Лекция 11. Крутильные колебания стержня

Уравнение крутильных колебаний имеет вид

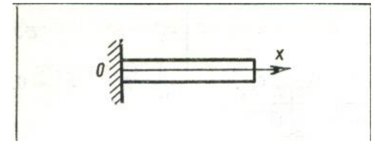
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ_{к}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\rho J_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\mu(x,t) \quad (7.22)$$

Решение уравнения (7.22), удовлетворяющее на каждом конце одному из краевых условий, должно также удовлетворять начальным условиям

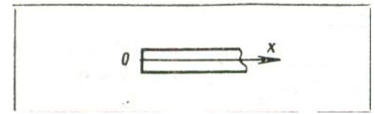
$$\theta(x,0)=g(x);\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,0)=g(x) \quad (7.23)$$

Основные типы краевых условий для крутильных колебаний стержней

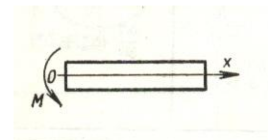
1. $\theta = 0$



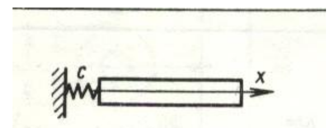
2. $GJ_{\kappa}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = 0$



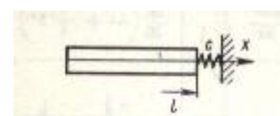
3. $GJ_{\kappa}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = M$



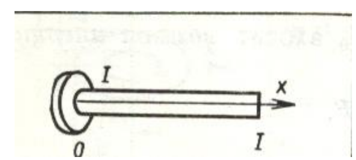
4.1. $GJ_{\kappa}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) - c\theta = 0$



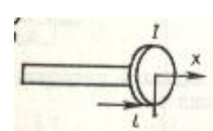
4.2. $GJ_{\kappa}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) + c\theta = 0$



5.1. $GJ_{\kappa}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = I_x \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$



5.2. $GJ_{\kappa}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = -I_x \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$



В технической теории крутильные колебания стержня описывают уравнением при ***м = 0***

$$-GJ_{к}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\rho J_{0}\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}=0 \quad (8.11)$$

Если стержень имеет постоянные по длине характеристики $\boldsymbol{GJ_{к} = const}$, $\boldsymbol{pJ_{0} = const}$, то уравнение для исследования собственных колебаний будет следующим:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\frac{\rho J_{0}}{GJ_{к}}\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}=0 \quad (8.11a)$$

$$\frac{\partial^{2}\theta}{\partial x^{2}}-\frac{1}{c_{0}^{2}}\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}=0 \quad (8.12a)$$

$c_{0}=\sqrt{\dfrac{GJ_{к}}{\rho J_{0}}}$ - скорость распространения крутильных волн в стержне

$\theta(x,t)$ на концах стержня должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим характеру закрепления концов стержня.

Общее решение. Для стержня, совершающего собственные крутильные колебания, переменные разделяют введением временного множителя, гармонически изменяющегося со временем:

$$\theta(x,t) = \Theta(x)\sin\omega t \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0 \quad (8.12a)$$

Подстановка (8.13) в (8.12а) приводит к уравнению

$$\Theta'' + \beta^2\Theta = 0 \quad (8.14) \quad \textit{где } \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad (8.15)$$

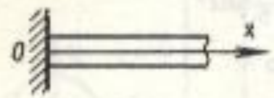
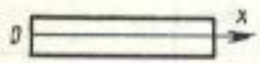
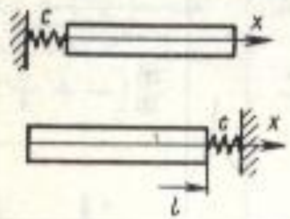
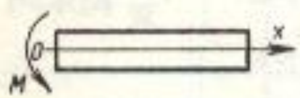
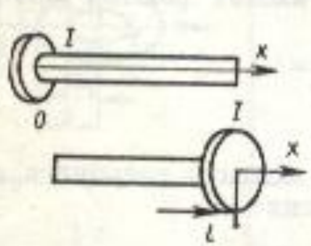
Общее решение (8.14) можно представить в виде

$$\Theta(x) = C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x \quad (8.16)$$

Определение собственных частот и форм продольных колебаний. Подстановка (8.16) в краевые условия дает систему линейных однородных уравнений для определения $\boldsymbol{C_1}$. и $\boldsymbol{C_2}$

Формы собственных колебаний определяются ненулевым решением $\boldsymbol{C_j}$ при $\omega = \omega_k$ (одной из собственных частот).

5. Основные типы краевых условий для крутильных колебаний стержней

Схема	Вид закрепления	Условия при $x = 0$
	Заделка	$\theta = 0$
	Свободный конец	$GI_к \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0$
	Упругое закрепление	$GI_к \dfrac{\partial\theta}{\partial x} - c\theta = 0;$ $GI_к \dfrac{\partial\theta}{\partial x} + c\theta = 0$ (при $x = l$)
	На конец действует момент M	$GI_к \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = M$
	Инерционный элемент на конце	$GI_к \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = I \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2};$ $GI_к \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -I \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$ (при $x = l$)

Аналогичные параметры продольных и крутильных колебаний стержней

Продольные колебания	Крутильные колебания
Перемещение u	Угол поворота θ
Жесткость на растяжение-сжатие $\dfrac{EF}{l}$	Жесткость на кручение $\dfrac{GI_к}{l}$
Продольная сила $EF\dfrac{\partial u}{\partial x}$	Крутящий момент $GI_к\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$
Инерционная сила $\rho F\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Инерционная сила $\rho I_0\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$
Уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$	Уравнение $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c_К^2}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}=0$
Краевые условия (см. табл. 3, гл. VIII)	Граничные условия (см. табл. 5 гл. VIII)
Скорость продольных волн $c_0=\left(\dfrac{E}{\rho}\right)^{1/2}$	Скорость крутильных волн $c_К=\left(\dfrac{G}{\rho}\right)^{1/2}\left(\dfrac{I_К}{I_0}\right)^{1/2}$