

Лекция №8

Фундаментальная система решений (ФСР)

Определение. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений называется любой базис пространства решений этой системы.

.

- Пример. Найти ФСР и общее решение следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Элементы векторной алгебры

▪ Определение. Вектором называется направленный отрезок прямой, т.е. множество точек прямой, заключенных между фиксированными точками A и B с указанием направлений (Будем обозначать $\overrightarrow{AB}$).

Определение. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ называется его модулем и будет обозначаться $|\overrightarrow{AB}|$.

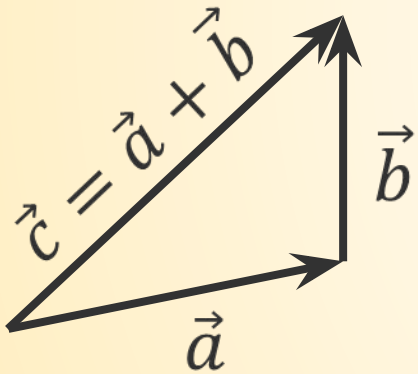
Вектор $\vec{0}$, начало и конец которого совпадают, называется нулевым. Его модуль равен нулю. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Определение. Два вектора называются равными, если они параллельны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину

Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов.

Определение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$.



Операция сложения векторов может быть распространена на любое конечное число слагаемых векторов.

Свойства операции сложения векторов:

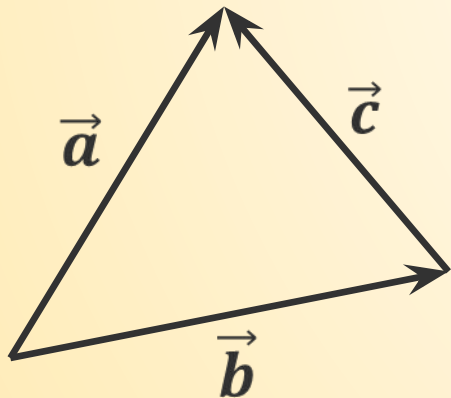
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность);

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность).

2. Вычитание векторов.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ (обозначаем $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$).

Построение вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$:



Приложим к началу вектора $\vec{a}$ начало вектора $\vec{b}$.
Из конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$ проводим вектор $\vec{c}$.

3. Умножение вектора на скаляр.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, параллельный вектору $\vec{a}$, направленный, как $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$, и имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ (обозначаем $\lambda \cdot \vec{a}$).

Свойства произведения вектора на число.

1. $\forall \lambda \in R, \forall k \in R$ и любого вектора $\vec{a}$

$$\lambda \cdot (k \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot k) \cdot \vec{a} \text{ (ассоциативность умножения на число).}$$

2. $\forall \lambda \in R, \forall k \in R$ и любого вектора $\vec{a}$

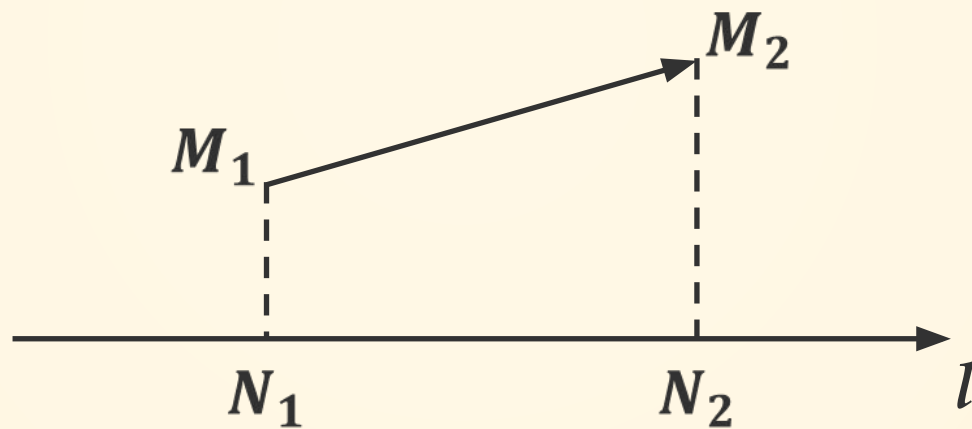
$$(\lambda + k) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + k \vec{a} \text{ (дистрибутивность относительно сложения чисел).}$$

3. $\forall \lambda \in R$ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad \text{(дистрибутивность относительно сложения векторов).}$$

Проекция вектора

▪ Определение. Проекцией вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на заданную ось l называется величина отрезка $[N_1N_2]$, где N_1 и N_2 - проекции точек M_1 и M_2 на ось l (обозначаем $pr_l \overrightarrow{M_1M_2}$).



Теорема 1. Проекция вектора $\vec{a}$ на какую-либо ось l равна произведению модуля вектора на косинус угла наклона вектора к оси, т.е.

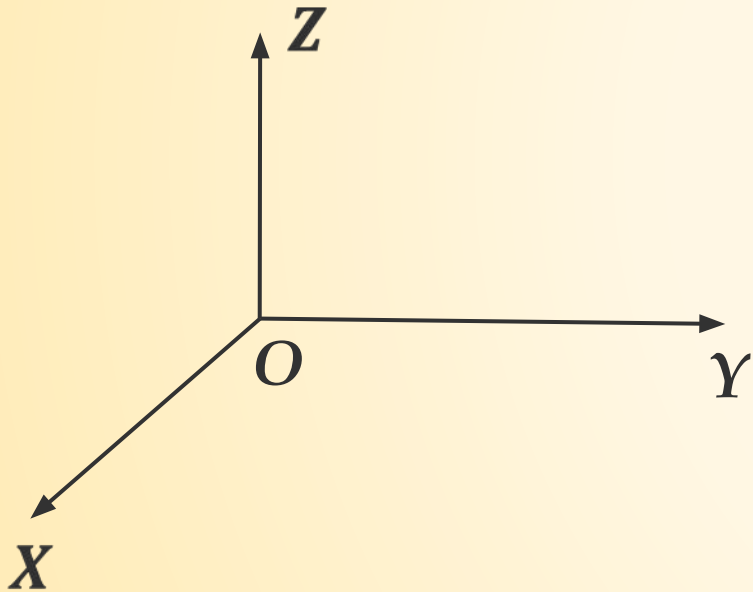
$$pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}^{\wedge} l)$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов на какую-нибудь ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось

$$pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l \vec{a} + pr_l \vec{b}$$

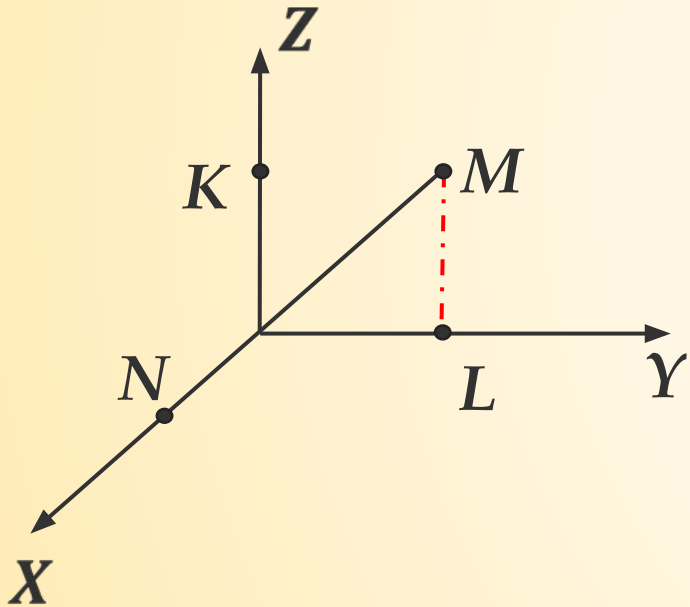
Координаты векторов

Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат XOY , которая состоит из фиксированной точки O – начала координат и трех взаимно перпендикулярных прямых OX – ось абсцисс, OY – ось ординат, OZ – ось аппликат.



На каждой из трех осей лучами, выходящими из точки O , приписываются положительные и отрицательные направления и на каждой прямой выбирается масштаб.

▪ Возьмем произвольный вектор $\vec{a}$, параллельным переносом совмещаем начало вектора $\vec{a}$ с точкой O , а конец обозначим M . Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M . Пусть координаты точки M будут соответственно $|\overrightarrow{ON}| = x$, $|\overrightarrow{OL}| = y$, $|\overrightarrow{OK}| = z$, $M(x; y; z)$.



Проекция вектора $\vec{a}$ на координатные оси называются координатами вектора $\vec{a}$.

$pr_{ox}\vec{a} = x$, $pr_{oy}\vec{a} = y$, $pr_{oz}\vec{a} = z$ и записываем $\vec{a} = (x, y, z)$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющие косинусы

▪ Обозначим углы, которые образует вектор $\vec{a}$ с координатными осями, соответственно через α, β, γ .

Тогда $x = |\vec{a}| \cos \alpha, y = |\vec{a}| \cos \beta, z = |\vec{a}| \cos \gamma$, т.к. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

▪ При этом $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ - называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Легко показать, что:

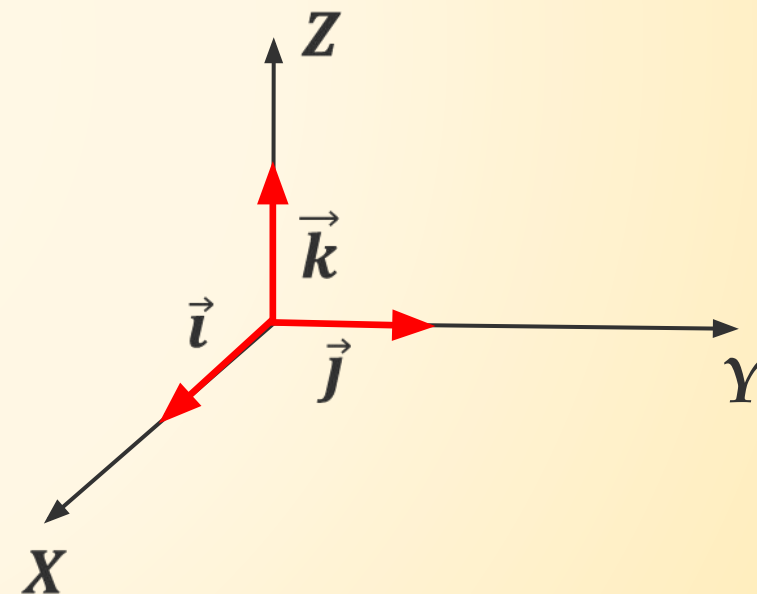
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Разложение вектора по ортам

- Построим тройку векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, удовлетворяющих следующим условиям:
 - 1) начало каждого из них лежит в начале координат;
 - 2) по модулю они равны единице: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$;
 - 3) вектор $\vec{i}$ направлен по оси абсцисс, $\vec{j}$ - по направлению оси ординат, $\vec{k}$ - по направлению оси аппликат.

Эти вектора называются ортами.

Теорема 4. Вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - образуют базис в пространстве векторов.



Скалярное произведение векторов

▪ Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла φ между ними (обозначаем $(\vec{a}, \vec{b})$).

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

Свойства скалярного произведения

1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) \text{ свойство коммутативности}.$$

2. Для $\forall \lambda \in R$ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}).$$

3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется:

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) \text{ свойство дистрибутивности}.$$

4. Для любого вектора $\vec{a}$

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2.$$

▪ Теорема 5. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

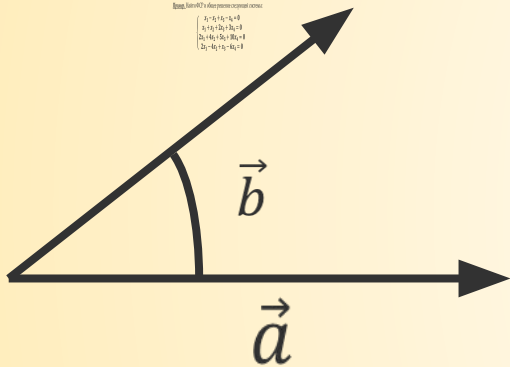
Приложения скалярного произведения

Теорема 4. Пусть однородная система линейных уравнений приведена к виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (2)$$

где r – ранг матрицы $A = (a_{ij})$, $r < n$.

1. Если D – произвольный определитель $n - r$ порядка отличный от нуля, то беря компоненты его строк в качестве значений свободных переменных и решая каждый раз получающуюся невырожденную систему, получим $n - r$ решений системы (2), образующих ФСР.
2. Любую фундаментальную систему решений системы (2) можно получить описанным способом из некоторого определителя отличного от нуля.



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Пример 1. Определить угол $\widehat{BAC}$ в треугольнике с вершинами

$$A(2; -1; 3), B(1; 1; 1) \text{ и } C(0; 0; 5).$$

▪ Задача 2. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ на вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$.

$$pr_a \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

Пример 2. Пусть $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$. Найти $pr_{\vec{AC}} \vec{AB}$