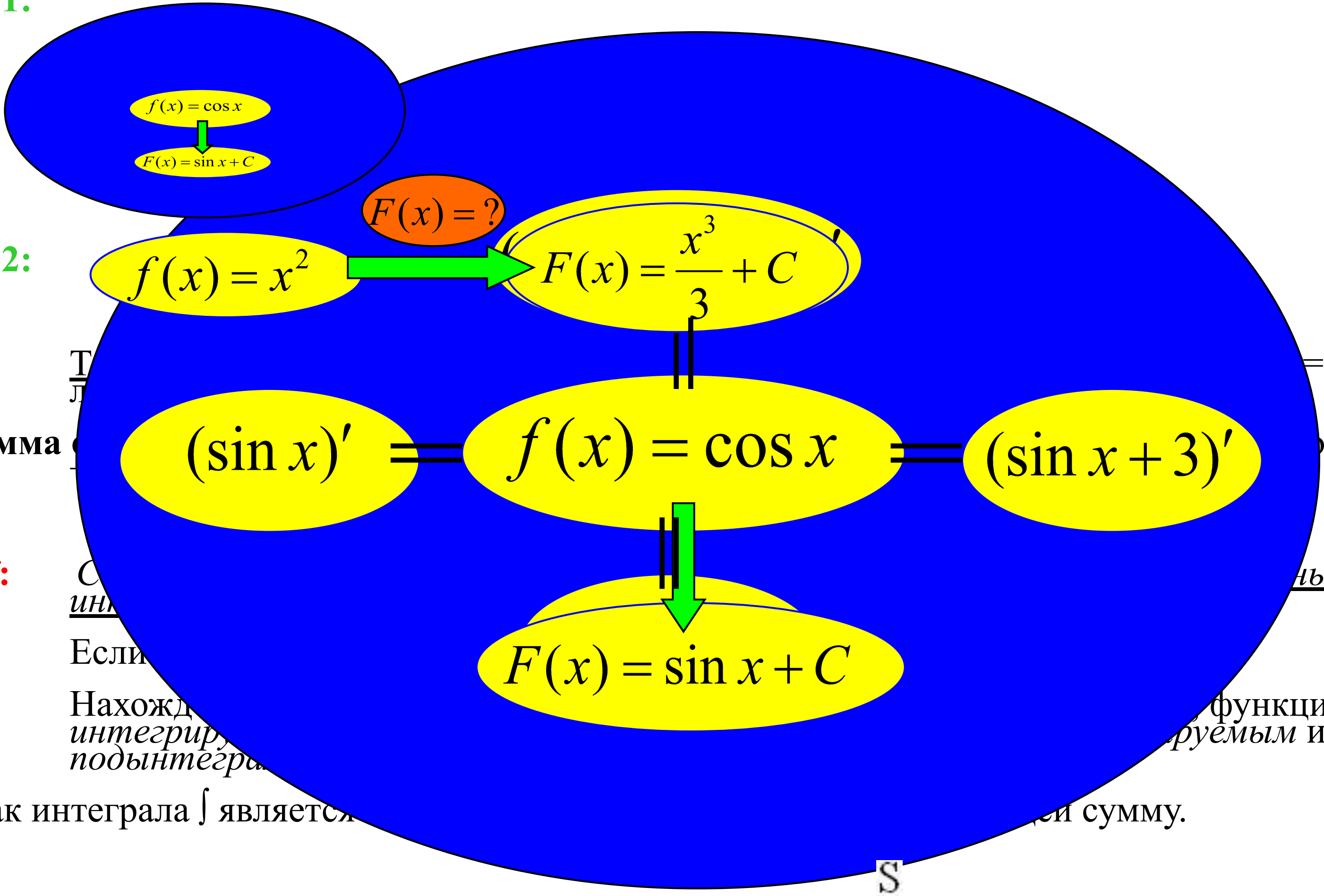
Первообразная функция и неопределенный интеграл

def: *Функция F(x) называется __первообразной__ для f(x), если f(x) является производной для F(x), т. е. если F‘(x) = f(x).*

Ex 1:

Ex 2:



T … = f(x), то и
л … f(x).

Лемма … $F_2(x) = F_1(x)$

def: *С … __ным__*
__ин__

Если

Нахожд … функция f(x) –
интегрир … *руемым* или
подынтегра

Знак интеграла ∫ является … сумму.

S

Основные свойства неопределенного интеграла

1) Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int (f(x) + g(x) - \varphi(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int \varphi(x)dx$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int kf(x)dx = \int k f(x)dx$$

3) Вид формул интегрирования не изменится, если независимое переменное x заменить любой дифференцируемой функцией от x,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \int f(t)dt = F(t) + C$$

$$x = t(x)$$

Это свойство называют инвариантностью формул интегрирования.

4) $(\int f(x)\, dx)' = f(x)$

5) $d(\int f(x)\, dx) = f(x)\, dx$

6) $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$

7) $\int df(x) = f(x) + C$

Непосредственное интегрирование

Ex 1: $\int (x-2)^3\,dx = ?$

$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

$\int (x-2)^3\,dx = \int (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\,dx = \int x^3\,dx - 6\int x^2\,dx + 12\int x\,dx - 8\int dx =$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 8x + C = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 - 8x + C$

Ex 2: $\int \frac{2x-1}{x}\,dx = \int\left(\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \int 2\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \quad 2x - \ln x + C$

$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Ex 3: $\int\left(\frac{\sin x}{5} + \sqrt[4]{x}\right)dx = \int \frac{1}{5}\sin x\,dx + \int x^{\frac{1}{4}}\,dx = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C =$

$= -\frac{1}{5}\cos x + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

Ex 4: $\int\left(\frac{3}{2(x^2+4)} + \frac{1}{3\sin^2 x} - \frac{6}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx =$

$= \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+4)} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sin^2 x} - 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{3}{4}arctg\frac{x}{2} - \frac{1}{3}ctgx - 6\ln\left|x + \sqrt{x^2+9}\right| + C$

Интегрирование подстановкой. Внесение под знак дифференциала

Ex 1: $\int (x-3)^3\,dx = ?$

$d(x-3) = (x-3)'dx = dx$

$$\int (x-3)^3\,dx = \int (x-3)^3\,d(x-3) = \frac{(x-3)^4}{4} + C$$

Вывод 1: $\boxed{d(x+C) = dx}$, C - const

Ex 2: $\int (3x+7)^{25} = ?$

$\frac{1}{3}d(3x+7) = \frac{1}{3}(3x+7)'dx = \frac{1}{3}\cdot 3dx = dx$

$d(x-3) = (\ldots)'\,dx = dx$

$$\int (3x+7)^{25}\,dx = \int (3x+7)^{25}\,\frac{1}{3}d(3x+7) = \frac{1}{3}\int t^{25}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{26}}{26} + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+7)^{26}}{26} + C$$

$3x+7=t$

Вывод 2: $\boxed{dx = \frac{1}{C}d(Cx)}$, $C - const$

$$\frac{1}{3}d(3x+7) = \frac{1}{3}(3x+7)'dx = \frac{1}{3}\cdot 3dx = dx$$

Ex 3: $\int e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

$$\boxed{x^n dx = \frac{1}{n+1}dx^{n+1}}$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = ?$$

Вывод 3:

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int \frac{1}{x}\ln^3 x\,dx = \int \ln^3 x\,d\ln x = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

Ex 4:

Вывод 4: $\boxed{\frac{dx}{x} = \ln x}$

Ex: $\int \sin 2x dx = ?$

I способ: $\int \sin 2x dx = \int \sin 2x d\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

II способ: $\int \sin 2x dx = \int 2\sin x \cos dx = \int 2\sin x d(\sin x) = 2\frac{\sin^2 x}{2} + C = \sin^2 x + C$

III способ: $\int \sin 2x dx = \int 2\sin x \cos x dx = -\int 2\cos x d(\cos x) = -2\frac{\cos^2 x}{2} + C = -\cos^2 x + C$

<u>Вывод 5:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x dx &= d\sin x \\ \sin x dx &= -d\cos x \end{aligned}}$$

Ex: $\int x\sqrt{x+5}dx = ?$

$$\int x\sqrt{x+5}dx = \left| \begin{aligned} \sqrt{x+5} &= t \\ x+5 &= t^2 \\ x &= t^2 - 5 \\ dx &= 2dt \end{aligned} \right| = \int (t^2-5)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^2-5)\cdot t^2dt = 2\int (t^4-5t^2)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{5t^3}{3}\right) + C = \frac{2}{5}t^5 - \frac{5}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+5)^5} - \frac{5}{3}\sqrt{(x+5)^3} + C$$