любой дифференцируемой функцией от x ,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(t) dt = F(t) + C$$
$$x = t(x)$$

Это свойство называют инвариантностью формул интегрирования.

4) $(\int f(x) dx)' = f(x)$

5) $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$

6) $\int f'(x) dx = f(x) + C$

7) $\int df(x) = f(x) + C$

Непосредственное интегрирование

Ex 1: $\int (x - 2)^3 dx = ?$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{aligned} \int (x - 2)^3 dx &= \int (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 8x + C = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 - 8x + C \end{aligned}$$

Ex 2: $\int \frac{2x-1}{x} dx = \int \left(\frac{2x}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = 2x - \ln x + C$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Ex 3: $\int \left(\frac{\sin x}{5} + \sqrt{x} \right) dx = \int \frac{1}{5} \sin x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{5} \cos x + \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C =$

$$= -\frac{1}{5} \cos x + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C$$

Ex 4: $\int \left(\frac{3}{2(x^2+4)} + \frac{1}{3\sin^2 x} - \frac{6}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx =$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x^2+4)} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 6 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{ctgx} - 6 \ln |x + \sqrt{x^2+9}| + C$$



Интегрирование подстановкой. Внесение под знак дифференциала

Ex 1: $\int (x-3)^3 dx = ?$ $d(x-3) = (x-3)' dx = dx$

$$\int (x-3)^3 dx = \int (x-3)^3 d(x-3) = \frac{(x-3)^4}{4} + C$$

Вывод 1: $d(x+C) = dx$, $C - \text{const}$

Ex 2: $\int (3x+7)^{25} dx = ?$

$$\frac{1}{3} d(3x+7) = \frac{1}{3} (3x+7)' dx = \frac{1}{3} \cdot 3 dx = dx$$

$$d(x-5) = dx$$

$$\int (3x+7)^{25} dx = \int (3x+7)^{25} \frac{1}{3} d(3x+7) = \frac{1}{3} \int t^{25} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{26}}{26} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+7)^{26}}{26} + C$$

$$dx = \frac{1}{C} d(Cx), C - \text{const}$$

$$3x+7 = t$$

Вывод 2:

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\frac{1}{3} d(3x+7) = \frac{1}{3} (3x+7)' dx = \frac{1}{3} \cdot 3 dx = dx$$

$$x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1}$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = ?$$

Вывод 3: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

$$\int \frac{1}{x} \ln^3 x dx = \int \ln^3 x d \ln x = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

Вывод 4: $\frac{dx}{x} = \ln x$

Ex: $\int \sin 2x dx = ?$

I способ: $\int \sin 2x dx = \int \sin 2x d\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

II способ: $\int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx = \int 2 \sin x d(\sin x) = 2 \frac{\sin^2 x}{2} + C = \sin^2 x + C$

III способ: $\int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx = - \int 2 \cos x d(\cos x) = -2 \frac{\cos^2 x}{2} + C = -\cos^2 x + C$

Вывод $\cos x dx = d \sin x$
5: $\sin x dx = -d \cos x$

Ex: $\int x \sqrt{x+5} dx = ?$

$$\int x \sqrt{x+5} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+5} = t \\ x+5 = t^2 \\ x = t^2 - 5 \\ dx = 2dt \end{array} \right| = \int (t^2 - 5) \cdot t \cdot 2tdt = 2 \int (t^2 - 5) \cdot t^2 dt = 2 \int (t^4 - 5t^2) dt =$$

$$= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{5t^3}{3} \right) + C = \frac{2}{5} t^5 - \frac{5}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} (x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{3} (x+5)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{(x+5)^5} - \frac{5}{3} \sqrt{(x+5)^3} + C$$

