Комплексные числа

Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i так называемая ***мнимая единица***, $i^2 = -1$.

Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y ***мнимой частью*** z, $y = \operatorname{Im} z$.

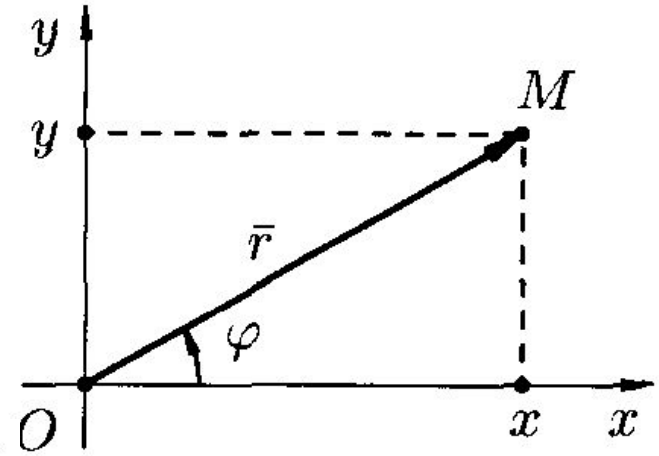
Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными*** $(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются ***сопряженными***.

Геометрическое изображение к.ч.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$



Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью***. Ось абсцисс называется ***действительной*** $z = x + 0i = x$. Ось ординат называется ***мнимой осью*** $z = 0 + iy$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент $z \neq 0$ — величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2 \ldots)$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$,

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi$$

Формы записи к.ч.

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

$x = r\cos\varphi,$

$y = r\sin\varphi.$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая запись комплексного числа называется ***тригонометрической формой***. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}.$

$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$

$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2k\pi) = \cos(\arg z), \quad \sin\varphi = \sin(\arg z).$

т. е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Используя *формулу Эйлера*

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой ***показательной*** (или ***экспоненциальной***) ***форме*** $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ — модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots)$.

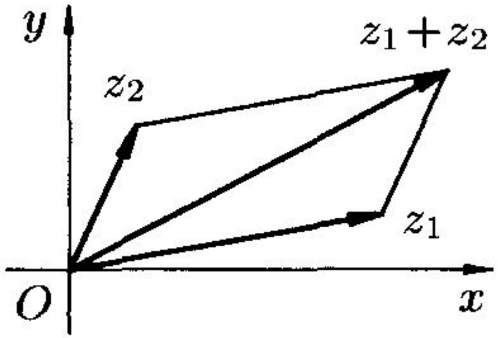
Пример Записать комплексные числа $z_1 = -1+i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

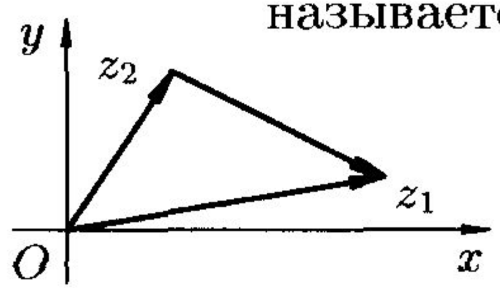
Действия над к.ч.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$





$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

называется *неравенством треугольника.*

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. ***Разностью*** двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т. е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$. $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 =$$

$$= x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Например,

$(2 - 3i)(-5 + 4i)$

Заметим, что $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ — действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. ***формулой Муавра.***

Найти $(1 + \sqrt{3}i)^9$. $r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{1} \Longrightarrow$

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$. $z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9\left(\cos 9\dfrac{\pi}{3} + i\sin 9\dfrac{\pi}{3}\right) =$

$$= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512.$$

Деление определяется как действие, обратное умножению. ***Частным двух комплексных чисел*** z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Выполнить деление $\frac{1 + 3i}{2 + i}$.

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е.

$$\sqrt[n]{z} = \omega, \text{ если } \omega^n = z.$$

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$ То есть $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Найти значения а) $\sqrt[3]{i} = \omega$; б) $\sqrt{-1} = \omega$.