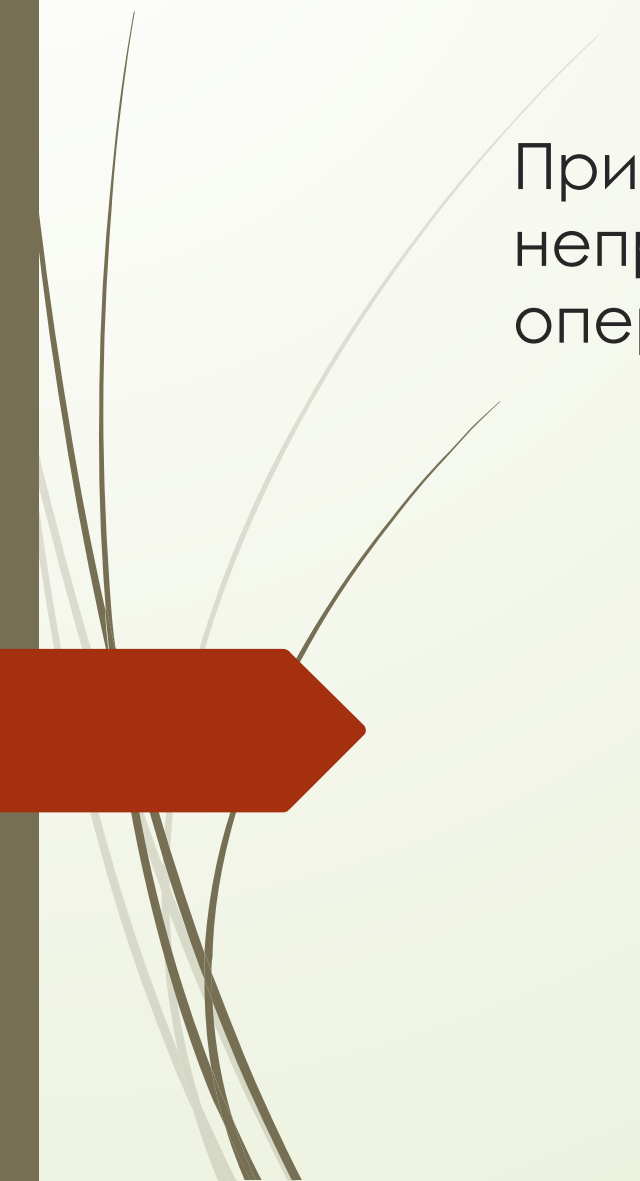




Применение вычислительных методов в теории приближений
непрерывных функций линейными положительными
операторами и многочленами Бернштейна.



Введение

Теория приближений функций играет важную роль в математике и ее приложениях. В прикладных вопросах возникает задача восстановления функции по имеющейся информации об определённых свойствах этой функции. Используя эту информацию, математики приближённо представляют исследуемую величину с помощью некоторых простых для вычислительной работы функций, например, с помощью многочленов. Цель моей работы: обсуждение свойств многочленов Бернштейна и теорем о приближении непрерывных функций многочленами Бернштейна.

Я уточнил и дополнил полученные результаты, рассматривая задачи, связанные с этим вопросом.

Моя дипломная работа состоит из четырех глав. Первая посвящена многочленами Бернштейна и их свойства, вторая – модулю непрерывности, в третьей рассматривается аппроксимация производных, четвертая глава посвящена решению задач.

Многочлены Бернштейна.

Пусть f - действительная функция, заданная на отрезке $[0; 1]$, n – натуральное число, $p_{kn}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Многочлен Бернштейна $B_n(f)$ функции f определяют формулой

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{kn}(x)$$

Поскольку каждая из функций $p_{kn}(x)$ является многочленом степени n , то $B_n(f, x)$ также будет многочленами степени n .

Функции, которые принимают в точках $\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, одинаковые значения, имеют один и тот же многочлен Бернштейна. Поэтому для оценки отклонения данного многочлена от функции f на отрезке $[0; 1]$ нужно располагать дополнительной информацией о свойствах функции на этом отрезке. В качестве такого свойства мы будем использовать свойство непрерывности. Полагая, что функция f непрерывна на отрезке $[0; 1]$ мы покажем, что при увеличении n отклонение многочлена $B_n(f)$ от функции f стремится к нулю. Предварительно установим необходимые для дальнейшего свойства многочленов $p_{kn}(x)$

Лемма 1. При любом натуральном n и для всякого действительного x справедливы равенства (1):

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{k=0}^n p_{kn}(x) &= 1 \\ \text{б) } \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{kn}(x) &= x \\ \text{в) } \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} p_{kn}(x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

Следствие. Имеет место формула $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{kn}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$.

Теорема Бернштейна.

Мы называем уклонением многочлена Бернштейна от функции f в точке x величину $|f(x) - B_n(f, x)|$. Если при $n \rightarrow \infty$ оно стремится к нулю, то говорят, что последовательность $\{B_n(f, x)\}$ сходится к $f(x)$ и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = f(x).$$

Уклонением многочлена $B_n(f)$ от функции f на отрезке $[0; 1]$ называется величина $\|f - B_n(f)\| = \max\{|f(x) - B_n(f; x)| : x \in [0; 1]\}$ - так называемое равномерное уклонение. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(f)\| = 0$, то говорят что

последовательность $\{B_n(f)\}$ равномерно на отрезке $[0; 1]$ сходится к функции f . Этот факт записывают в виде $B_n(f) \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$.

Терема 1 (С.Н. Бернштейн). Для любой непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f последовательность $\{B_n(f)\}$ равномерно на этом отрезке сходится к функции f .



§ 4. Теорема Вейерштрасса.

Теорема 2 (К. Вейерштрасс). Для всякой непрерывной на отрезке функции найдется такая последовательность алгебраических многочленов, которая равномерно на данном отрезке сходится к этой функции.

Для отрезка $[0; 1]$ утверждение теоремы следует из теоремы Бернштейна, так как в качестве последовательности многочленов можно взять последовательность $\{B_n(f)\}$.

Модуль непрерывности.

Пусть функция f определена на отрезке $[a; b]$. Модулем непрерывности функции f называется функция $\omega(f): [0; b - a] \rightarrow R$, заданная формулой

$$\omega(f; u) = \sup\{|f(x) - f(t)|: x, t \in [a; b], |x - t| \leq u\}.$$

Из этого определения следует, что $\omega(f; 0) = 0$ и при любых x и t из отрезка $[a; b]$ выполняется равенство $|f(x) - f(t)| \leq \omega(f, |x - t|)$.

Свойства модуля непрерывности.

- 1) Для любой непрерывной на отрезке функции выполняется условие $\lim_{u \rightarrow 0+0} \omega(f; u) = 0$;
- 2) Если $u_1 < u_2$, то $\omega(f; u_1) \leq \omega(f; u_2)$;
- 3) $\omega(f; u_1 + u_2) \leq \omega(f; u_1) + \omega(f; u_2)$;
- 4) Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ее модуль непрерывности будет непрерывной функцией на отрезке $[0, b - a]$.
- 5) При любом натуральном n и $nu \in [0, b - a]$ имеет место неравенство $\omega(f; nu) \leq n\omega(f; u)$;
- 6) Для произвольного положительного числа λ , при котором $\lambda u \in [0, b - a]$ и $(\lambda + 1)u \in [0, b - a]$ будет $\omega(f; \lambda u) \leq (\lambda + 1)\omega(f; u)$;
- 7) Если $f \neq \text{const}$ и $h = b - a$, то при любом $u \in [0, b - a]$ справедливо неравенство $\omega(f; u) \geq \frac{1}{2h} \omega(f; h)u$.

Аппроксимация производных.

Теперь мы обратимся к изучению производных от многочленов Бернштейна. Продифференцируем равенство $B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{kn}(x)$ тогда мы получим формулу

$$B'_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p'_{kn}(x)$$

Здесь $p'_{kn}(x) = C_n^k [kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}] = n \{p_{k-1, n-1}(x) - p_{k, n-1}(x)\}$, $1 \leq k \leq n-1$.

Теорема. Если функция f имеет на отрезке $[0; 1]$ непрерывную производную f' , то последовательность $\{B'_n(f)\}$ равномерно на этом отрезке сходится к f' .

Следствие. Для любой функции f , имеющей на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную f' существует такая последовательность алгебраических многочленов $\{P_n\}$, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[a; b]$ выполняются соотношения: $P_n \rightarrow f$ и $P'_n \rightarrow f'$.

Примеры.

Пример 1.

Составить многочлен Бернштейна четвертой степени для функции $f(x) = |x - 0,5|$, и найти уклонение $B_4(f, x)$ от $f(x)$ в точках $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ и $x_3 = 0,75$.

Решение:

$$B_4(f, x) = \frac{1}{4} [2(1-x)^4 + 4x(1-x)^3 + 4(1-x)x^3 + 2x^4] = \frac{1}{2} [1 - 2x + 4x^3 + 2x^4].$$

$$|B_4(f, x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{7}{256}, & \text{если } x = 0,25 \\ \frac{3}{16}, & \text{если } x = 0,5 \\ \frac{7}{256}, & \text{если } x = 0,75 \end{cases}$$