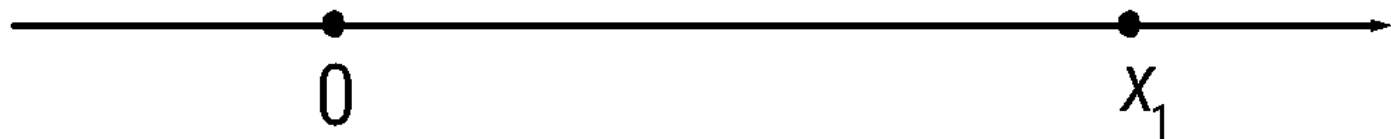


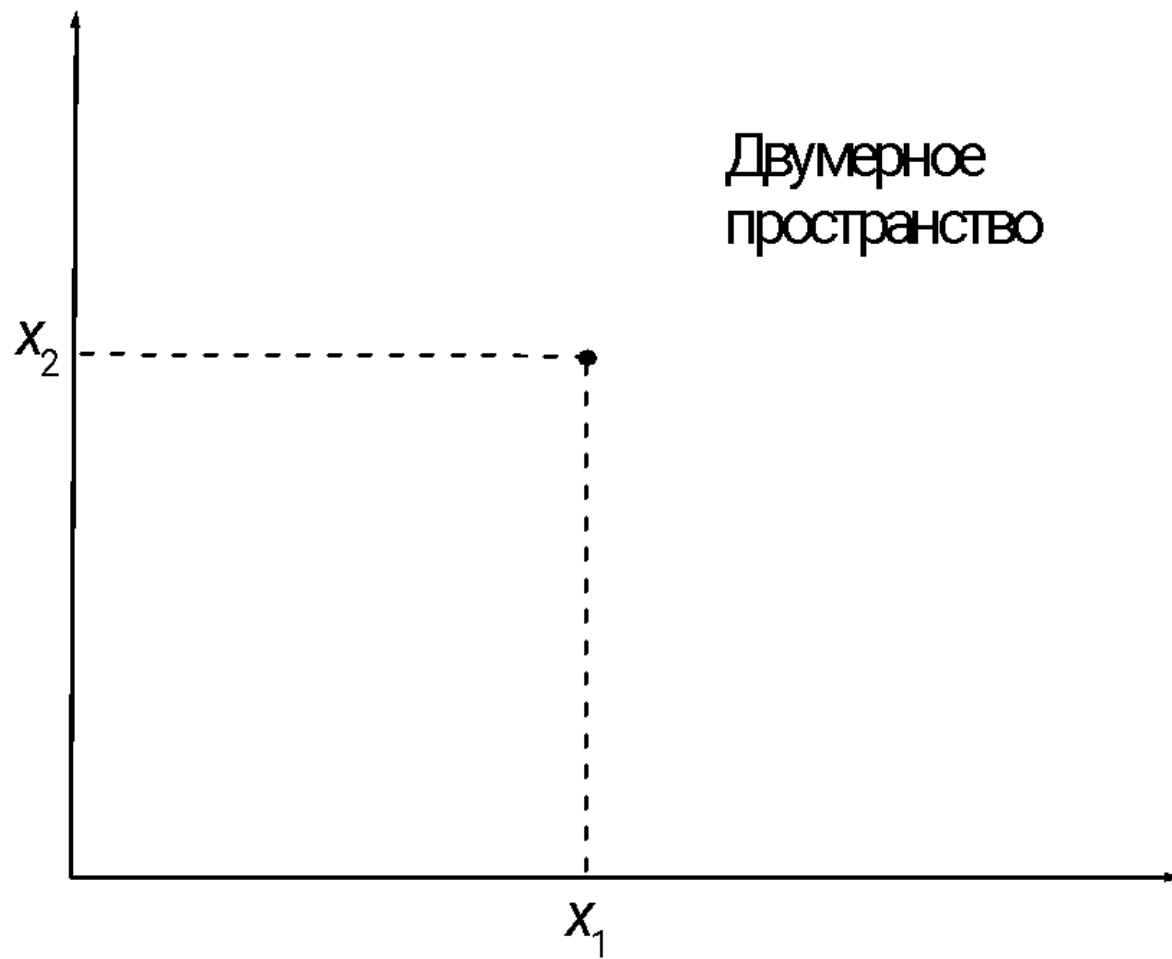
**!Здравствуйте**

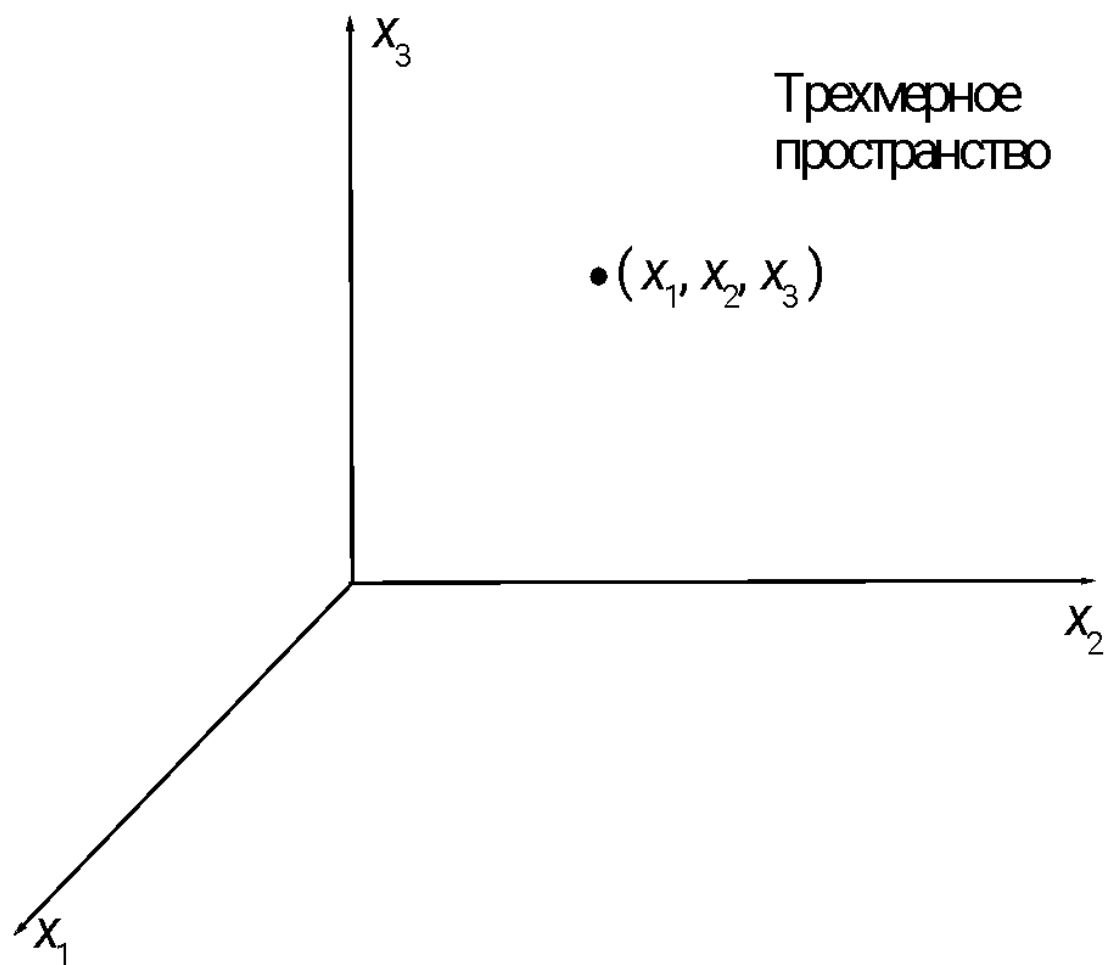
**Лекция №16**

# Функции многих переменных

Одномерное  
пространство







В  $n$ -мерном пространстве точка — это совокупность  $n$  вещественных чисел  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , которые называются **координатами** точки  $n$ -мерном пространстве. Для сокращения записи, мы в дальнейшем будем часто точку обозначать одной буквой  $x$ , но надо всегда помнить, что это сокращенное обозначение подразумевает следующее

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

**Расстояние** между двумя точками.

Пусть имеются две точки –  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ . **Эвклидовым расстоянием** между этими точками называется величина

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Так как других расстояний в данном курсе не будет, то слово «эвклидово» мы будем опускать.

Это расстояние обладает следующими свойствами:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (то есть  $\forall i = \overline{1, n} \quad x_i = y_i$ ).
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3. Неравенство треугольника:  
 $\forall z \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

## Области в $n$ -мерном пространстве

**Определение.** Областью в  $n$ -мерном пространстве называется любое множество точек из этого пространства.

**1. Замкнутый параллелепипед** – это множество точек  $x$ , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Он обозначается символом

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \dots a_n, b_n].$$

Точка с координатами

$$\left( \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right)$$

называется **центром** параллелепипеда, величины  $b_i - a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – **сторонами** параллелепипеда.



**2. Открытый параллелепипед** – это множество точек  $x$ , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$a_i < x_i < b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Он обозначается символом

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \dots a_n, b_n).$$

**3. Замкнутый шар** – это множество точек  $x$ , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \leq r^2.$$

Он обозначается символом  $R[x_0, r]$ . Точка  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots x_n^0)$  называется **центром** шара, величина  $r$  – его **радиусом**.

**4. Открытый шар** – это множество точек  $x$ , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < r^2$$

Он обозначается символом  $R(x_0, r)$ . Шар  $R(x_0, \varepsilon) = O_\varepsilon(x_0)$  называется  **$\varepsilon$ -окрестностью** точки  $x_0$ .

**Теорема.** Во всякий параллелепипед можно вписать шар и наоборот – во всякий шар можно вписать параллелепипед.

*Доказательство.*

1. Пусть дан параллелепипед

$$P = [a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1; a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2; \dots a_n - \delta_n, a_n + \delta_n]$$

с центром в точке  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и сторонами  $2\delta_1, 2\delta_2, \dots, 2\delta_n$ .

Рассмотрим шар с центром в точке  $a$  и радиусом  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ , то есть  $R[a, \delta]$ .

Пусть  $x \in R[a, \delta]$ . Это значит, что

$$\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \leq \delta^2.$$

Но тогда  $\forall i = \overline{1, n}$  имеем

$$|x_i - a_i| = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \leq \delta \leq \delta_i,$$

и, следовательно,  $x \in P$ . Это означает, что  $R[a, \delta] \subset P$ .

2. Пусть дан шар  $R[a, r]$ . Возьмем  $\delta = r/\sqrt{n}$  и рассмотрим параллелепипед

$$P = [a_1 - \delta, a_1 + \delta; a_2 - \delta, a_2 + \delta; \dots a_n - \delta, a_n + \delta].$$

Пусть  $x \in P$ . Тогда  $\forall i = \overline{1, n} \quad |x_i - a_i| \leq \delta$  и мы имеем

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n \delta^2 = n\delta^2 = n \cdot \frac{r^2}{n} = r^2,$$

то есть  $x \in R[a, r]$ . Следовательно,  $P \subset R[a, r]$ .

Эта теорема позволяет переходить от шара к параллелепипеду и обратно.

## Функции $n$ переменных

Пусть в  $n$ -мерном пространстве задана какая-то область  $G$ . Правило, которое каждой точке области  $G$  с координатами  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  ставит в соответствие число  $z$ , называется **функцией**  $n$  переменных и обозначается символом  $z = f(x)$ , или, в полной форме записи,  $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

Множество точек  $x$ , где это правило имеет смысл, называется **областью определения** функции. Множество чисел  $z$  называется **областью значений** функции.

Пусть  $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , а переменные  $x_i$  в свою очередь являются функциями  $m$ -мерных переменных  $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ , то есть

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m), \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим в вместо  $x_i$  эти функции. Тогда мы получим **сложную** функцию, или **суперпозицию** функций

$$\begin{aligned} z &= f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)) = \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_m) \end{aligned}$$

## Предел функции $n$ переменных

**Определение.** Число  $A$  называют **пределом** функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  ( $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ), если

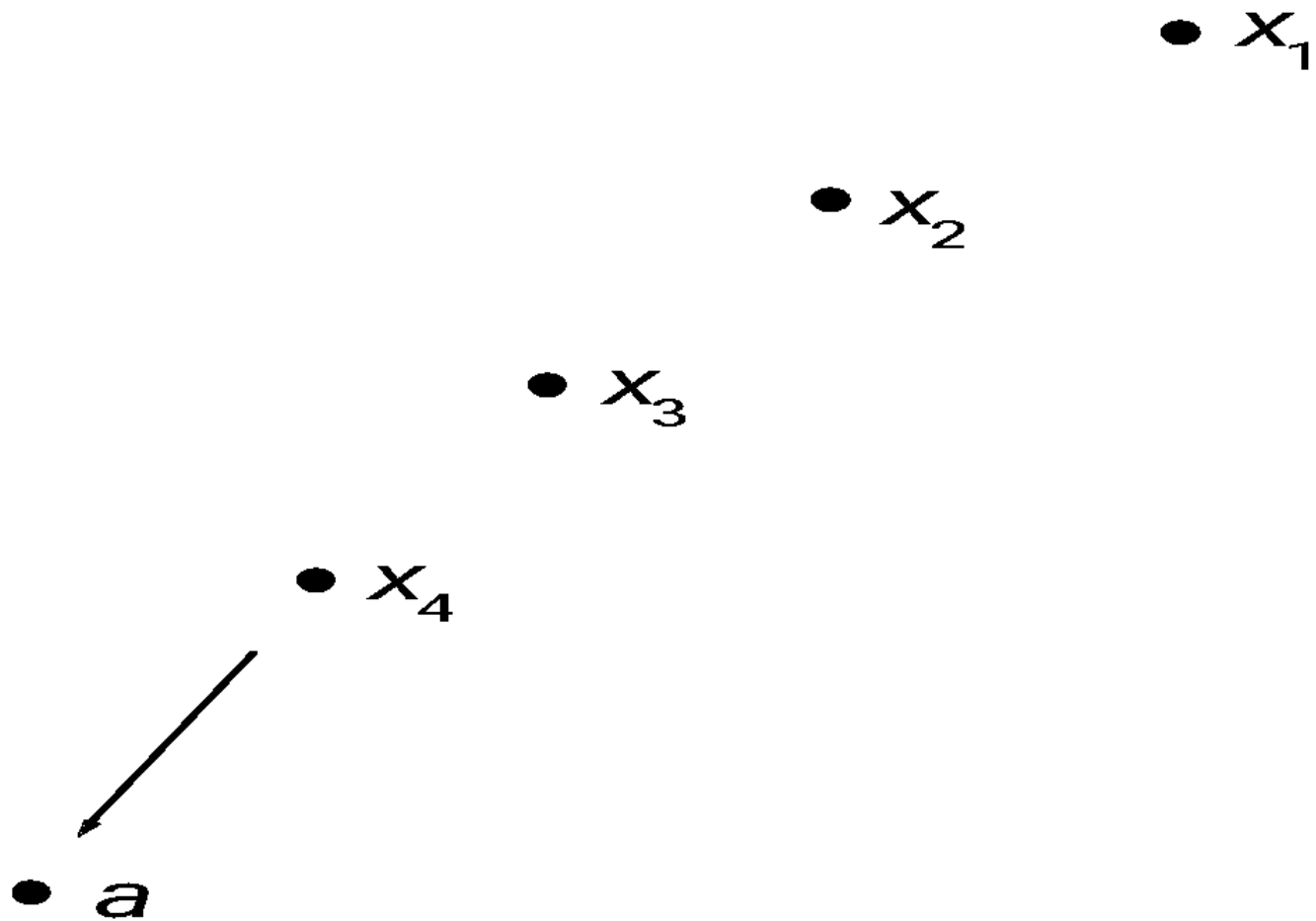
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \mid x_i - a_i \mid < \delta \ i = \overline{1, n} \mid f(x) - A \mid < \varepsilon,$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \ d(x, a) < \delta \mid f(x) - A \mid < \varepsilon.$$

Геометрически это означает следующее. Пусть около значения  $A$  мы взяли сколь угодно малый отрезок  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ . Тогда найдется такой параллелепипед с центром в точке  $a$  и со сторонами равными  $2\delta$ , что как только точка  $x$  попадет в этот параллелепипед, так значение функции попадет в отрезок  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

Второе определение отличается от первого тем, что вместо параллелепипеда фигурирует шар с центром в точке  $a$  и радиусом  $\delta$  и попадание точки  $x$  внутрь этого шара приводит к тому, что значение  $f(x)$  попадет в отрезок  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ .

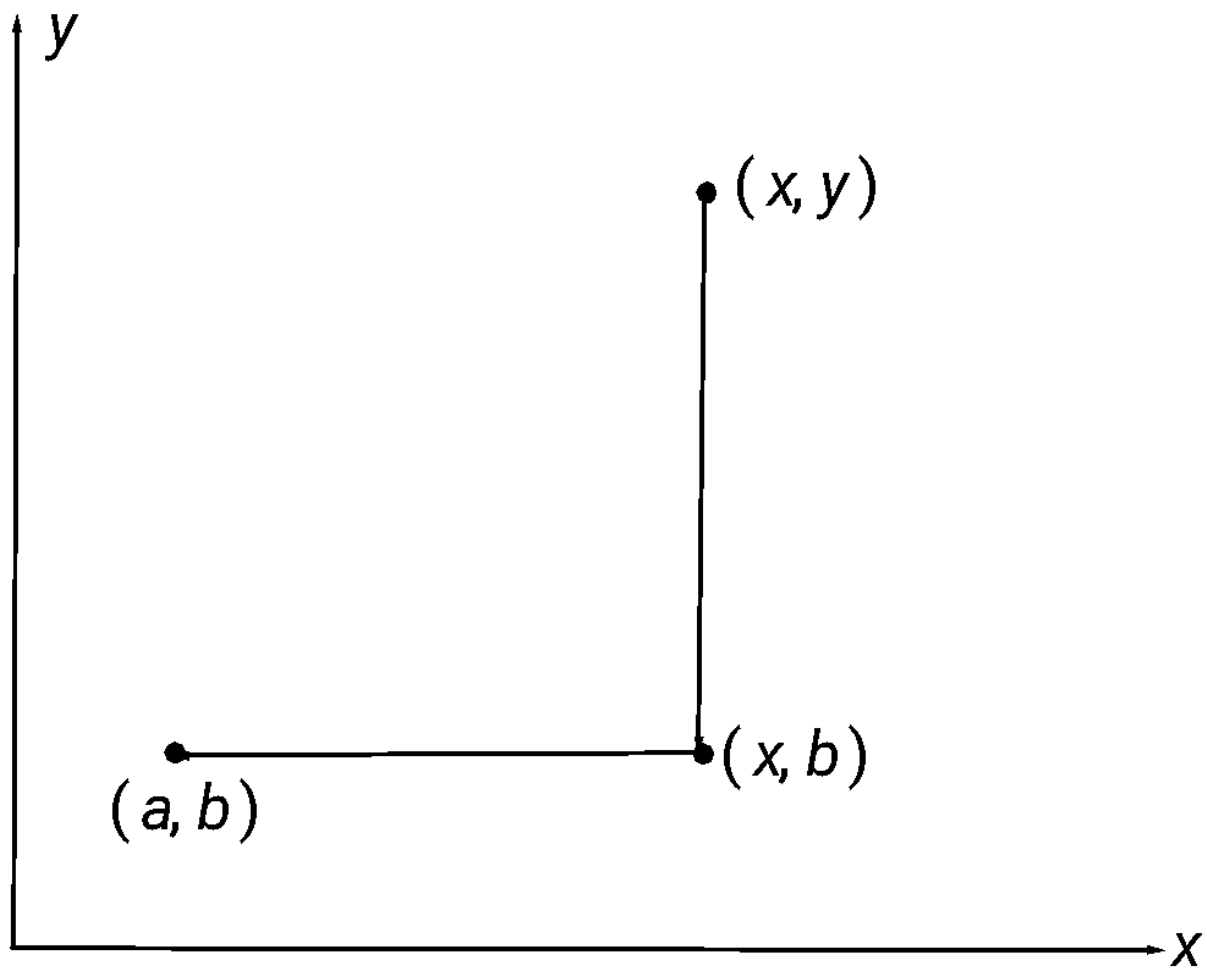


## Повторные пределы

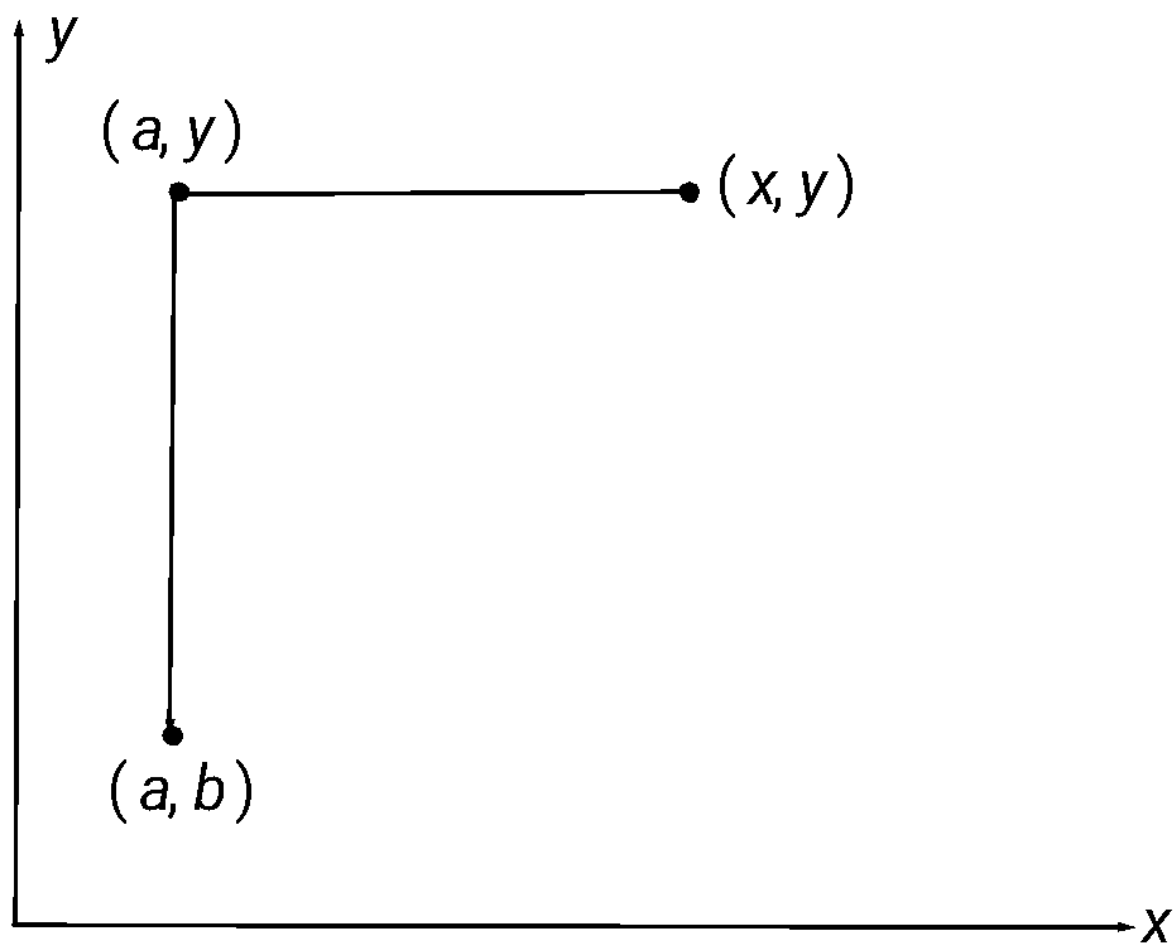
Пусть задана функция  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$ . Пусть точка  $(x, y)$  стремится к точке с координатами  $(a, b)$ , то есть  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ . Это означает, что  $x \rightarrow a$  и  $y \rightarrow b$ .

Будем подходить к точке  $(a, b)$  двумя путями. Первый путь выглядит так: Сначала из точки  $(x, y)$  перейдем в точку  $(x, b)$ , двигаясь параллельно оси  $OY$ , а затем из этой точки перейдем в точку  $(a, b)$ , двигаясь параллельно оси  $OX$ . В приложении к функции  $f(x, y)$  это означает, что сначала мы перешли к пределу  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$  получив некоторую функцию  $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ , а затем уже нашли  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$ , получив так называемый **повторный предел**  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ .





Теперь пойдём от точки  $(x, y)$  к точке  $(a, b)$  по такой траектории: сначала перейдём в точку  $(a, y)$  двигаясь параллельно оси  $OX$ . Тем самым мы найдём  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y)$ , который будет функцией от  $y$ . Затем из точки  $(a, y)$ , двигаясь параллельно оси  $OY$  перейдём в точку  $(a, b)$ , вычисляя теперь уже  $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y)$ . Тем самым мы нашли другой повторный предел  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$



**Теорема.** Если

1. Существует двойной предел  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y);$

2.  $\forall y$  существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \varphi(y),$

то существует и повторный предел  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$  и он равен

двойному пределу, то есть  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y).$

*Доказательство.*

Пусть  $\exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ . Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \ |x-a| < \delta \ |y-b| < \delta \ |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Перейдем в этой строке к пределу  $x \rightarrow a$ . Тогда выписывать неравенство  $|x-a| < \delta$  не будет необходимости, так как  $x-a \rightarrow 0$ .

Далее, так как  $\forall y$  существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \varphi(y)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x,y) - A| = \lim_{x \rightarrow a} |f(x,y) - A| = |\varphi(y) - A|,$$

и наша строчка кванторов примет вид

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \ |y-b| < \delta \ |\varphi(y) - A| < \varepsilon.$$

По определению предела функции одной переменной это и означает, что существует

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = A.$$

**Следствие.** Если к ограничениям теоремы добавить еще, что

3.  $\forall x$  существует  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \psi(x)$ ,

то существуют оба повторных предела, и они равны друг другу (так как оба они равны двойному пределу)

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y).$$

Через понятие предела обычным образом вводится понятие непрерывности функции  $n$  переменных: функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Все свойства непрерывных функций сохраняются и в случае функций  $n$  переменных.