Квадратные уравнения

Квадратное уравнение имеет ~~действительные положительные~~ корни, если

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет действительные отрицательные корни, если

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет действительные корни различных знаков,
причем положительный корень имеет больший модуль,

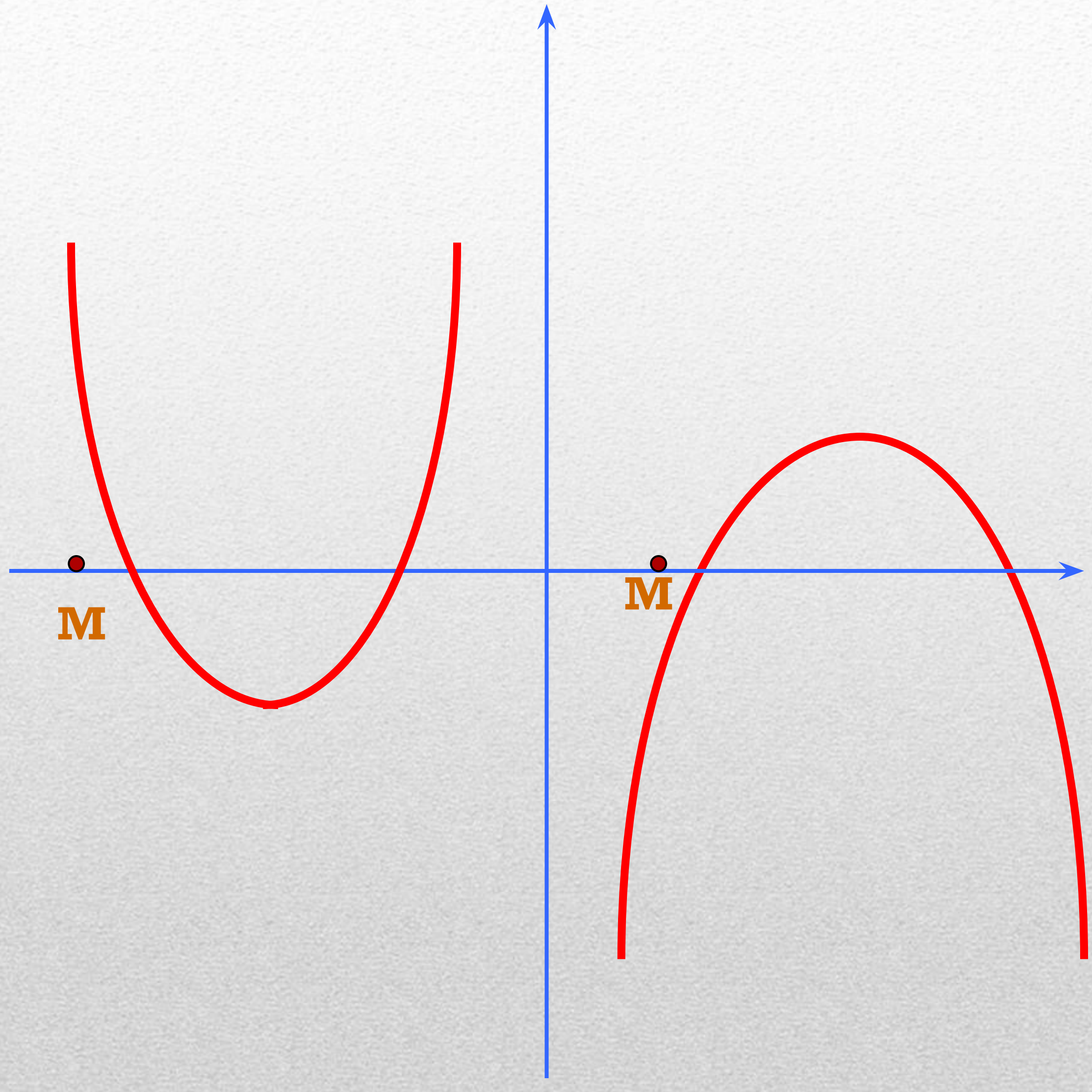
если

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} < 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0. \end{cases}$$

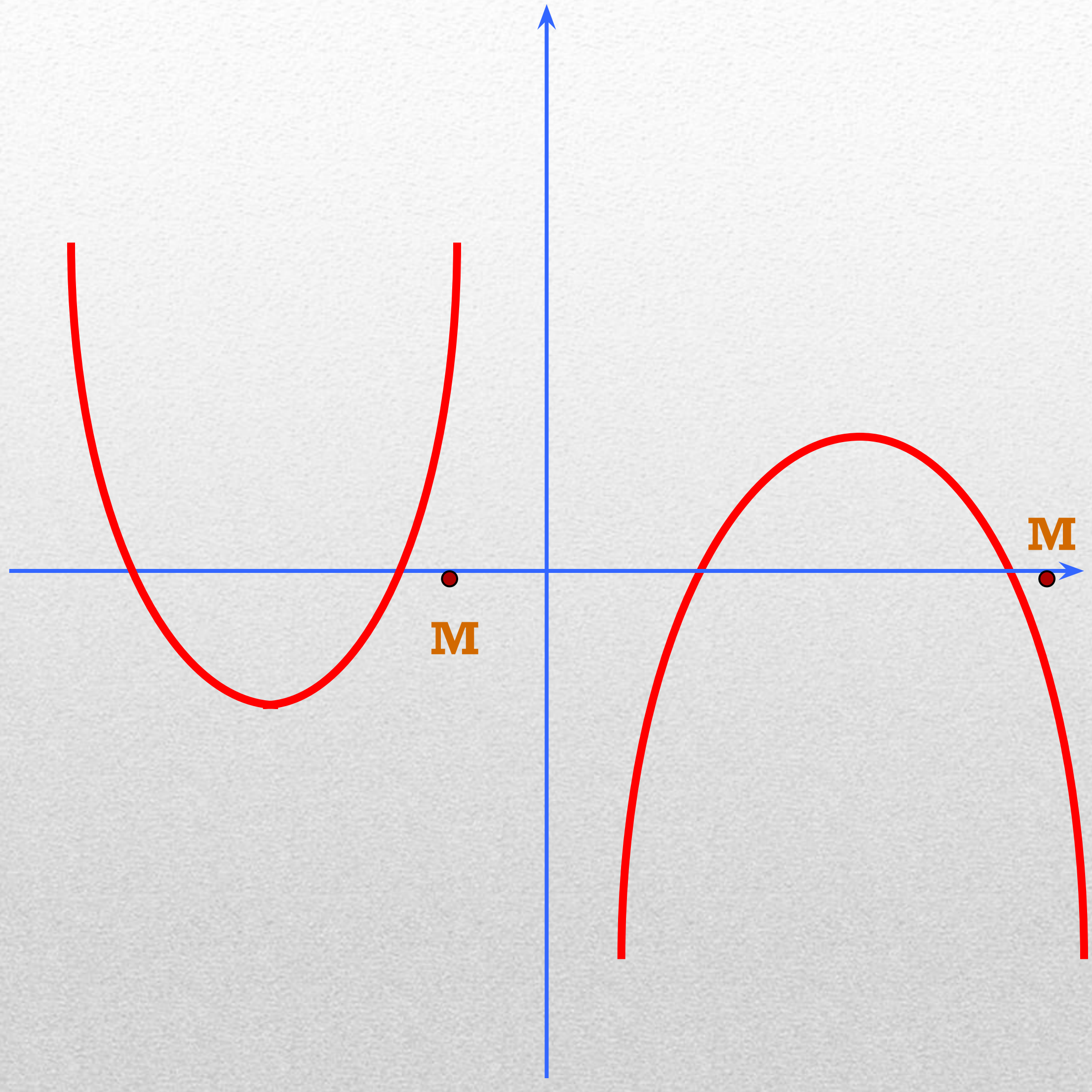
Квадратное уравнение имеет действительные корни различных знаков,
причем отрицательный корень имеет больший модуль, если

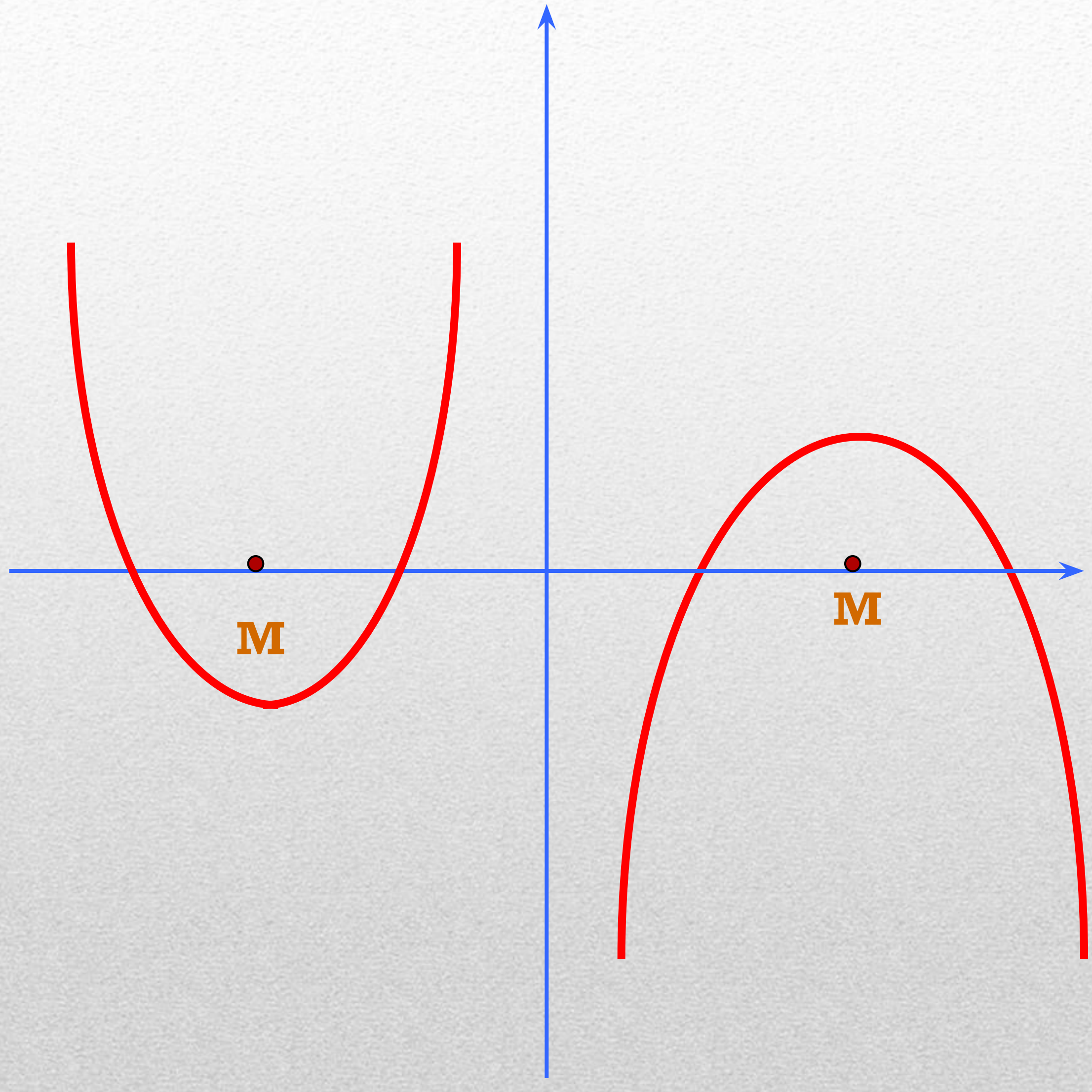
$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} < 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0. \end{cases}$$

Расположение корней относительно заданной точки определяется направлением ветвей соответствующей параболы,
координатами вершины
и значениями в заданных точках.
В этих задачах хорошо работают графические иллюстрации.



M
M


M
M


M
M

Оба корня квадратного трехчлена меньше числа М,
тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

Оба корня квадратного трехчлена

больше числа М,

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

Один из корней квадратного трехчлена
меньше числа М,
а другой больше числа М,
тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

При каких значениях параметра m уравнение

$$(m-1)x^2+(m+4)x+m+7=0$$

имеет не более одного действительного корня?

При каких значениях параметра m корни уравнения

$$(m-1)x^2-2mx+m+3=0$$

различны и положительны?

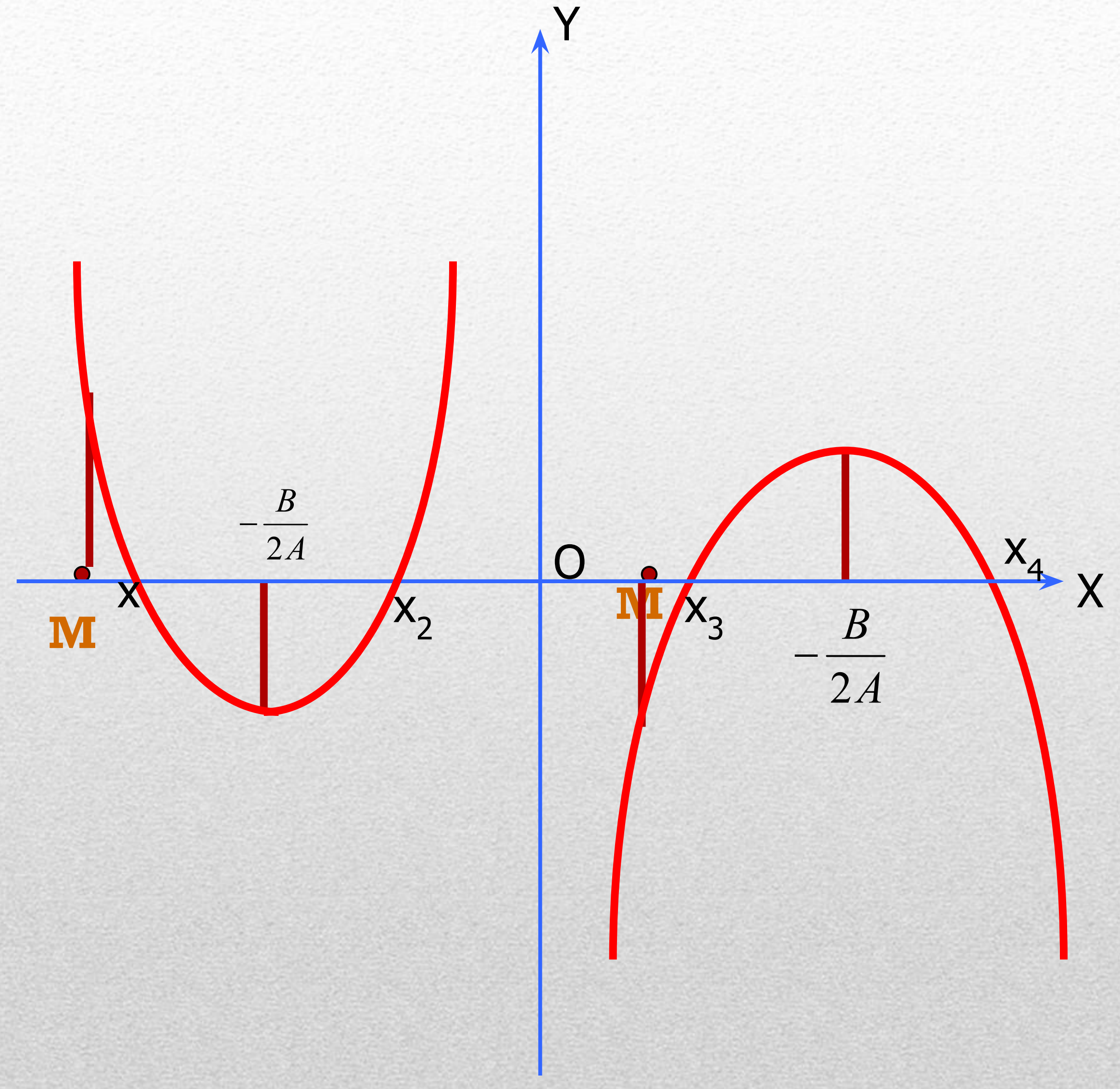
При каких значениях параметра а корни уравнения

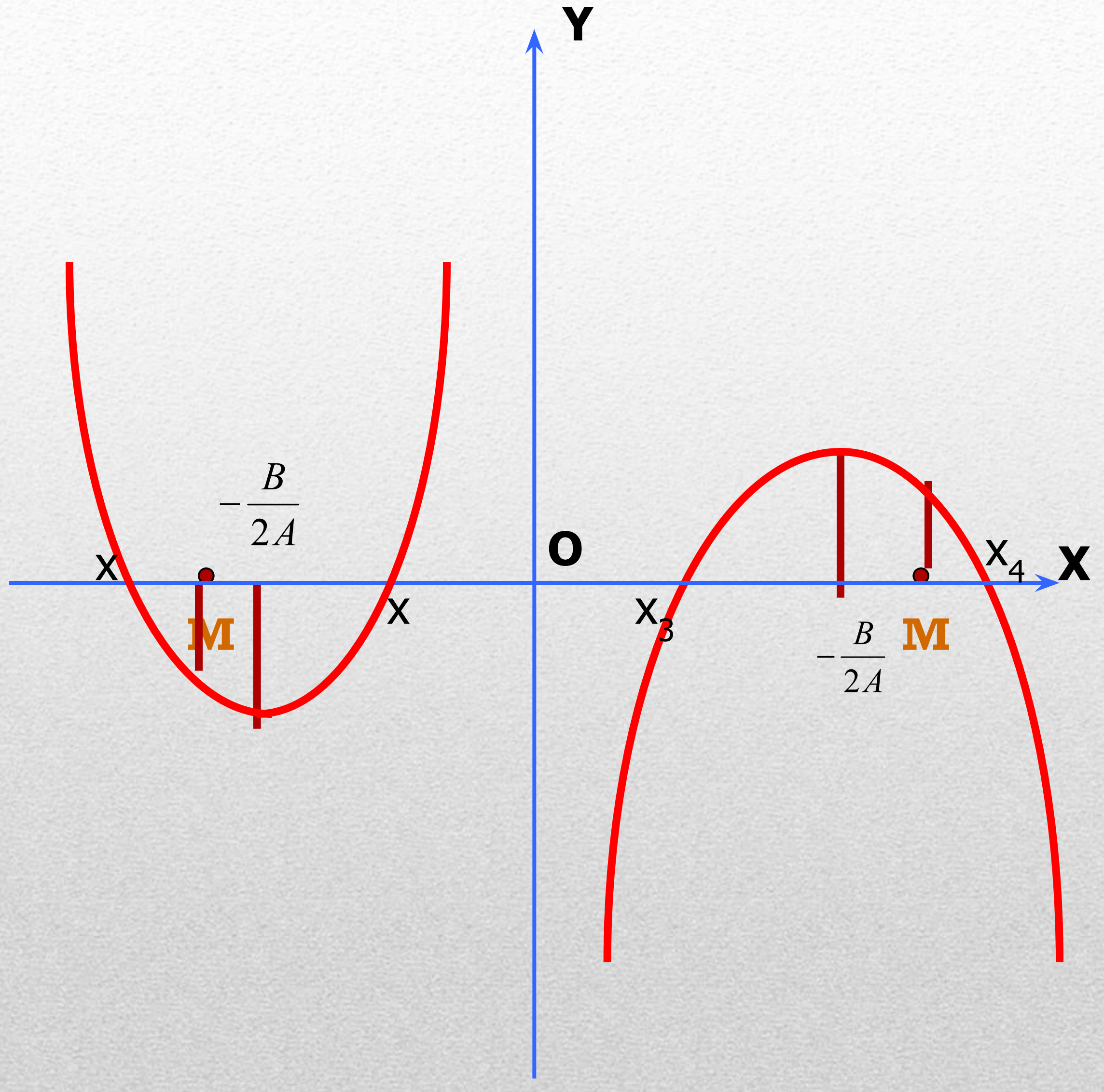
$$(\grave{a}-1)x^{2}-(4\grave{a}+5)x+\grave{a}-3=0$$

таковы, что сумма их квадратов равна 1,75?

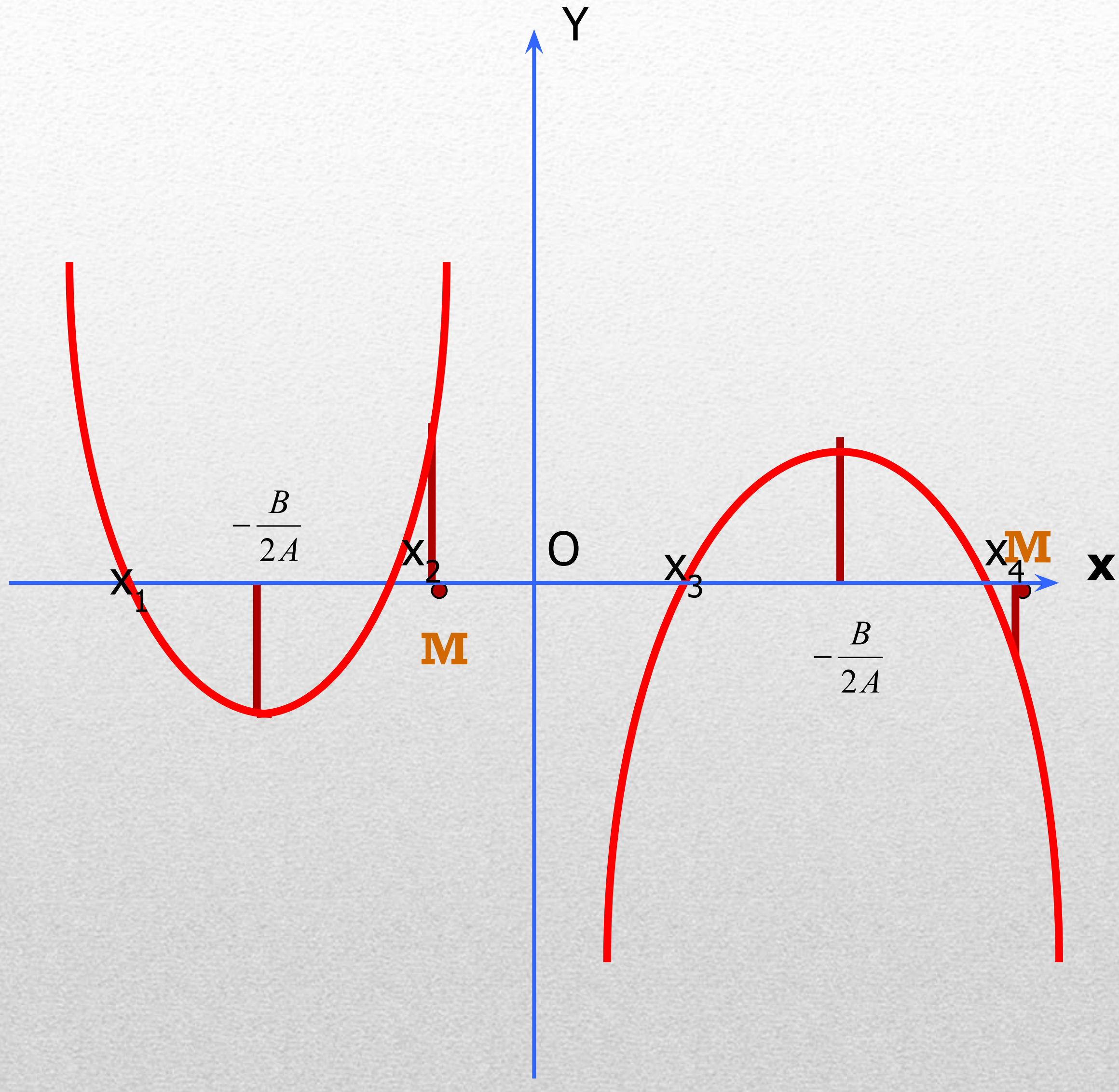
Нахождение значений параметра,
при которых решения удовлетворяют некоторому условию.

Решение уравнений
для всех значений параметра а


Y
O
X
M
x
$-\frac{B}{2A}$
x_2
M
x_3
$-\frac{B}{2A}$
x_4



Y
X
O
X
X
$-\frac{B}{2A}$
M
X_3
X_4
$-\frac{B}{2A}$
M


Y
O
x
x_1
x_2
x_3
x_4
$-\frac{B}{2A}$
$-\frac{B}{2A}$
M
M

Оба корня квадратного уравнения $A(a)x^2+B(a)x+C(a)=0$ <u>больше</u> заданного числа М тогда и только тогда, когда имеет место система $$\begin{cases} Af(M)>0, \\ D>0, \\ -\dfrac{B}{2A}>M. \end{cases}$$	Оба корня квадратного уравнения $A(a)x^2+B(a)x+C(a)=0$ <u>меньше</u> заданного числа М тогда и только тогда, когда имеет место система $$\begin{cases} Af(M)>0, \\ D>0, \\ -\dfrac{B}{2A}<M. \end{cases}$$	Заданное число М лежит <u>между</u> корнями $A(a)x^2+B(a)x+C(a)=0$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство ***Af(M)<0***

При каких значениях параметра *a* корни квадратного уравнения

$x^2 + (a + 1)x + 3 = 0$

лежат по разные стороны от числа 2?

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)= x^2 + (a + 1)x + 3$.

$f(2)<0$;

$f(2)=4+2a+2+3=2a+9<0$

$2a<-9$

$a<-4.5$

Ответ. $a\in(-\infty;-4.5)$

При каких значениях параметра *а* оба корня квадратного уравнения

(2–а)х²-3ах+2а=0

больше ½.

Решение.

Рассмотрим функцию f(x)= (2–а)х²-3ах+2а.

$$\begin{cases} Af(M)>0, \\ D>0, \\ -\dfrac{B}{2A}>M. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}-\dfrac{3a}{2}+2a\right)>0, \\ 9a^2-8a(2-a)>0, \\ \dfrac{3a}{2-a}>\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)\left(\dfrac{2}{4}+\dfrac{a}{4}\right)>0, \\ a^2-16a>0, \\ \dfrac{3a}{2-a}-\dfrac{1}{2}>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2-a)(a+2)>0, \\ a(a-16)>0, \\ \dfrac{6a-2+a}{2-a}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-2;2) \\ a\in(-\infty;0)\cup(16;+\infty), \\ \dfrac{7a-2}{2-a}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-2;2) \\ a\in(-\infty;0)\cup(16;+\infty), \\ a\in\left(\dfrac{2}{7};2\right); \end{cases}$$

Решений нет.

Ответ. Решений нет.

Найти все значения параметра *a*, при которых оба корня квадратного уравнения

$x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a2) = 0$

больше 3.

Решение.

Рассмотрим функцию f(x)= x^2-6ax+(2-2a+9a2)

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > M. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0, \\ 36a^2 - 8 - 8a - 36a^2 > 0, \\ \dfrac{6a}{2} > 3. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a + 1 > 0, \\ a > 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;1) \cup \left(1\dfrac{2}{9};+\infty\right), \\ a > -1, \\ a > 1. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a} \in \left(1\frac{2}{9};+\infty\right)$$

Ответ**:** $\left(1\dfrac{2}{9};+\infty\right)$

Найти все значения параметра *a*, которых оба корня квадратного уравнения

$x^2+4ax+(1-2a+4a2)=0$

меньше –1.

Решение.

Рассмотрим функцию f(x)= $x^2+4ax+(1-2a+4a2)$.

$$\begin{cases} Af(M)>0, \\ D>0, \\ -\frac{B}{2A}<M. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-4a+1-2a+4a^2>0, \\ 16a^2-4+8a-16a^2>0, \\ -\frac{4a}{2}<-1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty) \\ a>\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ. $a\in(1;+\infty)$