

II. Линейная независимость

1. Определения и примеры

1. Определения и примеры

Лемма 1.1:

Пусть S – подмножество векторного пространства V , тогда $\forall v \in V$,

$\text{span } S = \text{span}(S \cup \{v\})$ тогда и только тогда, когда $v \in \text{span } S$

Доказательство $\Rightarrow$ (необходимость) :

$v \in \text{span}(S \cup \{v\})$, тогда из того, что $\text{span } S = \text{span}(S \cup \{v\}) \rightarrow v \in \text{span } S$

Доказательство $\Leftarrow$ (достаточность) :

$$\text{span}(S \cup \{v\}) = \left\{ a_0 v + \sum_k a_k s_k \mid s_k \in S \right\}$$

$$v \in \text{span } S \rightarrow v = \sum_k v_k s_k$$

$$\rightarrow \text{span}(S \cup \{v\}) = \left\{ \sum_k (a_k + a_0 v_k) s_k \mid s_k \in S \right\} = \text{span } S$$

QED

Пример 1.2:

Пусть $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ так как $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Определение 1.3: Линейная независимость

Подмножество векторного пространства **линейно независимо**, если ни один из его элементов не является линейной комбинацией других.

В противном случае, множество называется **линейно зависимым**.

Лемма 1.4: Практический тест для определения ЛН.

$S = \{ \mathbf{s}_k \in V \mid k = 1, \dots, n \}$ есть ЛН т.и т.т.к.

$$\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_k = 0 \quad \forall k$$

Доказательство $\Rightarrow$:

Если S есть ЛЗ система,
то можно записать

$$\mathbf{s}_j = \sum_{k \neq j} c_k \mathbf{s}_k \quad \forall j.$$

Тогда, $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0}$ выполняется только при $c_k = 0 \quad \forall k$

Доказательство $\Leftarrow$ (от противного) :

Если S не является
ЛН, то $\exists j$ так что

$$\mathbf{s}_j = \sum_{k \neq j} c_k \mathbf{s}_k$$

т.е. $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0}$ выполняется для $c_j = -1 \neq 0$.

Рассуждая обратно, заканчиваем доказательство. QED

Пример 1.5: Строки

$\{ (40 \ 15), (-50 \ 25) \}$ являются ЛН.

Доказательство:

$$\text{Пусть } a(40 \ 15) + b(-50 \ 25) = (0 \ 0)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & 40a - 50b = 0 & \rightarrow & 4a - 5b = 0 & \rightarrow & 7a + 0 = 0 & \rightarrow & a = 0 \\ & 15a + 25b = 0 & & 3a + 5b = 0 & & 3a + 5b = 0 & & b = 0 \end{array}$$

$\{ (40 \ 15), (20 \ 7.5) \}$ есть ЛЗ система.

Доказательство:

$$\text{Пусть } a(40 \ 15) + b(20 \ 7.5) = (0 \ 0)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & 40a + 20b = 0 & \rightarrow & 2a + b = 0 & \rightarrow & b = -2a \\ & 15a + 7.5b = 0 & & 2a + b = 0 & & & \end{array}$$

Лемма 1.6: Пустое подмножество является ЛН.

Лемма 1.7: Любое подмножество S содержащее $\mathbf{0}$, является ЛЗ.

Доказательство:

$$0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_n + a\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall a \in F$$

Теорема 1.8:

Любое конечное подмножество S векторного пространства V содержат ЛН подмножество U с той же линейной оболочкой, что и S .

Доказательство:

- Если S ЛН, то берем $U = S$ и все доказано.
- Если S ЛЗ, то $\exists s_k$ так что $s_k = \sum_{j \neq k} c_j s_j$.

Из леммы 1.1, $\text{span } S_1 = \text{span } S$, где $S_1 = S \setminus \{s_k\}$.

Если S_1 ЛН, то все доказано.

- В противном случае, повторяем процедуру изъятия элементов, пока не достигнем ЛН. QED.

Лемма 1.9:

Всякое подмножество ЛН множества
является также ЛН.

Всякое надмножество ЛЗ множества также
является ЛЗ.

Доказательство: Очевидно.

	$S_1 \subset S$	$S_2 \supset S$
S ЛН	S_1 ЛН	--
S ЛЗ	--	S_2 ЛЗ

Лемма 1.10:

Пусть S есть ЛН подмножество векторного пространства V , тогда
 $\forall v \in V \ \& \ v \notin S, \quad S \cup \{v\}$ есть ЛЗ т.и т.т.к. $v \in \text{span } S$.

Доказательство $\Leftarrow$:

По определению, $v \in \text{span } S \ \& \ v \notin S \Rightarrow S \cup \{v\}$ есть ЛЗ

Доказательство $\Rightarrow$:

S есть ЛН $\Rightarrow$ ни один s_k не является линейной комбинацией других s_j — х.

$S \cup \{v\}$ есть ЛЗ $\Rightarrow v$ обязан быть линейной комбинацией s_j -х. QED

Следствие 1.11:

Подмножество $S = \{s_k \mid k = 1, \dots, n\}$ ЛЗ т.и т.т.к. $s_j = \sum_{k=1}^{j-1} c_k s_k$ для некоторого $j \leq n$

Доказательство: По построению.

Лемма 1.12: Пусть S — ЛН подмножество векторного пространства V , тогда $\forall v \in V \ \& \ v \notin S$,

$S \cup \{v\}$ ЛН т.и т.т.к. $v \notin \text{span } S$.