

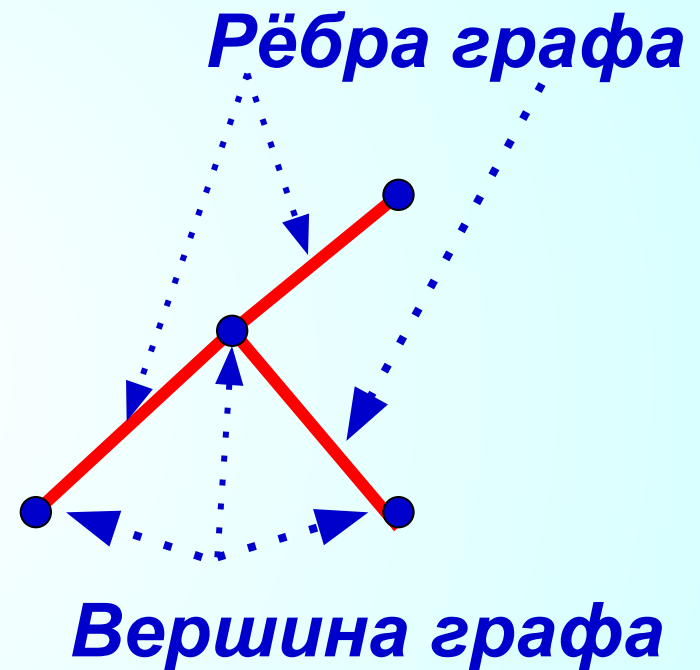
ЕГО ВЕЛИЧЕСТВО ГРАФ

Что такое граф

В математике определение графа дается так:

Графом называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями.

Точки называются **вершинами** графа, а соединяющие линии — **рёбрами**.



История возникновения графов

Основы теории графов как математической науки заложил в 1736 г. **Леонард Эйлер**, рассматривая задачу о кенигсбергских мостах. Сегодня эта задача стала классической.



Задача о Кенигсбергских мостах

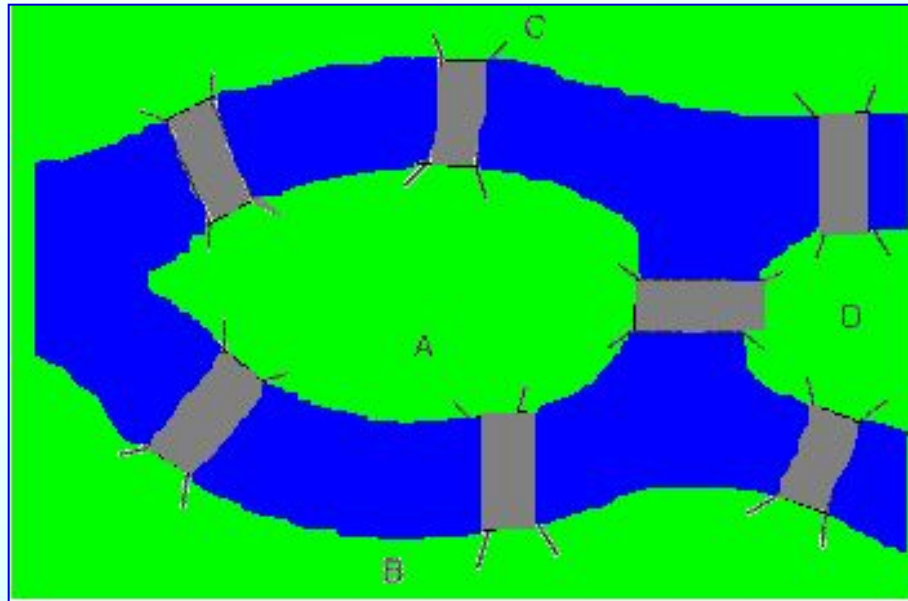
Бывший *Кенигсберг* (ныне *Калининград*) расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинuty мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.



[Дальше](#)

Задача о Кенигсбергских мостах

Кенигсбергцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причём на каждом мосту следовало побывать только один раз.



[Дальше](#)



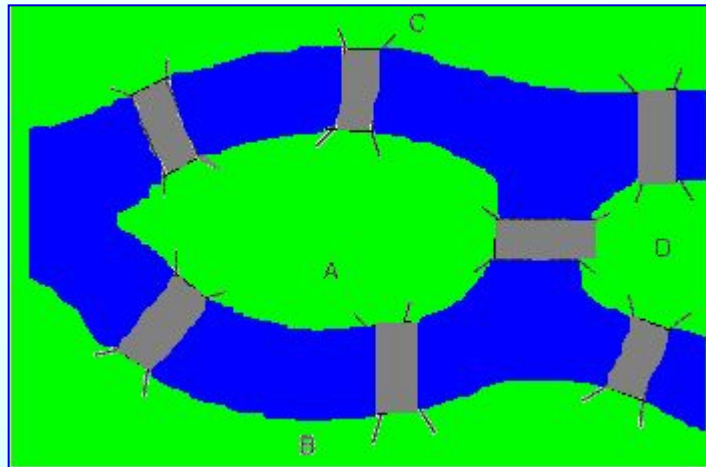
Я здесь
уже был!



[далее](#)

Задача о Кенигсбергских мостах

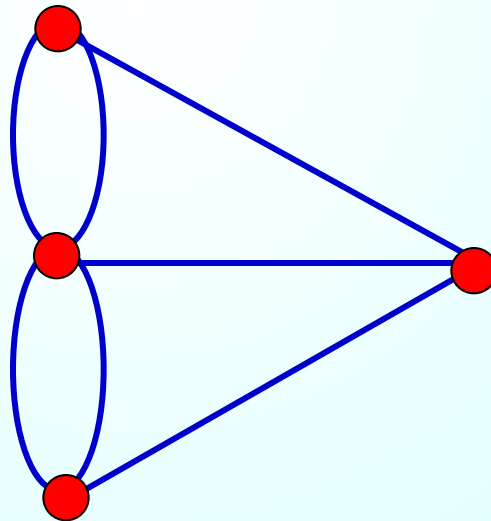
Пройти по Кенигсбергским мостам, соблюдая заданные условия, нельзя. Прохождение по всем мостам при условии, что нужно на каждом побывать один раз и вернуться в точку начала путешествия, на языке теории графов выглядит как задача изображения «одним росчерком» графа.



[дальше](#)

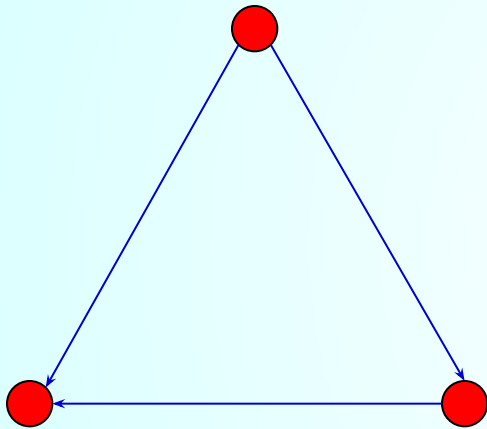
Задача о Кенигсбергских мостах

Но, поскольку граф на этом рисунке имеет четыре нечетные вершины, то такой граф начертить «одним росчерком» невозможно.

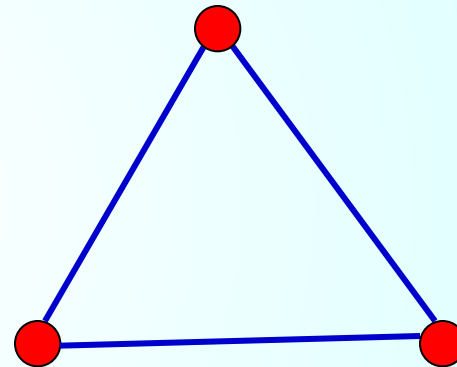


Свойства графа

- Ориентированный граф



Неориентированный граф



Маршрут в графе это путь, ориентацией дуг которого можно пренебречь.

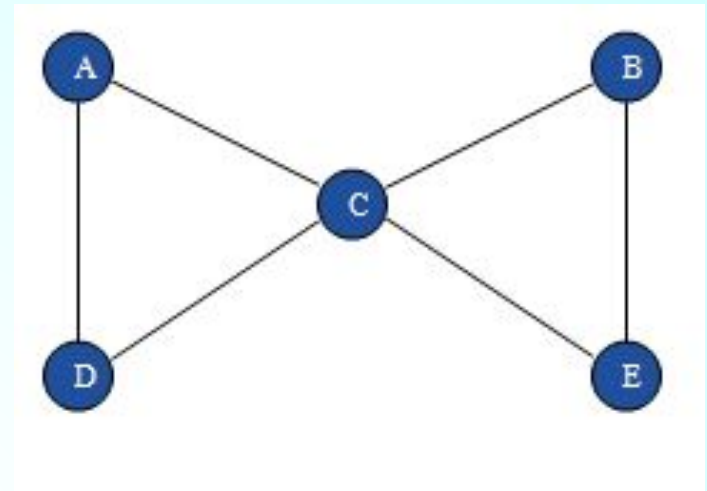
Цепь - маршрут, в котором все ребра попарно различны.

Цикл - замкнутый маршрут, являющийся цепью.

Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называют **простой цепью**.

Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называются **простым циклом**.

Граф называется **связным**, если в нем для любых двух вершин имеется маршрут, соединяющий эти вершины.



A, C, A, D – маршрут, но не цепь;

A, C, E, B, C, D – цепь, но не простая цепь;

A, D, C, B, E, - простая цепь;

A, C, E, B, C, D, A – цикл, но не простой цикл;

A, C, D – простой цикл;

Одним росчерком

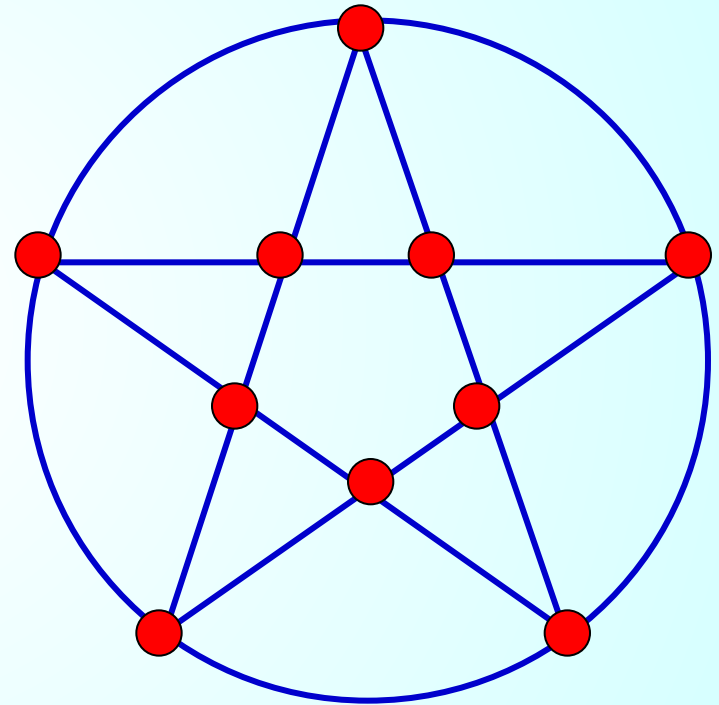
Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, называется **эйлеровым**.

Решая задачу О кенигсбергских мостах, Эйлер сформулировал свойства графа:

Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

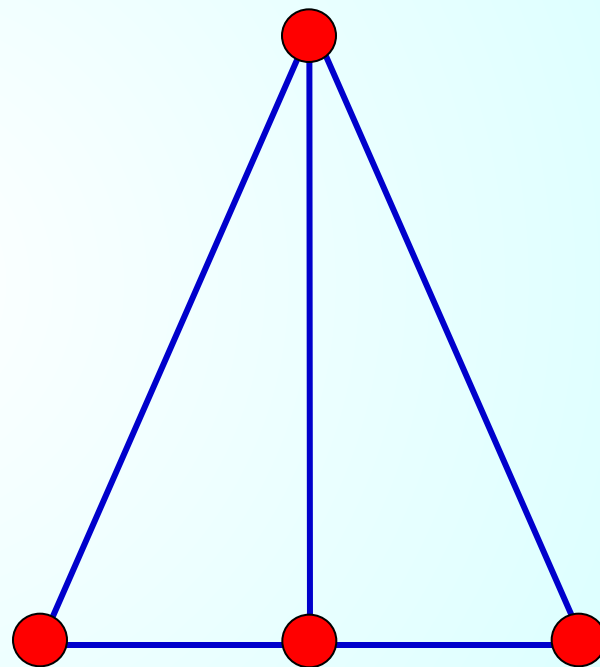
Одним росчерком

Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.



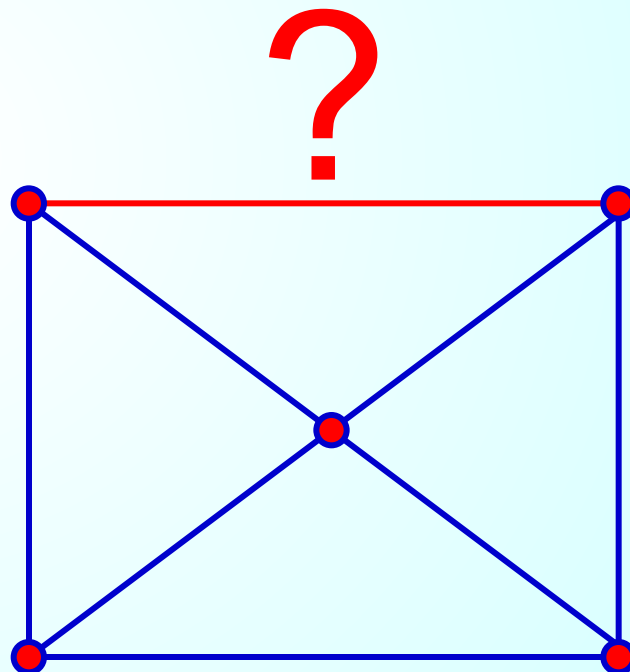
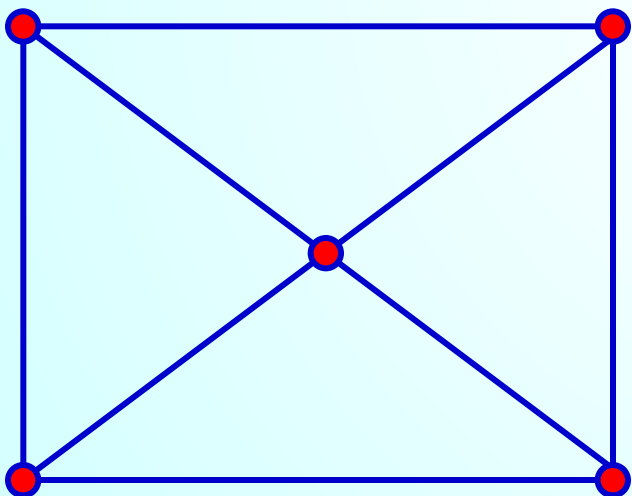
Одним росчерком

Граф, имеющий всего **две нечетные** вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.



Одним росчерком

Граф, имеющий более **двух нечетных** вершин, невозможно начертить «одним росчерком».



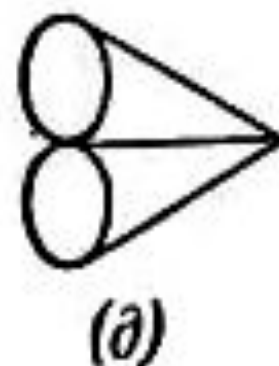
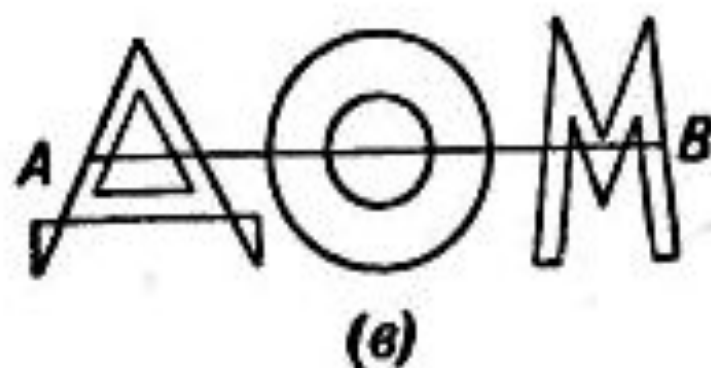
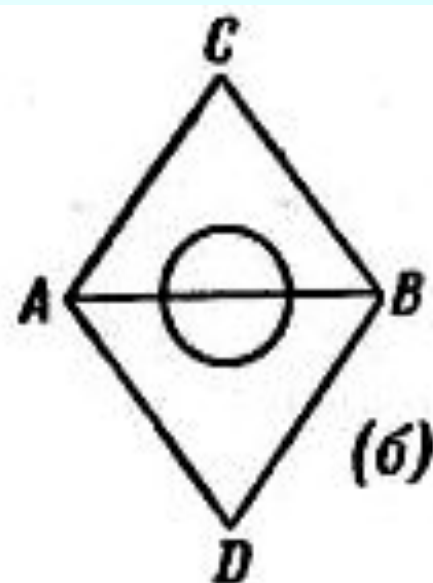
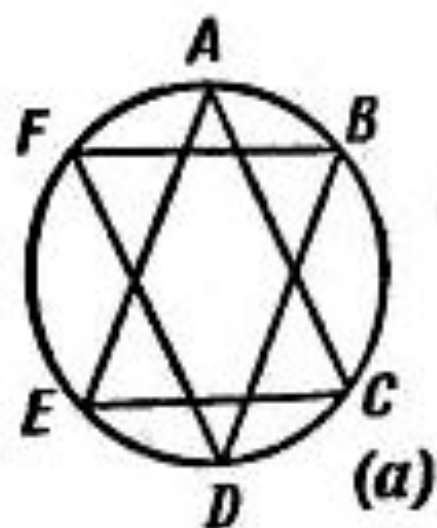
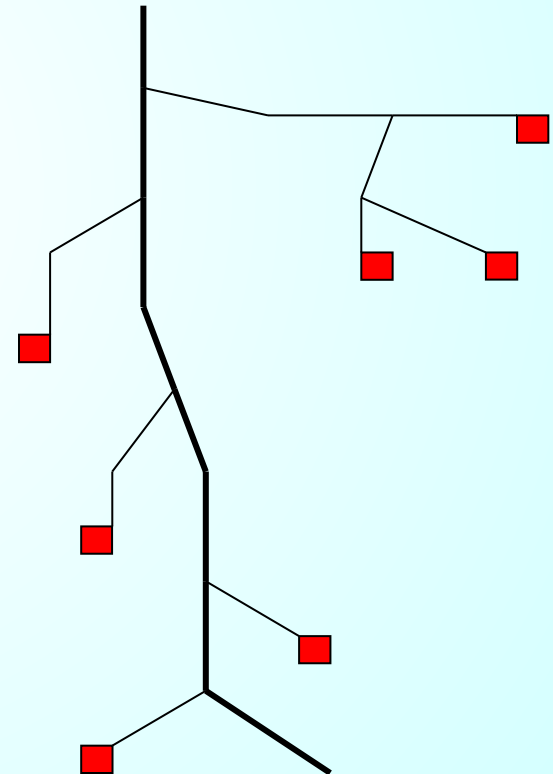
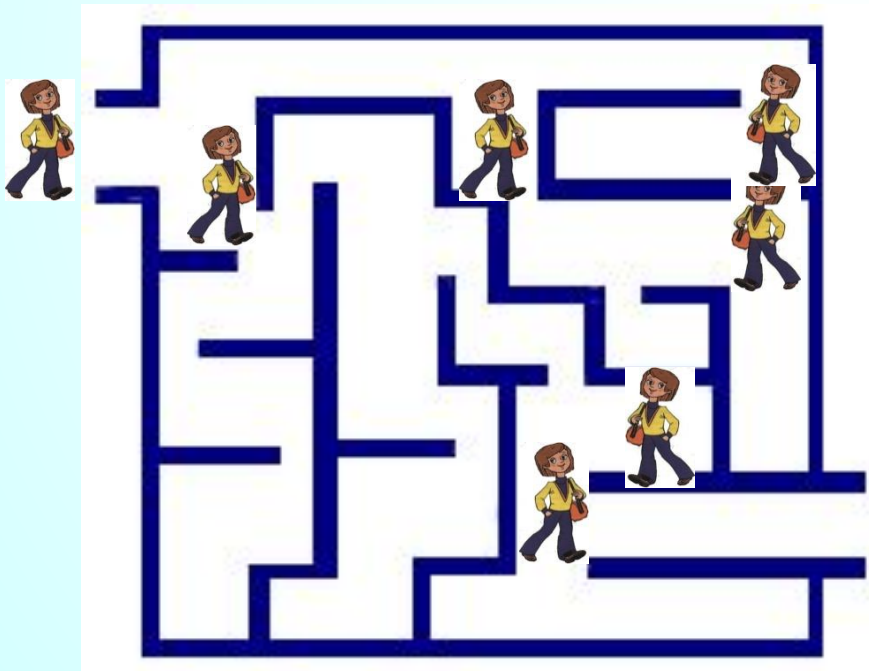
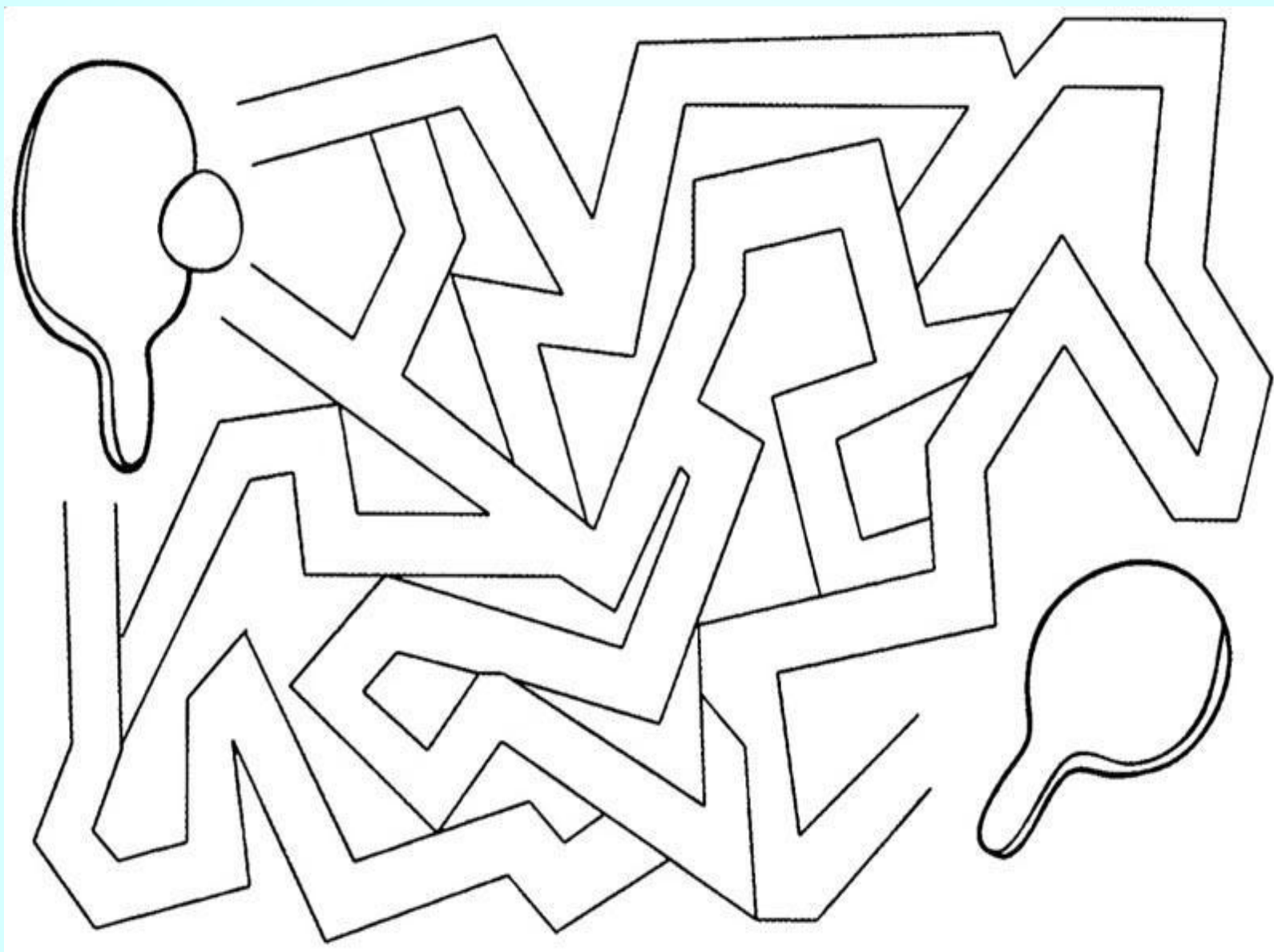


Рис. 155. Попробуйте зачертить каждую фигуру одним росчерком, не проводя более одного раза по одной и той же линии.

Применение графов

Лабиринт - это граф. А исследовать его - это найти путь в этом графе.





Первый многосвязный садовый лабиринт был сооружён в 1820-е годы в Чевнинге в Великобритании.

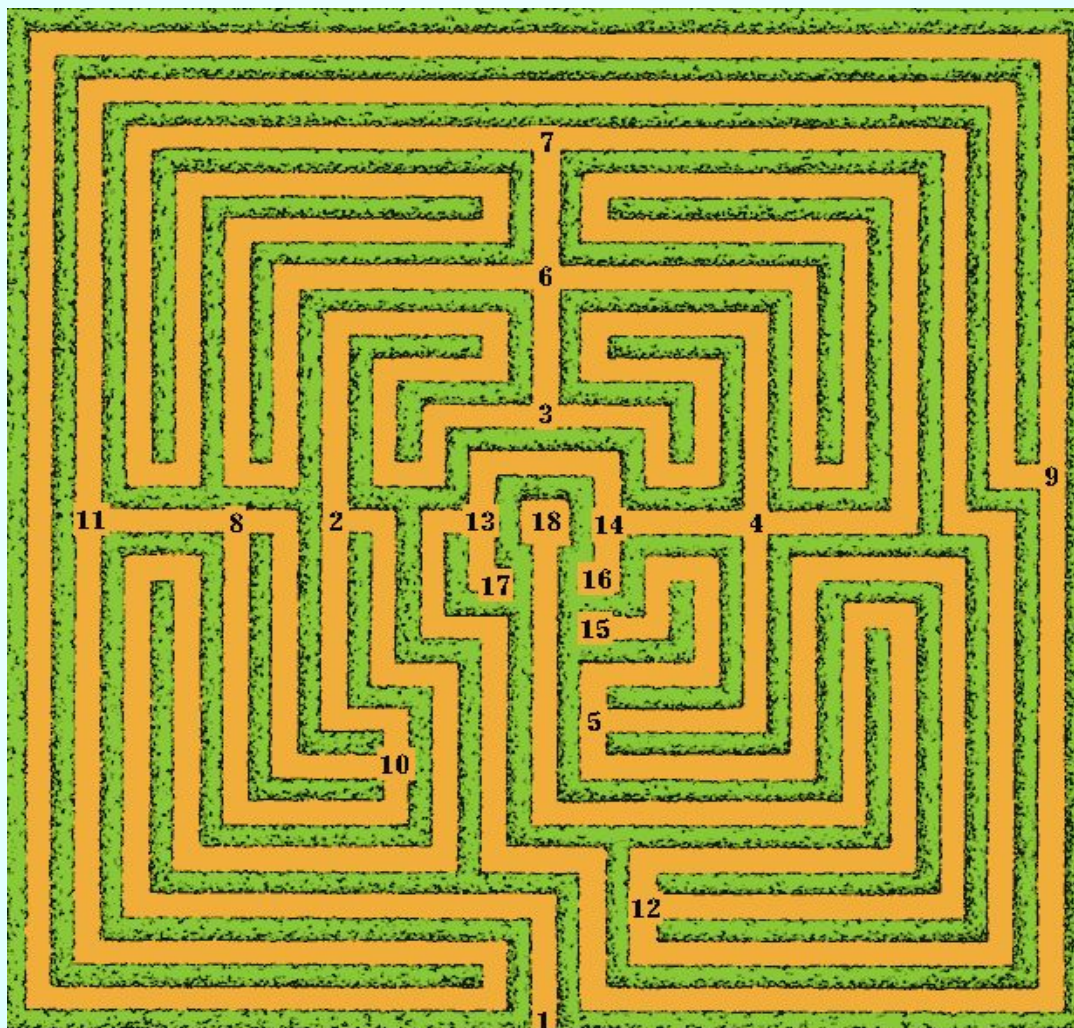
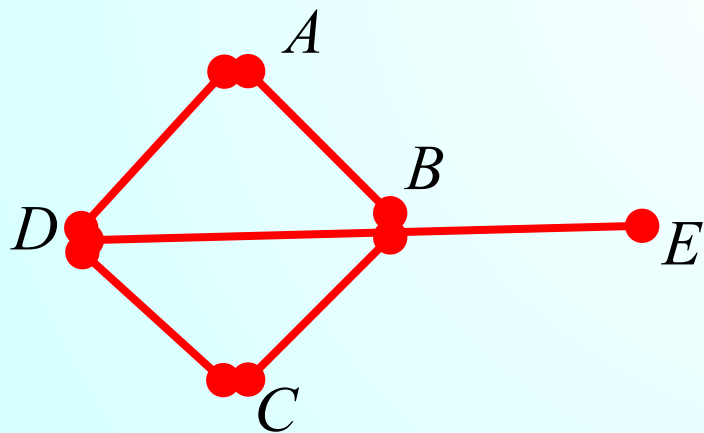


Схема «зелёного» лабиринта в Чевнинге

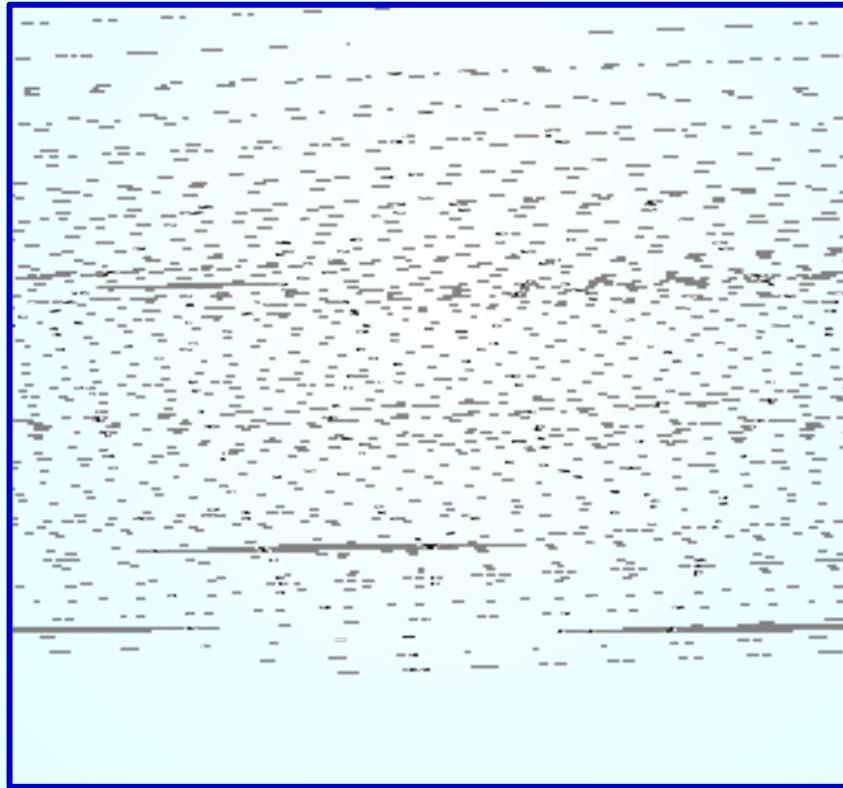
ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА
НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ
КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ,
НАЗЫВАЕТСЯ ГАМИЛЬТОНОВЫМ.



(C, D, A, B, E) –
гамильтонов путь

В 1857 году ирландский математик Гамильтон предложил игру, названную «Путешествием по додекаэдру». Игра сводилась к обходу по ребрам всех вершин правильного додекаэдра, при условии, что ни в одну из вершин нельзя заходить более одного раза.



Выводы

Графы – это замечательные математические объекты, с помощью, которых можно решать математические, экономические и логические задачи. Также можно решать различные головоломки и упрощать условия задач по физике, химии, электронике, автоматике. Графы используются при составлении карт и генеалогических древ.

В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: «**Теория графов**».

ТЕОРЕМА

В ГРАФЕ СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

*Степень A + степень B + степень C + ... = 2 * число рёбер*

ТЕОРЕМА

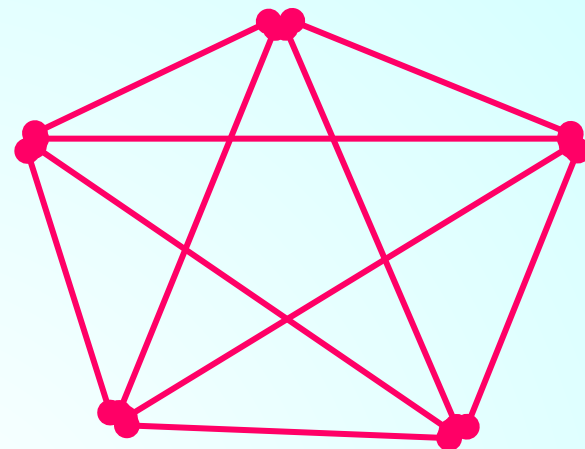
ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

СЛЕДСТВИЕ

ЧИСЛО ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА, В КОТОРЫХ СХОДИТСЯ НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО РЁБЕР, ЧЁТНО.

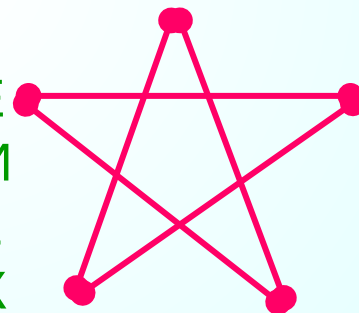
НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО ЗНАКОМЫХ В ЛЮБОЙ КОМПАНИИ ВСЕГДА ЧЁТНО.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.

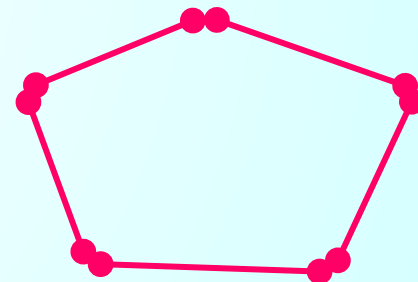


G_2

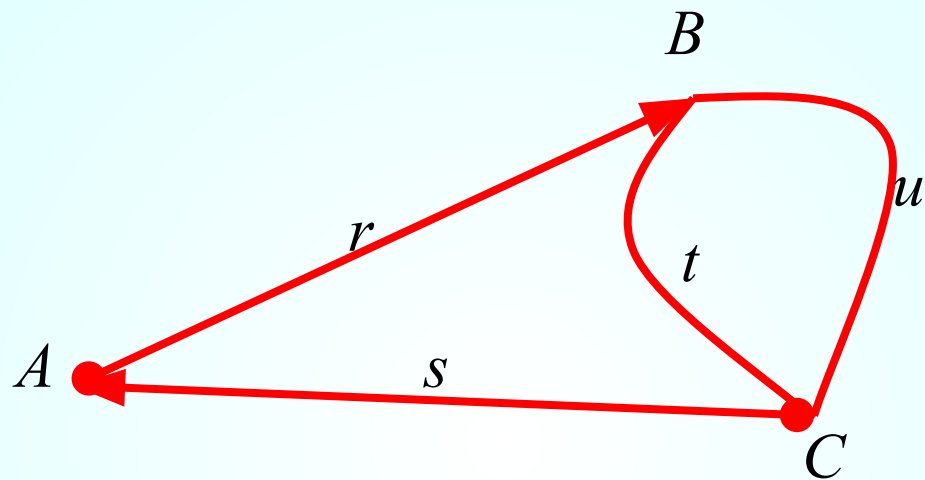
ДОПОЛНЕНИЕМ ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.



G_5

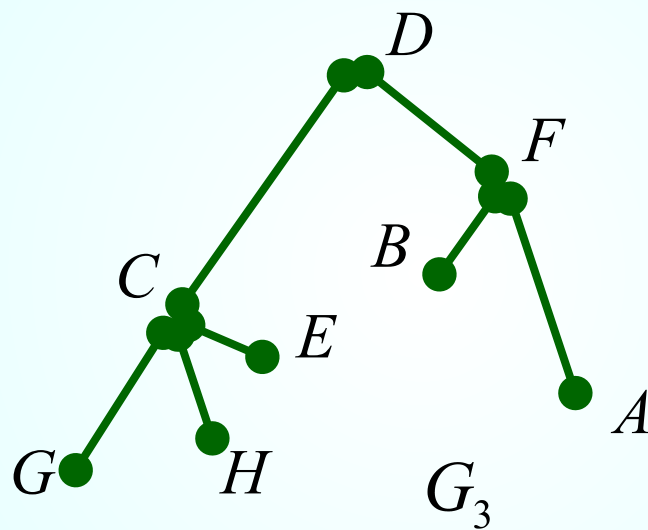


ДОПОЛНЕНИЕ ГРАФА
ДО ГРАФА G_5
 G_2



**ЦИКЛ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО
И КОНЕЦ.**

Деревом называется связный граф, не имеющий
ЦИКЛОВ



*G, H, E, B, A -
ВИСЯЧИЕ
ВЕРШИНЫ*

Задание неориентированного графа с помощью матриц

Матрица инцидентности. Это матрица A с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующего рёбрам. Если граф неориентированный, то ненулевое значение в ячейке матрицы указывает связь между вершиной и ребром (их инцидентность).

Матрица смежности. Это матрица $n \times n$ где n - число вершин, где $b_{ij} = 1$, если существует ребро, идущее из вершины x в вершину y , и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Матрицы инцидентности и смежности для следующего графа :



Задание ориентированного графа с помощью матриц

Каждый элемент матрицы **смежности** определяется следующим образом:

$a_{ij} = 1$, если существует дуга (x_i, x_j) ,

$a_{ij} = 0$, если нет дуги (x_i, x_j) .

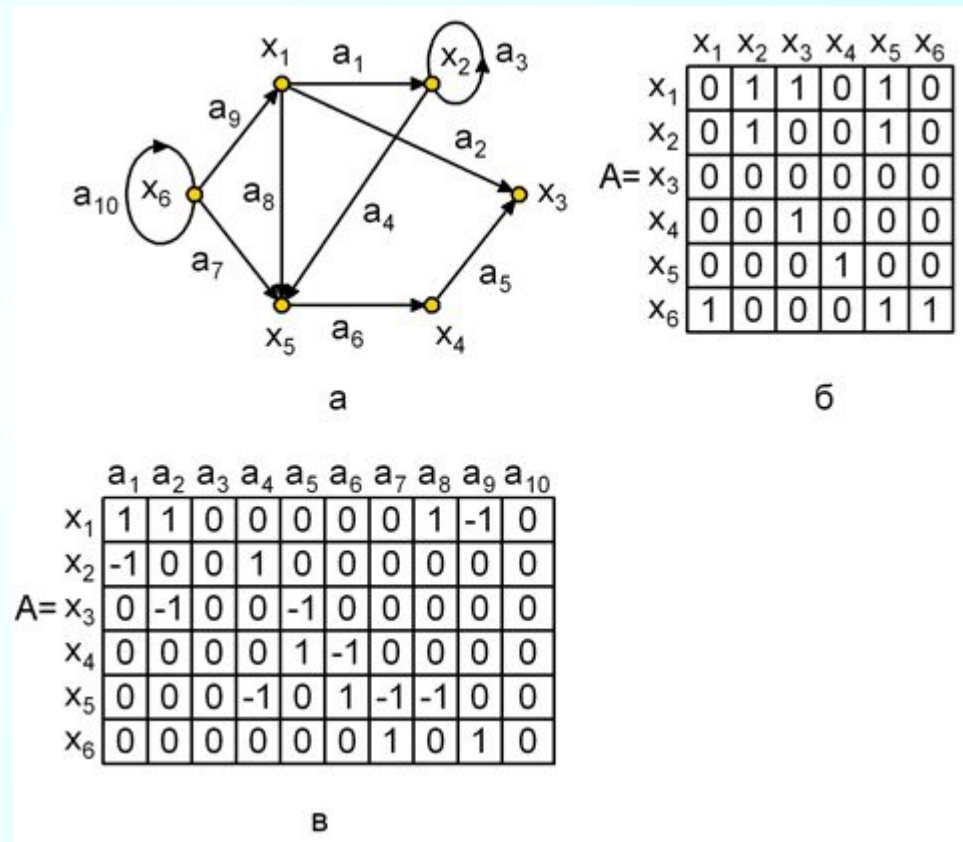
Каждый элемент матрицы **инцидентности**

определяется следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_j ,

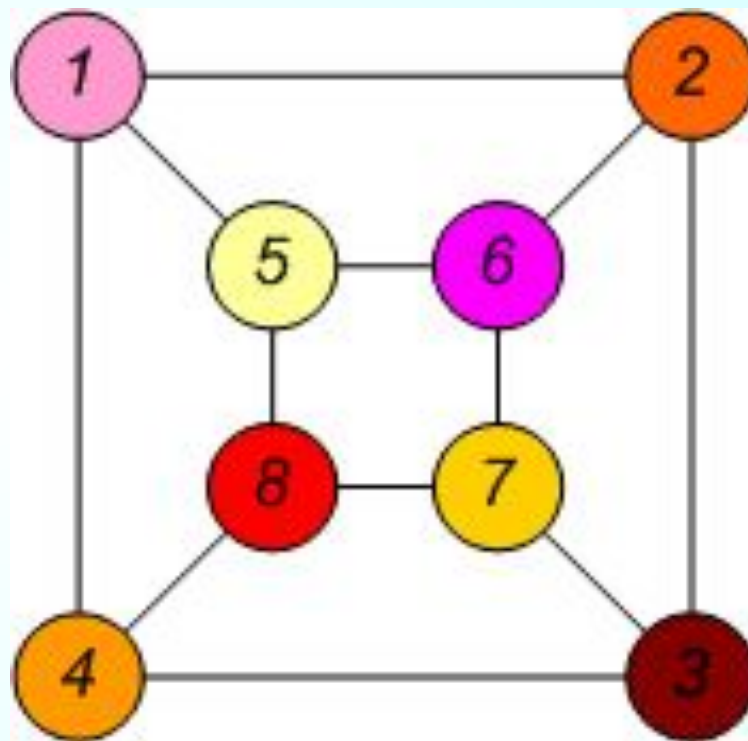
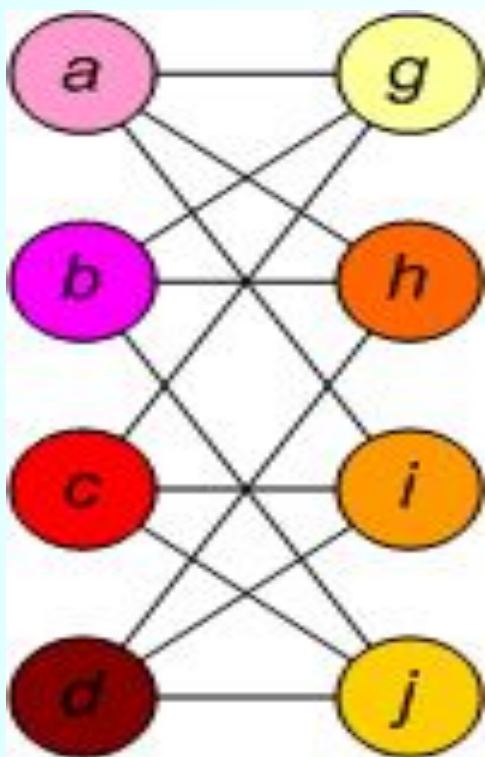
$b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_j ,

$b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j или если a_j является петлей.



Орграф и его матричное представление: а – орграф; б – матрица смежности; в – матрица инцидентности

Изоморфные графы

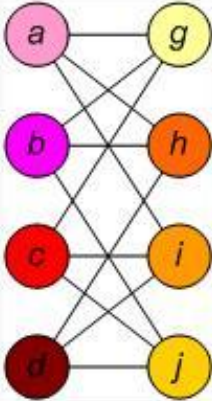
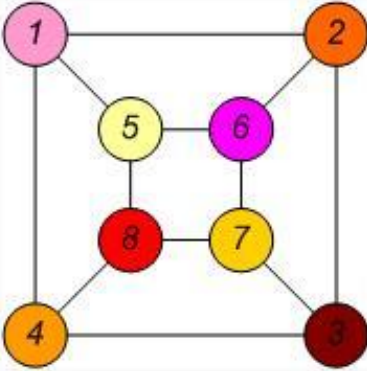


Изоморфизм графов

Два графа $G=(V_1, E_1)$, $H=(V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует соответствие между вершинами графа G и вершинами графа H , сохраняющее отношение смежности.

Изоморфные графы отличаются только метками вершин.

Любой неориентированный граф превращается в орграф заменой каждого ребра двумя противоположно направленными ребрами. Два полученные таким образом орграфа, очевидно, изоморфны тогда и только тогда, если изоморфны исходные графы.

Граф G	Граф H	Изоморфизм между графами G и H
		$\begin{aligned}f(a) &= 1 \\f(b) &= 6 \\f(c) &= 8 \\f(d) &= 3 \\f(g) &= 5 \\f(h) &= 2 \\f(i) &= 4 \\f(j) &= 7\end{aligned}$

Применение графов

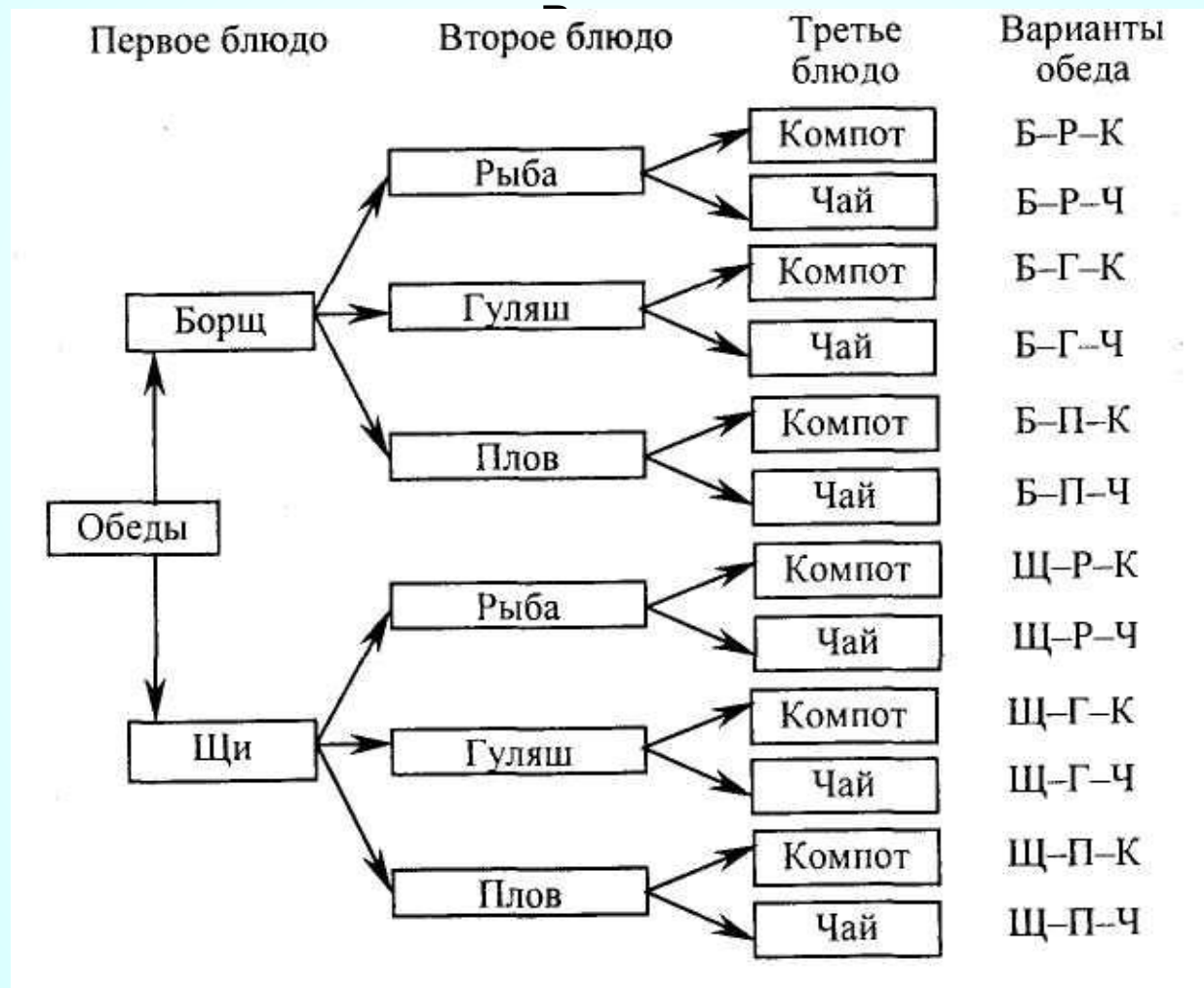
Использует графы и дворянство.

На рисунке приведена часть генеалогического дерева знаменитого дворянского рода Л. Н. Толстого. Здесь его вершины – члены этого рода, а связывающие их отрезки – отношения родственности, ведущие от родителей к детям.



Задача №1.

Перечислить все возможные варианты обедов из трех блюд (одного первого, одного второго и одного третьего блюда), если в меню столовой имеются два первых блюда: щи (*щ*) и борщ (*б*); три вторых блюда: рыба (*р*), гуляш (*г*) и плов (*п*); два третьих: компот (*к*) и чай (*ч*).



Применение графов

Задача 1:

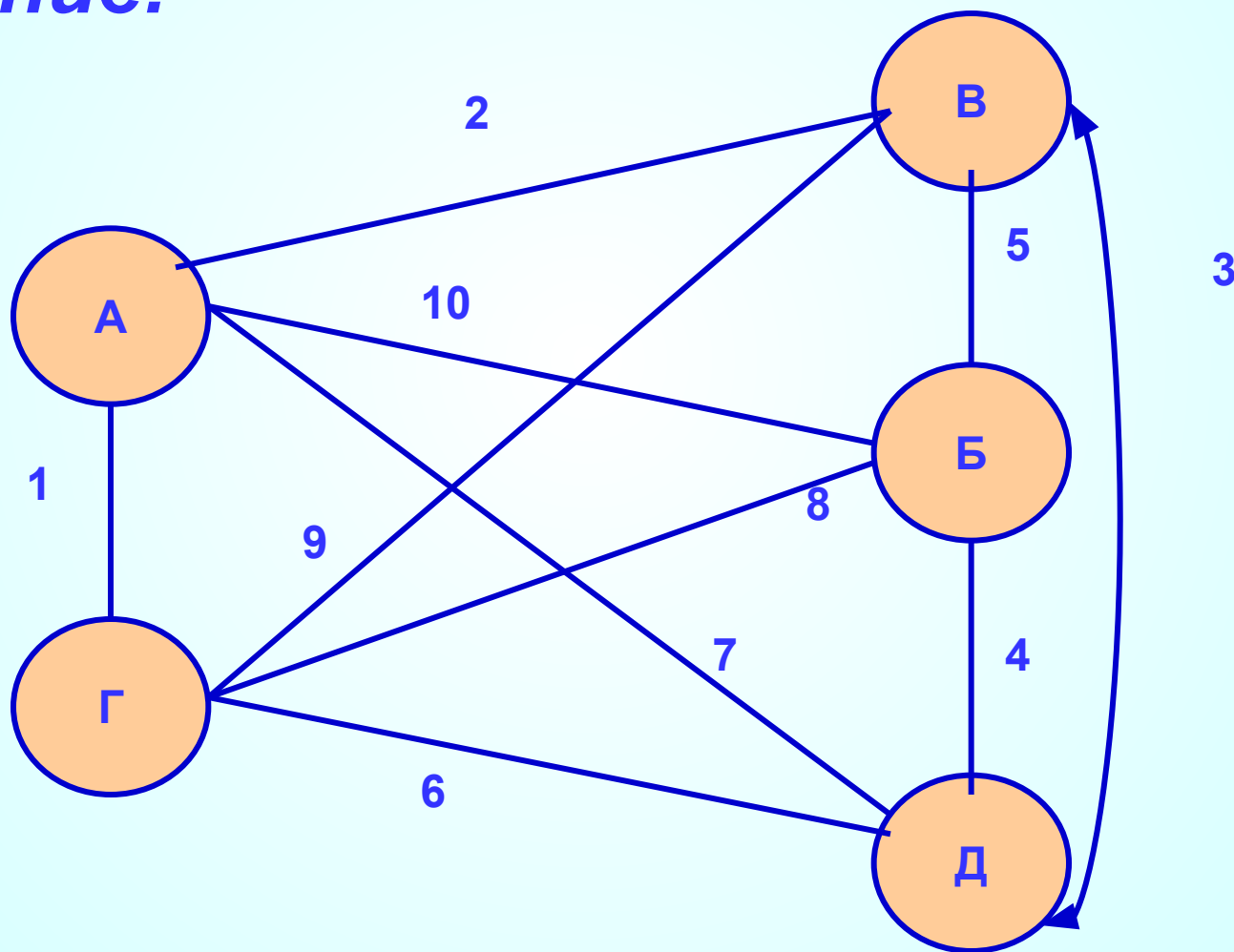
Аркадий, Борис. Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?



[дальше](#)

Применение графов

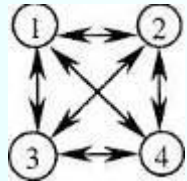
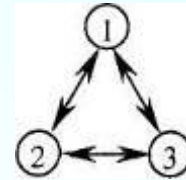
Решение:



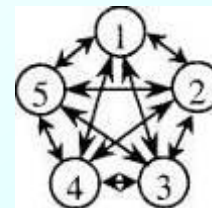
[далее](#)

Задача 2. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали:
1) 3 человека; 2) 4 человека; 3) 5 человек?

1) Во встрече участвовали 3 человека:



2) Во встрече участвовали 4 человека:



3) Во встрече участвовали 5 человек.



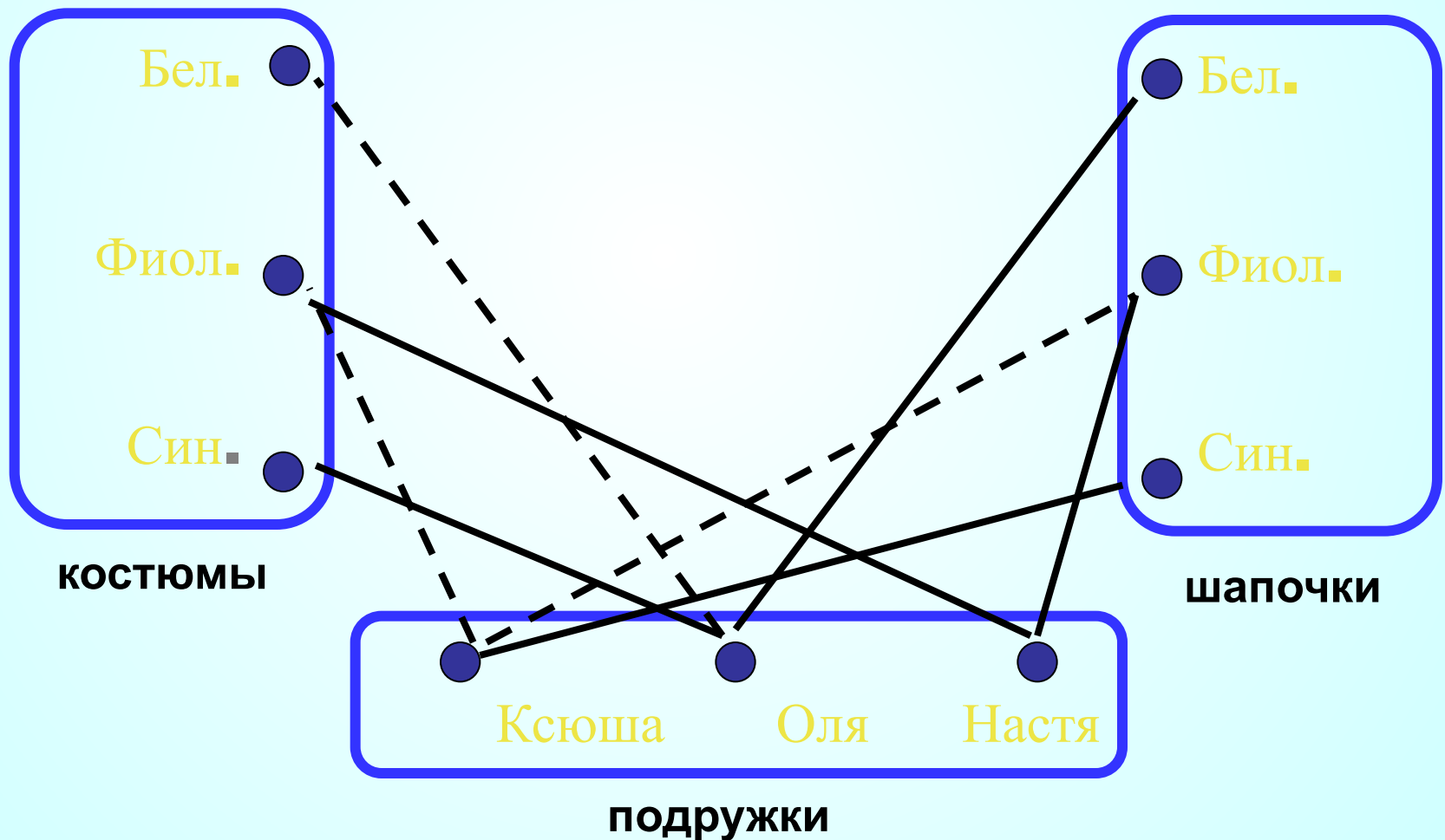
Логические задачи

Задача «Подружки»

У трёх подружек - Ксюши, Насти и Оли - новогодние карнавальные костюмы белого, фиолетового и синего цветов, и шапочки тех же цветов. У Насти цвет костюма и шапочки совпали, у Ксюши ни костюм, ни шапочка не были фиолетового цвета, а Оля была в белой шапочке, но цвет костюма у неё не был белым.

Как были одеты девочки?

Вывод: Настя в фиолетовом костюме и шапочке,
Ксюша в белом костюме и синей шапочке,
Оля в синем костюме и белой шапочке.



Вывод:

Настя в фиолетовом костюме и шапочке,

Ксюша в белом костюме и синей шапочке,

Оля в синем костюме и белой шапочке.

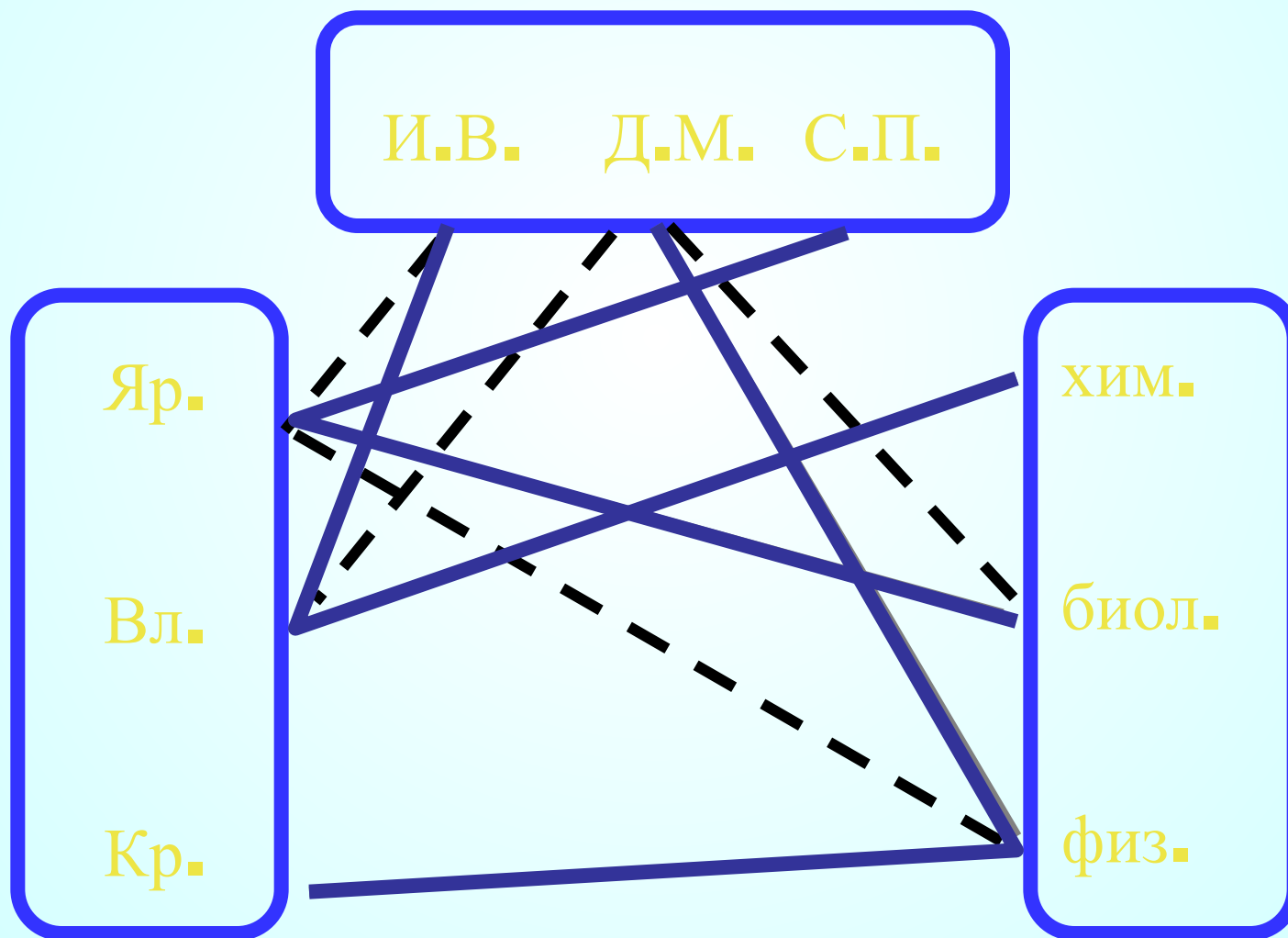
Задача «Учительницы»

Три учительницы - Ирина Васильевна, Дарья Михайловна и Софья Петровна - преподают химию, биологию и физику в школах Ярославля, Владимира и Краснодара. Известно, что

1. И.В. работает не в Ярославле, а Д.М. - не во Владимире;
2. та, которая живет в Ярославле, преподает не физику;
3. работающая во Владимире – учитель химии;
4. Д.М. преподает не биологию.

Кто в каком городе живет и какой предмет преподает?

Итак, Д.М. – физик из Краснодара, И.В. – живет во Владимире (т.к. не в Ярославле) и преподает химию, тогда С.П. – ярославна - биолог.



Итак:

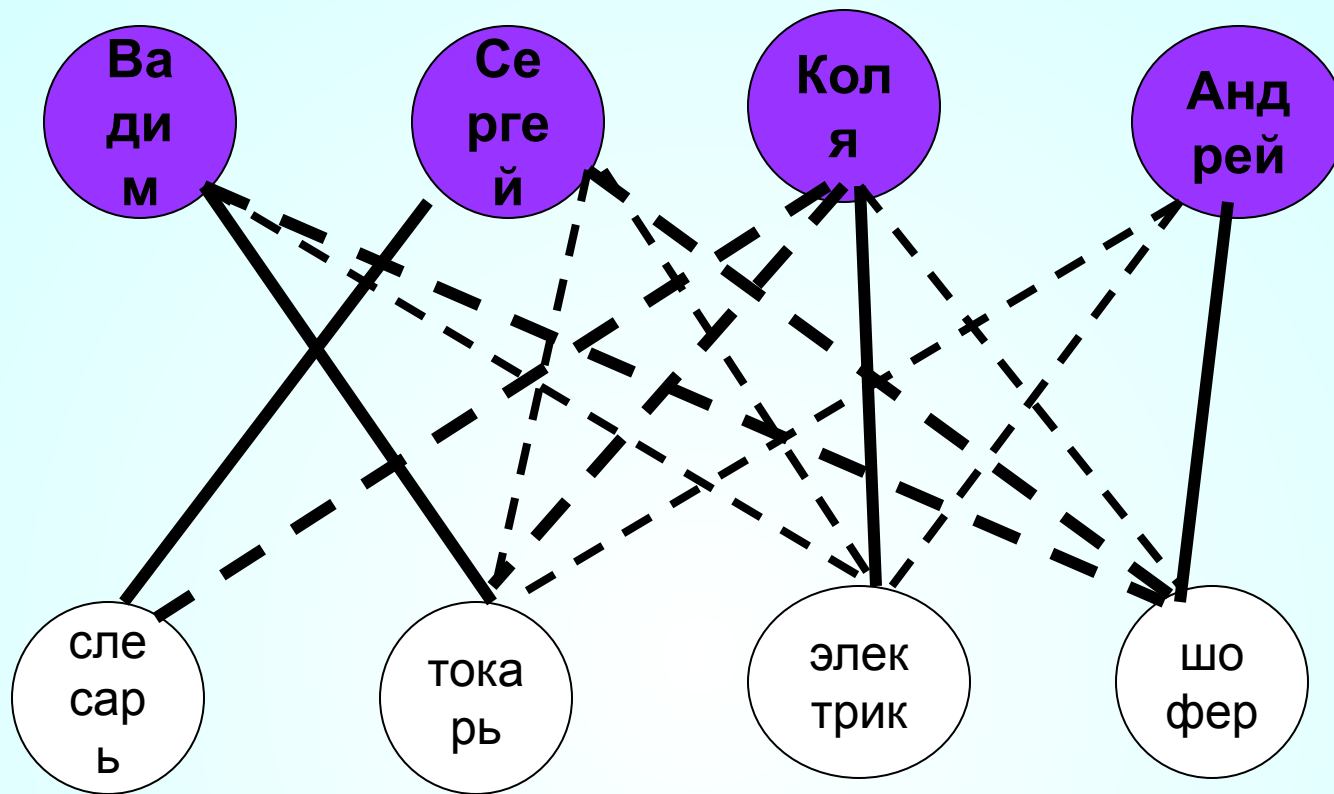
Д.М. – физик из Краснодара,

И.В. – живет во Владимире (т.к. не в Ярославле) и преподает химию,

С.П. – из Ярославля - биолог.

Условие задачи

В одном дворе живут четыре друга.
Вадим и шофер старше Сергея,
Николай и слесарь занимаются боксом,
Электрик-младший из друзей.
По вечерам Андрей и токарь играют в
домино против Сергея и электрика.
Определите профессию каждого из
друзей.



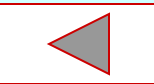
Начинаем анализировать полученную схему.

От каждого верхнего кружка должно исходить 4 линии к кружкам нижнего ряда, одна из которых сплошная (прочная связь), три-пунктирные. (разрывная связь). И от кружков нижнего ряда-аналогично.

От Сергея отходит 3 разрывные связи, значит, четвертая- прочная связь

Ответ готов:

Вадим-токарь, Сергей-слесарь, Коля-электрик, Андрей-шофер



Условие задачи

Шахматный турнир проводится по круговой системе, при которой каждый участник встречается с каждым ровно один раз, участвуют семь школьников.

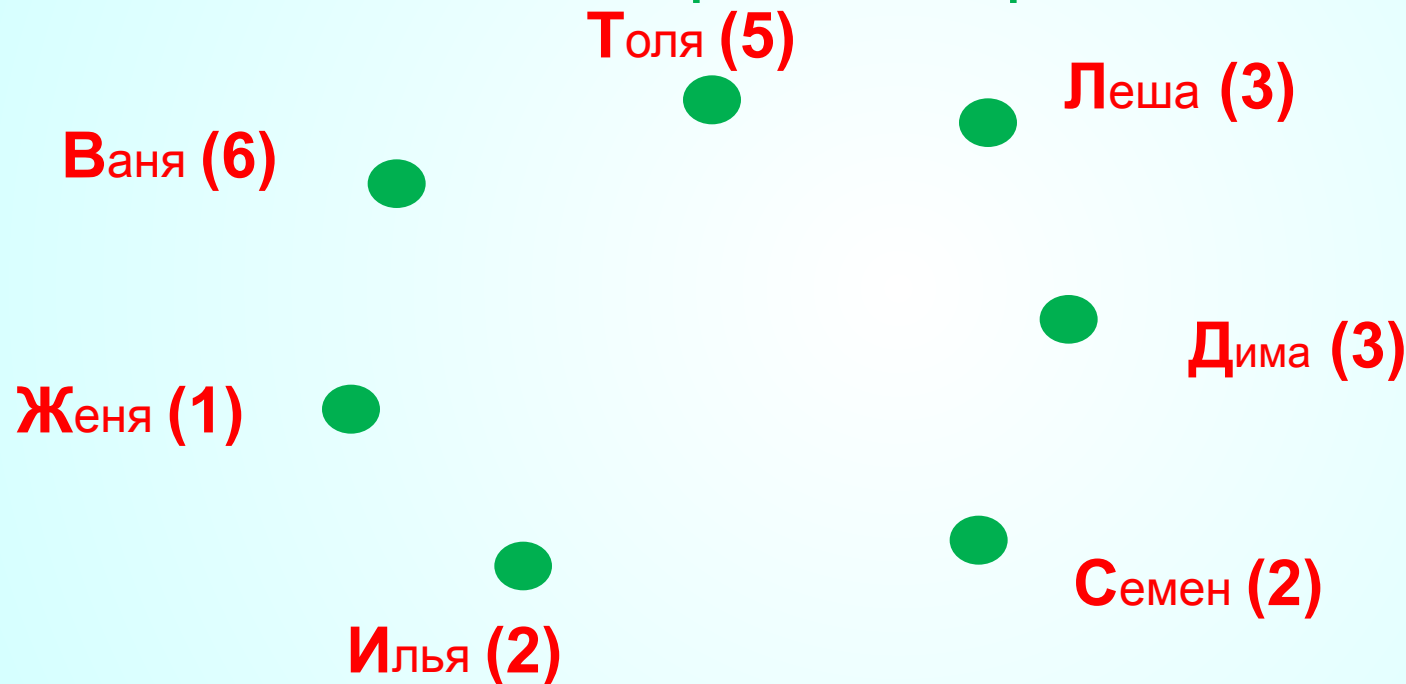
Известно, что в настоящий момент:

- 1) **Ваня** сыграл **шесть** партий;
- 2) **Толя** сыграл **пять** партий;
- 3) **Леша** и **Дима** сыграли **по три** партии;
- 4) **Семен** и **Илья** сыграли **по две** партии;
- 5) **Женя** сыграл **одну** партию.

Требуется определить:

с кем сыграл Леша

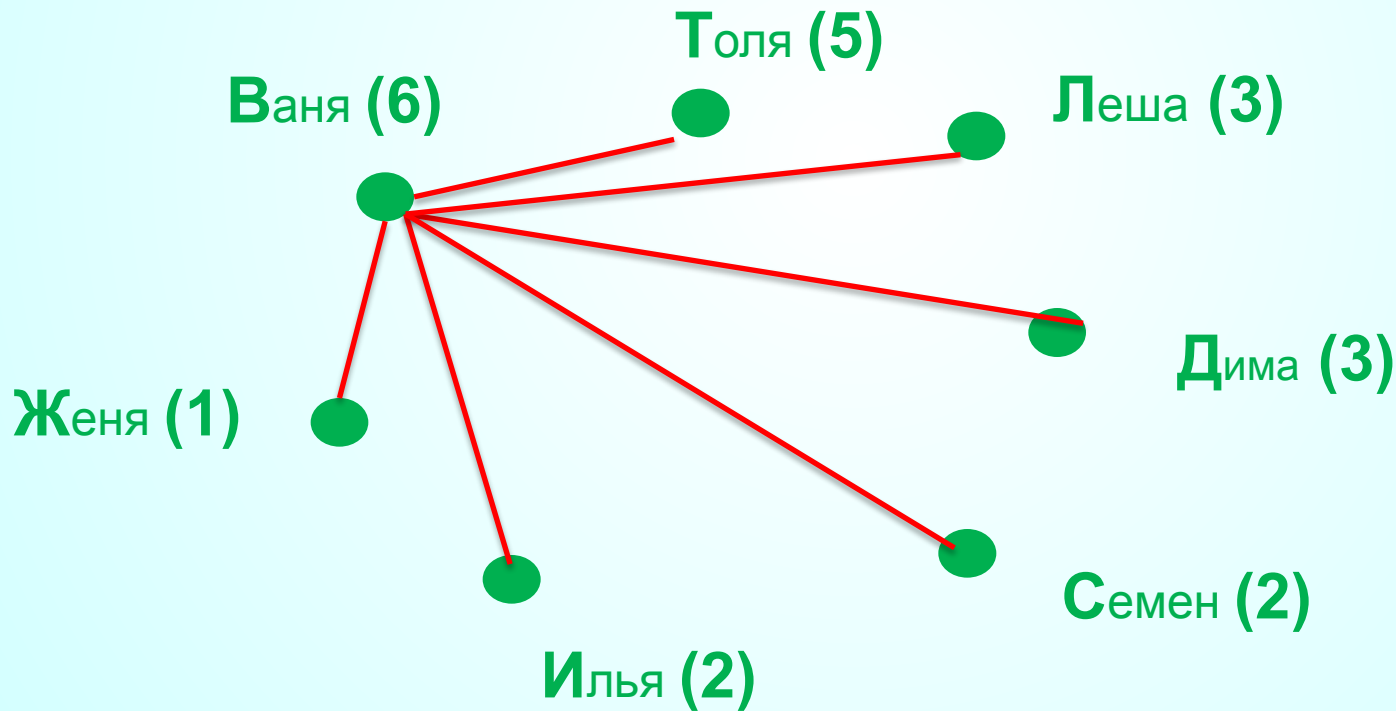
Изобразим участников турнира точками
Для каждой точки укажем ее имя
(по первой букве имени игрока)
и количество партий, сыгранные этим игроком



*Число в скобках называют степенью вершины,
оно показывает сколько ребер выходит из данной
вершины*

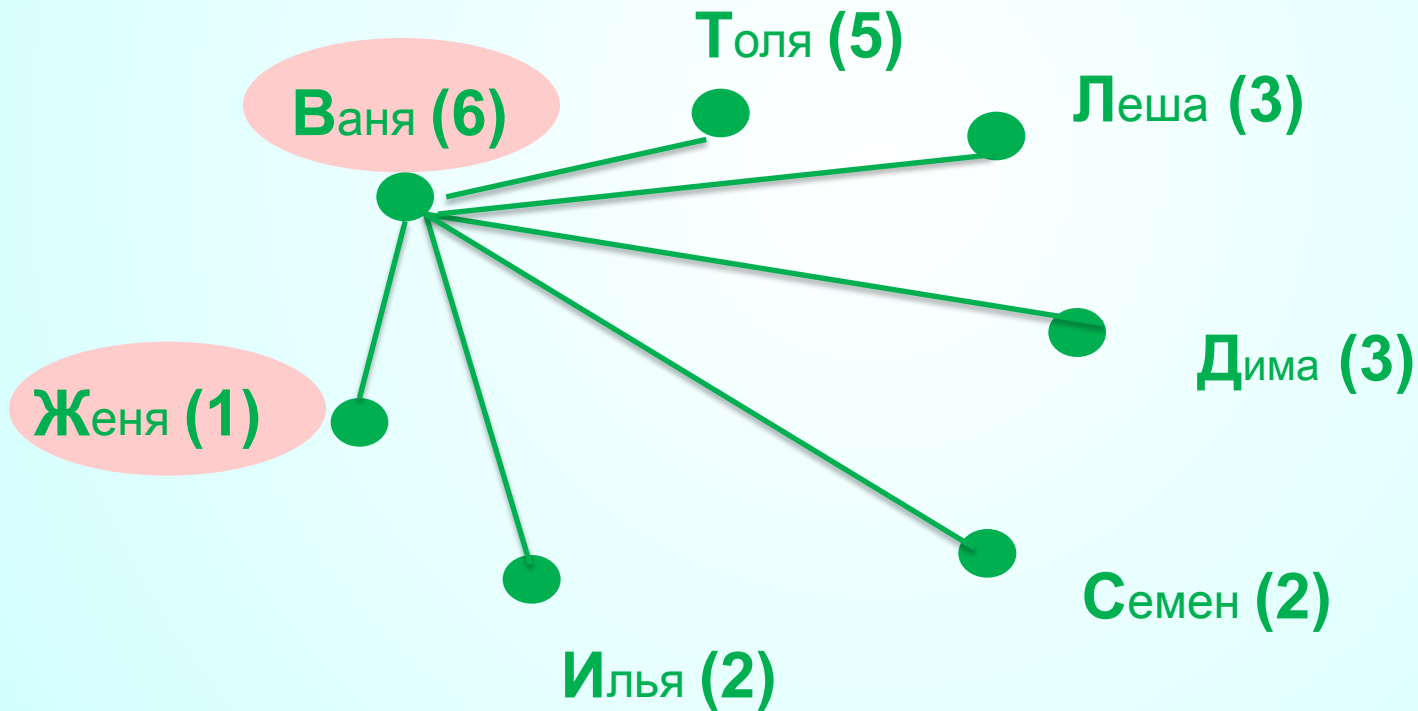
Будем строить ребра графа с учетом степеней вершин

*Начать построение ребер следует с вершины **В**, так как это единственная вершина, которая соединяется со всеми другими вершинами графа*



Сделаем первые выводы:

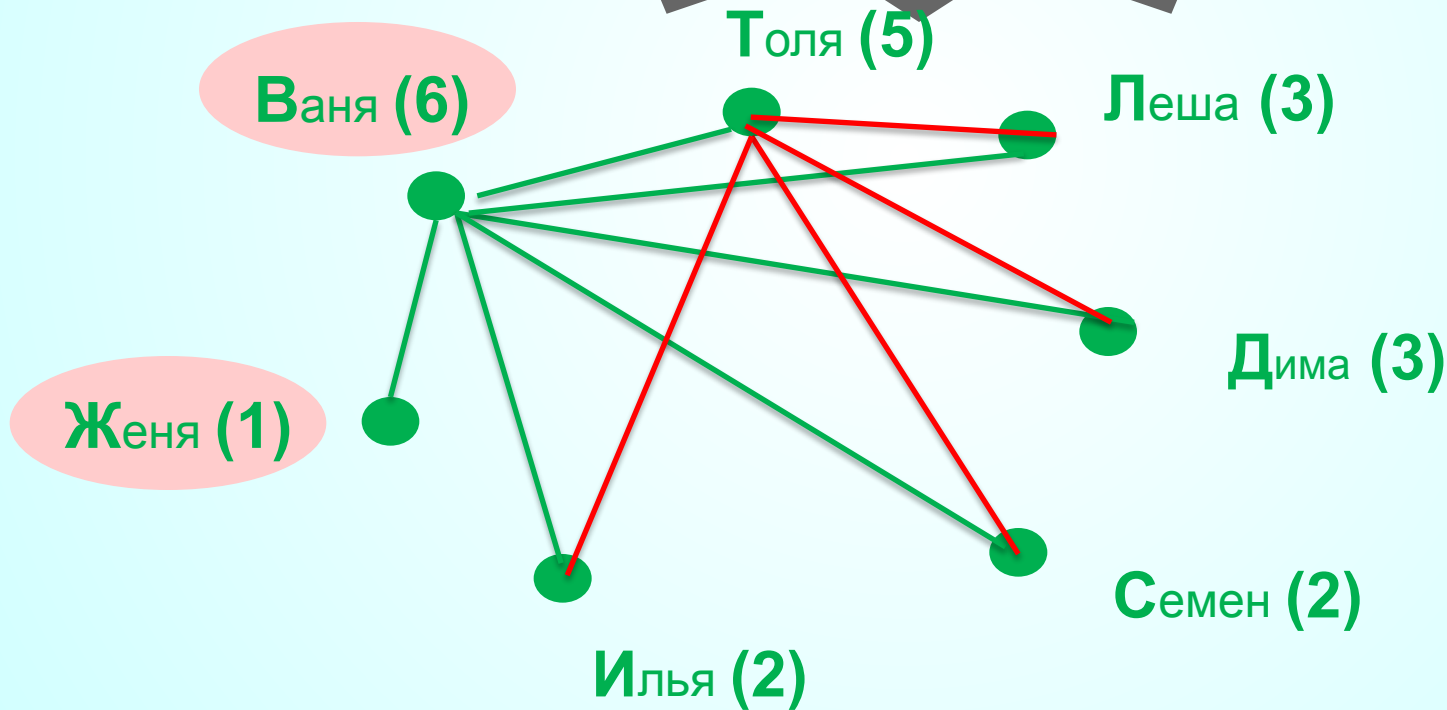
Для вершин *В* и *Ж* построены все возможные ребра



Построим следующие ребра

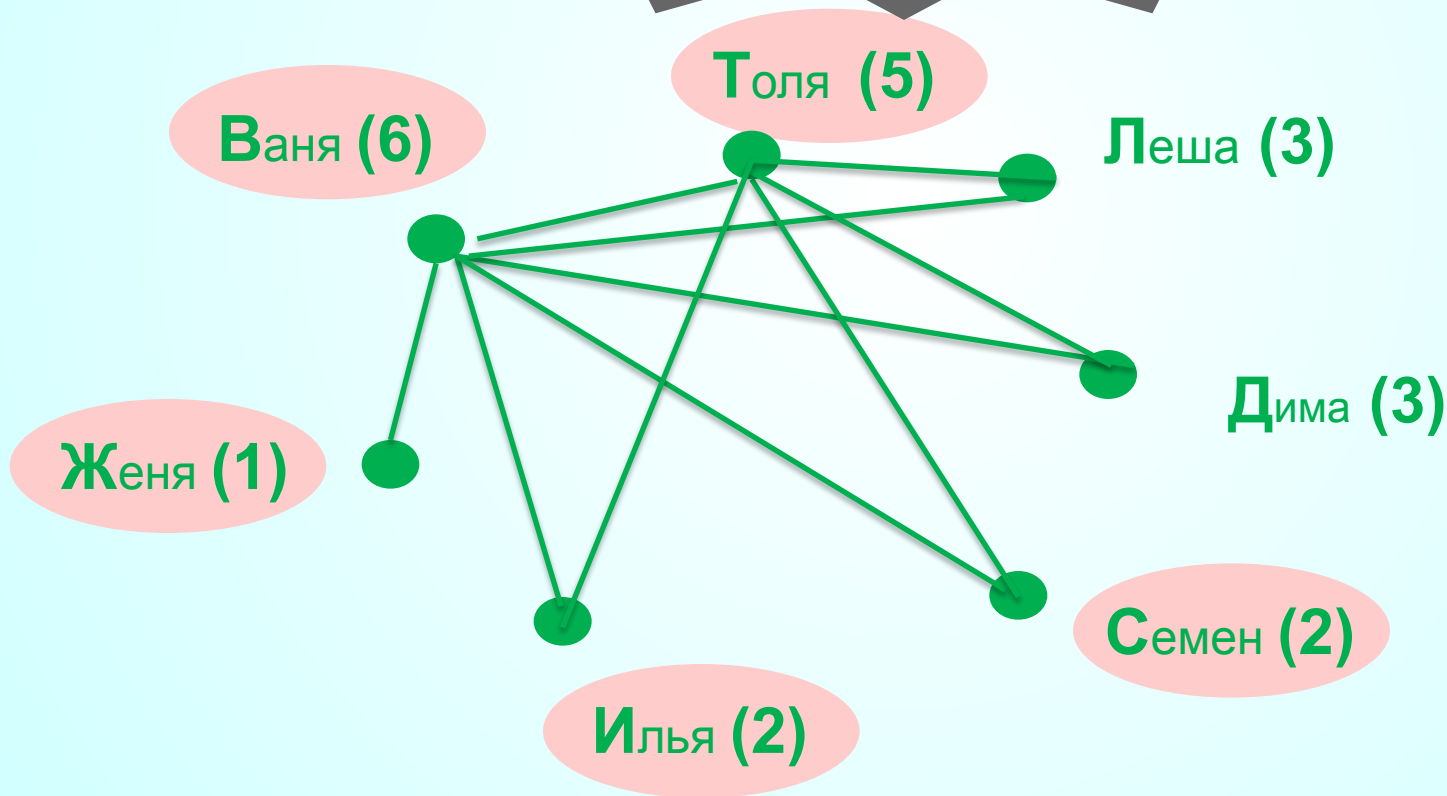
Теперь однозначно определяются ребра **вершины**
Т.

С учетом ребра **ВТ** надо построить четыре ребра



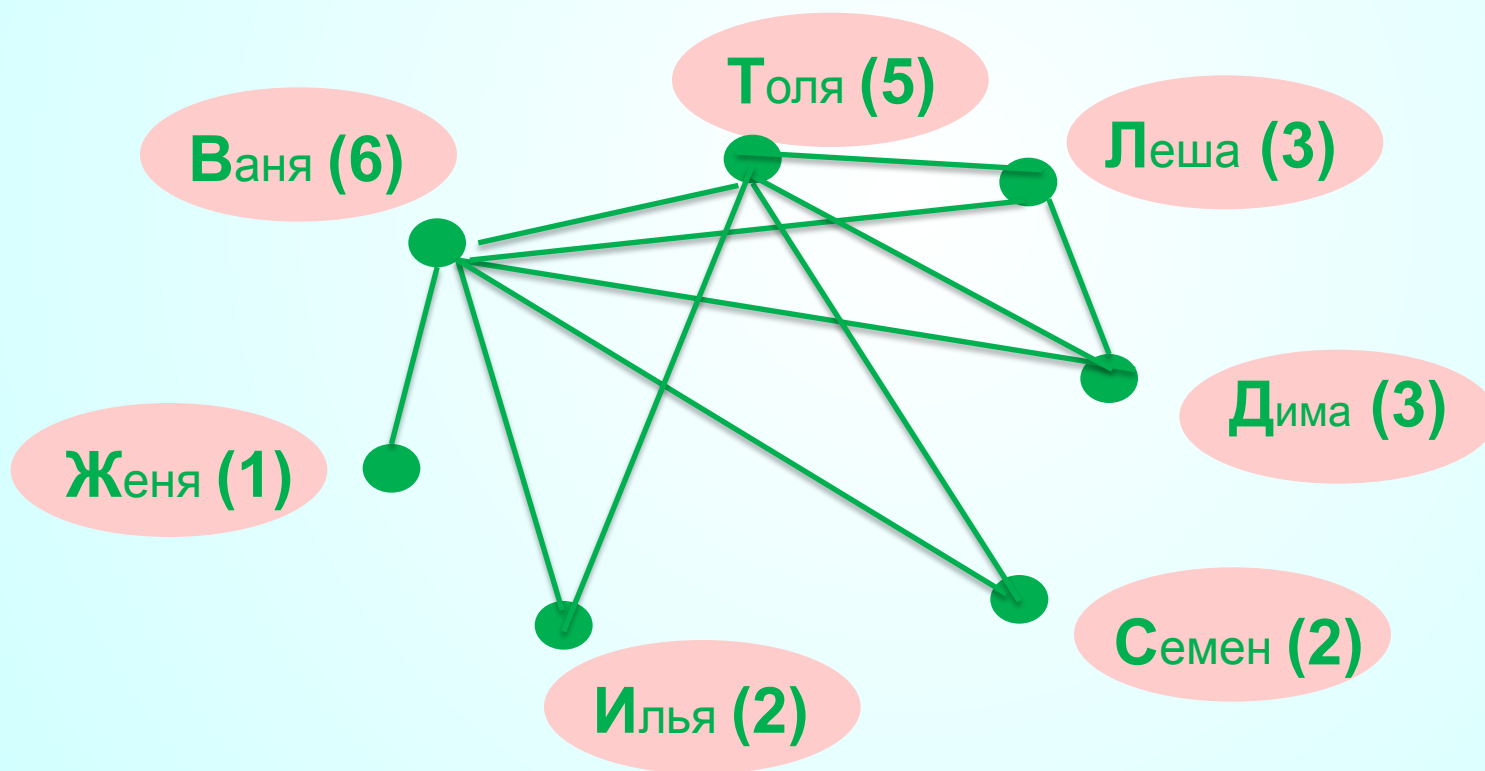
Пора делать новые выводы

*Все возможные ребра теперь построены для вершин
Ж, В, Т, а также для вершин **С** и **И***



Граф к задаче построен

Требовалось определить: с кем сыграл Леша.



ОТВЕТ: Леша играл с Толей, Ваней и Димой

Спасибо
за внимание