Оглавление

Задача № 1.21

В окружность, диаметр которой равен √12, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник в который вписана новая окружность. Найдите радиус этой окружности.

Дано:

Окружность $D=\sqrt{12}$

△ ABC- правильный △

CD – высота

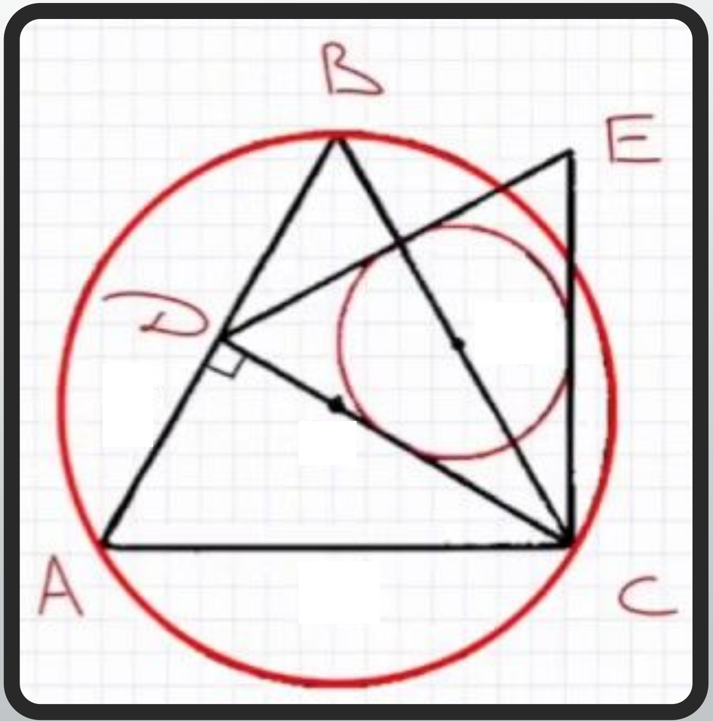
△CDE-правильный △

Окружность вписанная в △CDE

r-радиус

Найти: r

Чертеж:



Решение:

$$R = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

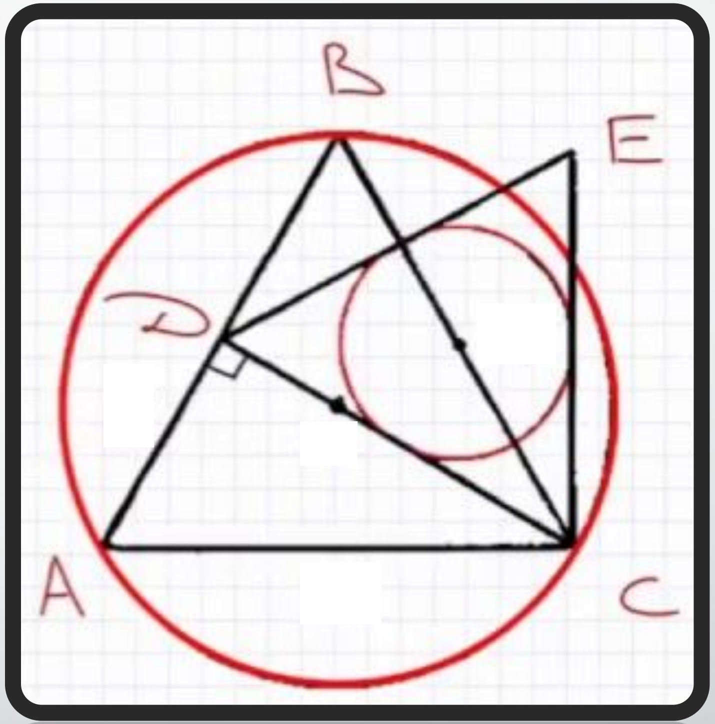
$$\triangle ABC: \; AB = R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot \sqrt{3} = 3$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \underline{1{,}5\sqrt{3}}$$

Радиус r вписанной окружности :

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1{,}5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

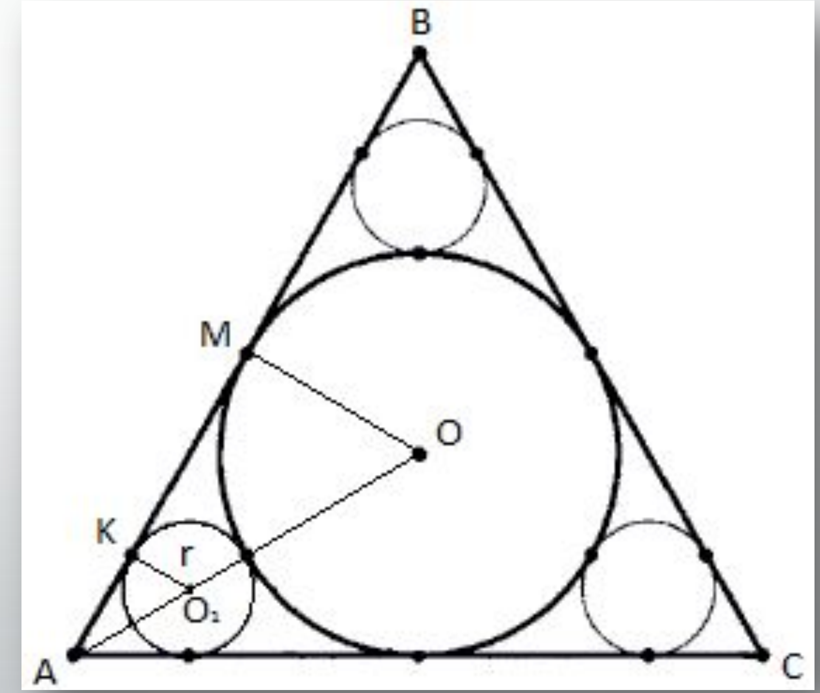
Ответ: 0,75



Задача № 1.22

В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности . Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

Чертёж



Дано:

△ ABC-равносторонний △

Окружность R=OM вписана в △ABC

Окружности $r=O_1K$

Найти: *r-радиус*

Решение:

1) a=AB *сторона* $\triangle$ *ABC*

R=OM радиус вписанной окружности.

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

2) *Проведём*

R=OM в точке касания

r=OK в точке касания

$\sqrt{3}$

3) $\triangle AOM \sim \triangle AO_1K$

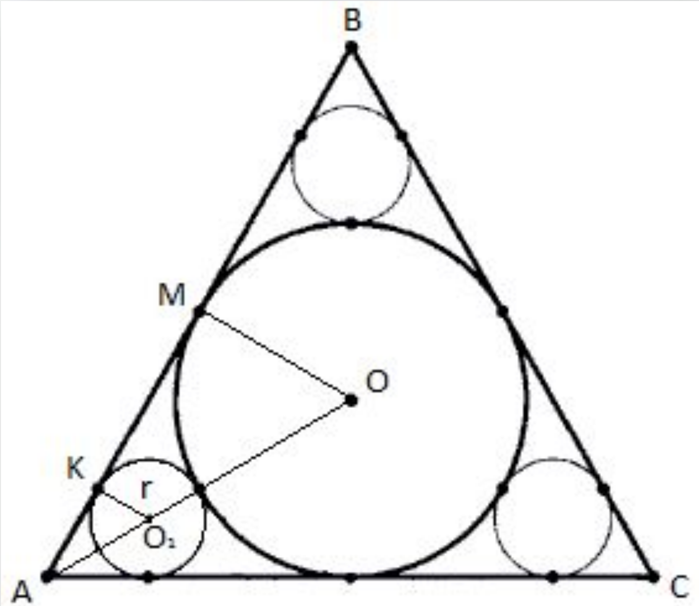
$$\frac{OM}{O_1K} = \frac{AO}{AO_1}$$

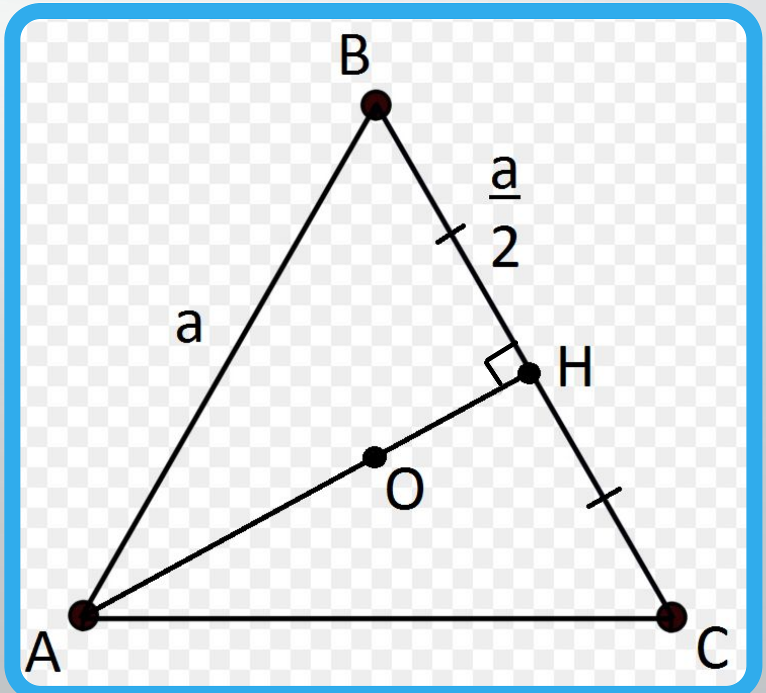
$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$





$$\frac{R}{r}=\frac{AO}{AO-R-r} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6\cdot r}=\frac{a\sqrt{3}}{3\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{6}-r\right)}$$

$$6\cdot r=a\sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}-3r$$

$$9\cdot r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}=9\cdot r$$

$$a\sqrt{3}=18\cdot r$$

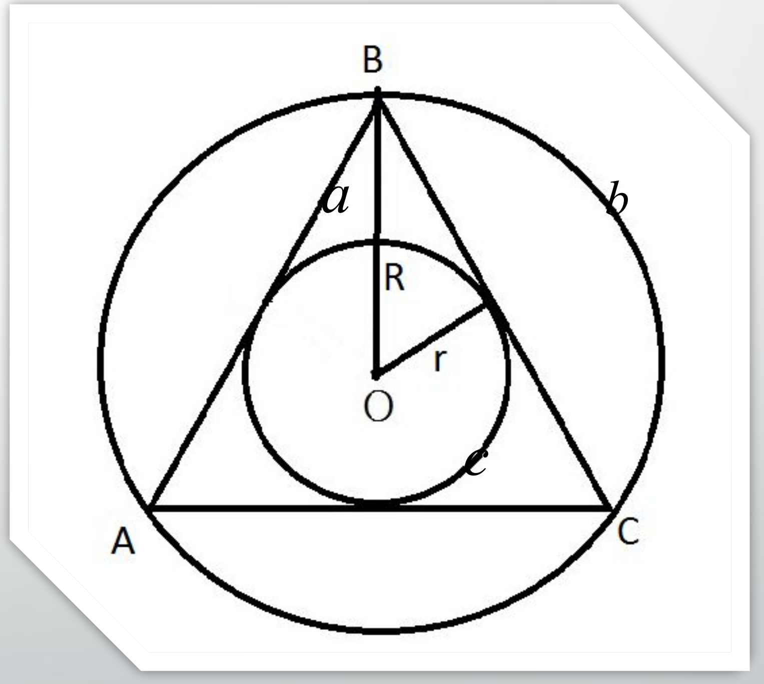
$$a=\frac{18\cdot r\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{18\cdot r\cdot\sqrt{3}}{3}=6\cdot r\cdot\sqrt{3}$$

Ответ: $6\cdot r\cdot\sqrt{3}$

Задача №1.23

Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в треугольник кругов.

Чертёж:



Дано:

$\triangle ABC$

$a=AB=13$ см

$b=BC=14$ см

$c=AC=15$ см

r- радиус вписанной окружности

R- радиус описанной окружности

Найти: $\dfrac{S_{окр.}\ R}{S_{окр.}\ r}$

Решение:

1) $r = \dfrac{S}{p}$ S-площадь△, p- полупериметр

R= $\dfrac{abc}{4S}$

2) $\boxed{S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ -формула Герона}}$

$S_{\triangle} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \sqrt{7\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 7\cdot 2\cdot 3} = \sqrt{7^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4} = 7\cdot 2\cdot 3\cdot 2 = 84$

p= $\dfrac{13+14+15}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$

3) $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{84}{21} = 4$

$R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84} = \dfrac{65}{8}$

4) $\dfrac{S_R}{S_r} = \dfrac{\pi R^2}{\pi\cdot r^2} = \left(\dfrac{65}{8\cdot 4}\right)^2 = \left(\dfrac{65}{32}\right)^2$

Ответ: $\left(\dfrac{65}{32}\right)^2$

Задача № 1.52

Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника.

Дано:

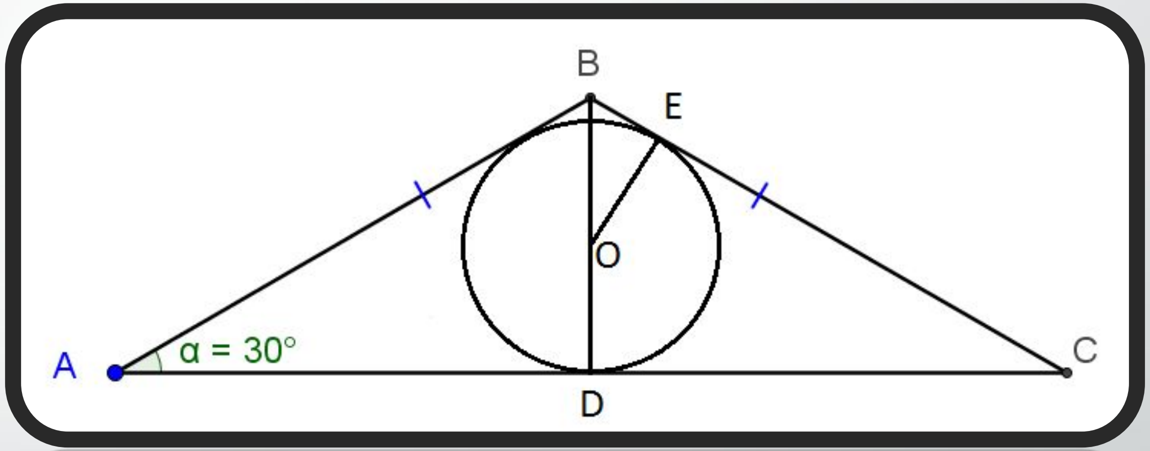
$\triangle$ *ABC- равнобедренный*

$\angle A = \angle C = 30°$

r =3 радиус вписанной окружности

Найти: стороны треугольника ABC

AB_1, BC_1, AC



Решение:

1) $r = OE \perp BC$

$\angle ABC=180° - (30°+30°)= 120°$

BD- высота, медиана, биссектриса.

$\triangle BOE: \ \angle OBE= 60°$

$\angle OEB= 90°$

$\angle BOE=30° \Rightarrow BE=\frac{1}{2}BO$ *(катет лежащий против* $\angle 30°$*)*

2) *Из* $\triangle BEO: BO^2= OE^2+BE^2$

$$BO^2=3^2+\left(\frac{BO}{2}\right)^2$$

$$BO^2-\frac{BO^2}{4}=9$$

$$\frac{3}{4}BO^2=9 \qquad BO^2=9\cdot\frac{4}{3} \qquad BO=\sqrt{\frac{36}{3}}=\frac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

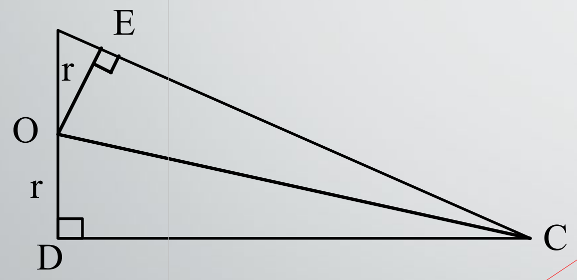
Из $\triangle ADB$: $AB = 2\,BD$ (*катет лежащий против* $\angle 30°$)

$$BD = BO + OD = 2\sqrt{3} + 3 \Rightarrow AB = 2\left(2\sqrt{3} + 3\right) = 4\sqrt{3} + 6$$

$$\Rightarrow AB = BC = 4\sqrt{3} + 6$$

4) $AC = 2DC = \boxed{2EC} = \boxed{2(BC - BE)} = 2\left(4\sqrt{3} + 6 - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\right) = 2\left(3\sqrt{3} + 6\right) = 6\sqrt{3} + 12$

$$2(BC - BE) = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$



$\triangle OEC = \triangle ODC$

$$\left.\begin{cases} OE = OD = r \\ OC\text{- общая} \\ EC = DC \end{cases}\right\}$$ *по* III признаку *равенства треугольников*

5) $AC = 6\sqrt{3} + 12$

Ответ: $\underline{4\sqrt{3} + 6}$; $\underline{4\sqrt{3} + 6}$; $\underline{6\sqrt{3} + 12}$