

Лекция 11. Крутильные колебания стержня

Уравнение крутильных колебаний имеет вид

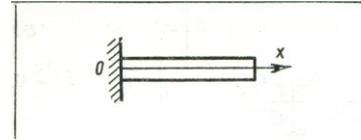
$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \rho J_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \mu(x, t) \quad (7.22)$$

Решение уравнения (7.22), удовлетворяющее на каждом конце одному из краевых условий, должно также удовлетворять начальным условиям

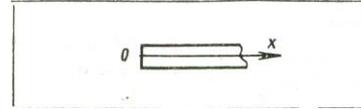
$$\theta(x, 0) = g(x); \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (7.23)$$

Основные типы краевых условий для крутильных колебаний стержней

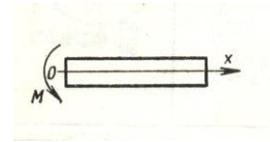
1. $\theta = 0$



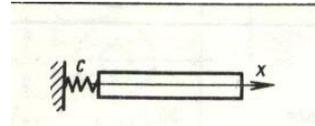
2. $GJ_K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$



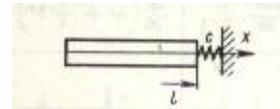
3. $GJ_K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = M$



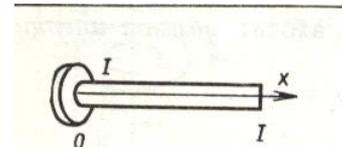
4.1. $GJ_K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - c\theta = 0$



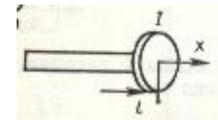
4.2. $GJ_K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + c\theta = 0$



5.1. $GJ_K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$



5.2. $GJ_K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = -I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$



В технической теории крутильные колебания стержня описывают уравнением при $m = 0$

$$-GJ_{\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \rho J_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (8.11)$$

Если стержень имеет постоянные по длине характеристики $GJ_{\kappa} = const$, $\rho J_0 = const$, то уравнение для исследования собственных колебаний будет следующим:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\rho J_0}{GJ_{\kappa}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (8.11a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (8.12a)$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{GJ_{\kappa}}{\rho J_0}} \quad \text{- скорость распространения крутильных волн в стержне}$$

$\theta(x, t)$ в концах стержня должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим характеру закрепления концов стержня.

Общее решение. Для стержня, совершающего собственные крутильные колебания, переменные разделяют введением временного множителя, гармонически изменяющегося со временем:

$$\theta(x, t) = \Theta(x) \sin \omega t \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (8.12a)$$

Подстановка (8.13) в (8.12a) приводит к уравнению

$$\Theta'' + \beta^2 \Theta = 0 \quad (8.14) \quad \text{где } \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad (8.15)$$

Общее решение (8.14) можно представить в виде

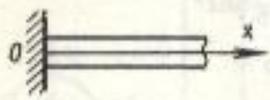
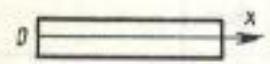
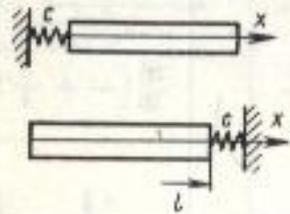
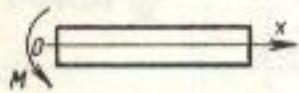
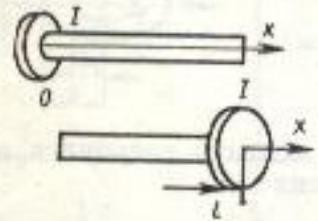
$$\Theta(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x \quad (8.16)$$

Определение собственных частот и форм продольных колебаний.

Подстановка (8.16) в краевые условия дает систему линейных однородных уравнений для определения C_1 и C_2

Формы собственных колебаний определяются ненулевым решением C_j при (одной из собственных частот).

5. Основные типы краевых условий для крутильных колебаний стержней

Схема	Вид закрепления	Условия при $x = 0$
	Заделка	$\theta = 0$
	Свободный конец	$G I_{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$
	Упругое закрепление	$G I_{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x} - c \theta = 0;$ $G I_{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x} + c \theta = 0$ <p>(при $x = l$)</p>
	На конец действует момент M	$G I_{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x} = M$
	Инерционный элемент на конце	$G I_{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x} = I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2};$ $G I_{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ <p>(при $x = l$)</p>

Аналогичные параметры продольных и крутильных колебаний стержней

Продольные колебания	Крутильные колебания
Перемещение u	Угол поворота θ
Жесткость на растяжение-сжатие $\frac{EF}{l}$	Жесткость на кручение $\frac{GI_K}{l}$
Продольная сила $EF \frac{\partial u}{\partial x}$	Крутящий момент $GI_K \frac{\partial \theta}{\partial x}$
Инерционная сила $\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Инерционная сила $\rho I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$
Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$	Уравнение $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_K^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$
Краевые условия (см. табл. 3, гл. VIII)	Граничные условия (см. табл. 5 гл. VIII)
Скорость продольных волн $c_0 = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$	Скорость крутильных волн $c_K = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{I_K}{I_0}\right)^{1/2}$